Chapitre 8 : Moindres Carrés

Exercice 1 Trouver la droite passant "au plus près" des points $(2,5)$; $(3,9)$, $(4;15)$; $(5;21)$

on cherche à minimiser $\sum_{i=1}^{4} (ax_i+b-y_i)^2 := f(a,b)$

on a une solution en $(a^*;b^*)$ tels que

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a^*;b^*)=0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial b}(a^*;b^*)=0$$

Soit le système à résoudre

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} (ax_i+b-y_i)\,x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{4} ax_i+b-y_i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{4} 1\right) b = \sum_{i=1}^{4} y_i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & \sum_{i=1}^{4} x_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i & \sum_{i=1}^{4} 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{4} y_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 54 & 14 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 202 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,4 \\ -6,4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. OK.
2. cf correction ex 1
3. Fonction coût $g(a,b) = \sum_{j=1}^{5} (ax_i+b-y_i)^2$

des coefficients (a,b) vérifient

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{5} x_i^2 & \sum_{j=1}^{5} x_i \\ \sum_{j=1}^{5} x_i & \sum_{j=1}^{5} 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{5} x_i y_i \\ \sum_{j=1}^{5} y_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,7633 & 2,91 \\ 2,91 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2,004 \\ 3,2 \end{pmatrix}$$

Rq : les données ont été exprimées en mètre

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2,03 \\ -0,54 \end{pmatrix}$$