INSA Toulouse, Cycle préparatoire.
Formation continue. Mathématiques. Analyse #2.

Feuille TD #1

Fonctions de plusieurs variables.
Calcul différentiel, opérateurs différentiels ordre 1 et 2.

Exercice 1

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x, y) = (x^2 - y^2)\sin(xy)$$
est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$u(x, y) = \frac{\sin(x - y)}{x - y}$$
est de classe C^1 sur un domaine Ω que l'on précisera.

Exercice 2 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \left(\ln(x + y + z), \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right).$$

a) Donner le domaine définition de f, celui où elle est continue et celui où elle est $\mathcal{C}^1$.
b) Calculer sa jacobienne.
c) Donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 3 Montrer que le rotationnel du champ de vecteur F défini par :

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z \\ z + x \\ x + y \end{pmatrix}$$

est égal au vecteur nul.

Exercice 4 Soient $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ et $\mathbf{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ deux fonctions vectorielles de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
On pose :

$$\text{rot } \mathbf{\Phi} = \nabla \wedge \Phi = \begin{pmatrix} \partial_y \Phi_3 - \partial_z \Phi_2 \\ \partial_z \Phi_1 - \partial_x \Phi_3 \\ \partial_x \Phi_2 - \partial_y \Phi_1 \end{pmatrix} \text{ et div } \mathbf{\Psi} = \partial_x \Psi_1 + \partial_y \Psi_2 + \partial_z \Psi_3.$$

1. Soit Φ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :

   $$\text{div (rot } \mathbf{\Phi}) = 0$$

   On admet la réciproque : soit $\mathbf{\Psi}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que div $\mathbf{\Psi} = 0$, il existe une fonction vectorielle $\mathbf{\Phi}$ telle que $\mathbf{\Psi} = \text{rot } \mathbf{\Phi}$.
2. *Application :*
   a) Soit $\mathbf{\Psi}(x, y, z) = (x - 2xyz, 0, yz^2 - z)$ définie sur $\mathbb{R}^3$. Justifier qu'il existe $\mathbf{\Phi}$ telle que rot $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}$.
   b) Déterminer alors $\mathbf{\Phi}$ telle que :

   $$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \Phi_3(x, y, z) = 0,\ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \Phi_2(x, y, 0) = xy,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_1(x, 0, 0) = 0.$$

Exercice 5 Après avoir justifié que les fonctions suivantes sont de classe C^2 (sur des domaines que l'on précisera), calculer leur gradient, puis leur hessienne.

1. $u(x, y) = \frac{\exp(x+y)}{x+y}$.
2. $u(x, y) = \cos(x + 2y)$.