INSA TOULOUSE
POIC $2^{\text{ème}}$ année

Chapitre 4 : Résolution directe de systèmes linéaires

Dans cette feuille, on liste les questions de cours/exercices types relatifs au chapitre sur la résolution directe de systèmes linéaires que vous devez connaître/savoir faire.

Questions de cours

1. Enoncer le théorème de factorisation LU sans permutation d'une matrice.
2. Donner le coût d'une factorisation LU d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$
3. Enoncer le théorème de factorisation de Cholesky
4. Donner le coût de la factorisation de Cholesky
5. Donner une méthode d'inversion d'une matrice à l'aide de la dćomposition LU et donner le coût de cette méthode.

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y = 0, \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2\,z = 5, \\ x - y - z = 1, \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2\,z = a, \\ -x + 2y - 3z = b, \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Faire la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ et $(b_i)_{1,2} \in \mathbb{R}^4$ définis par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 10 & 5 \\ 4 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition LU de A
2. En déduire la valeur de $\det(A)$.
3. Résoudre $Ax_1 = b_1$ et $Ax_2 = b_2$ en utilisant la décomposition LU de A.

Exercice 5. Soit B la matrice donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

1. Donner la décomposition de Cholesky de B
2. Résoudre $Bx_3 = b_3$ en utilisant la décomposition de Cholesky de B.