Exo Régularité $\mathcal{C}^1$

1) $f(x,y) = (x^2 - y^2)\sin(xy)$

f est le produit de termes polynomiaux (dc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$) et de la fct sin qui est égalt $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. f est dc infiniment dérivable (i.e. $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$.

2) Le numérateur de $u(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Le dénominateur également.
Par contre, ce dernier s'annulle pour $x = y$.
Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ensemble
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \neq y\}$.

NB. ~~Ns~~ ~~ces~~ Ces fcts st de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc a fortiori $\mathcal{C}^1$!

Exo 1 :

$F(x,y,z) = (y+z,\ z+x,\ x+y)$

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}^3$. On peut donc définir $\mathrm{rot}(F)$.

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exo Jacobienne et différentielle

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) = \left(\ln(x+y+z) \ , \ \frac{1}{x^2+y^2-1} \right)$

a) $f_1(x,y,z) = \ln(x+y+z)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ensemble $\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x+y+z > 0\}$

$f_2(x,y,z)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ensemble

$\Omega_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $x^2+y^2 \neq 1\}$.

Et f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq : $x+y+z > 0$ et $x^2+y^2 \neq 1\}$

b) la matrice Jacobienne de f s'écrit :

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+z} & \frac{1}{x+y+z} & \frac{1}{x+y+z} \\ \\ \frac{-2x}{(x^2+y^2-1)^2} & \frac{-2y}{(x^2+y^2-1)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

c) L'application différentielle de f en un pt X dans la direction à $H = (h_x, h_y, h_z)$ | dit la appli- | que s'écrit :

$$Df(X) \cdot H = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\partial_i f(X)}_{\in \mathbb{R}^2} \cdot \underbrace{H_i}_{\in \mathbb{R}} = \left(\frac{h_x + h_y + h_z}{x+y+z} \ , \ \frac{-2x h_x - 2y h_y}{(x^2+y^2-1)^2} \right)$$

Exo Gradient et Hessiennes

1). $u(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x+y}$, u sur $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

u est le quotient de 2 fcts $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Le dénominateur s'annule pour $x+y=0$

Dc u est définie et $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x+y \neq 0\}$

$$\partial_x u(x,y) = \frac{e^{x+y}(x+y) - e^{x+y}}{(x+y)^2} = \frac{e^{x+y}}{(x+y)} - \frac{e^{x+y}}{(x+y)^2}$$

$u(x,y)$ est symétrique i.e. $u(x,y) = u(y,x)$ $\forall (x,y) \in \Omega$.

Donc : $\partial_y u(x,y) = \partial_x u(y, x)$
$= \partial_x u(x,y)$

D'où :

$$\nabla u(x,y) = \Big(\underbrace{\frac{e^{x+y}}{(x+y)}}_{=u(x,y)} \Big(1 - \frac{1}{(x+y)}\Big) \;,\; \text{idem} \Big)^T$$

Matrice Hessienne.

On a :

$$\partial^2_{xx} u(x,y) = u(x,y)\frac{1}{(x+y)^2} + \partial_x u(x,y)\Big(1 - \frac{1}{(x+y)}\Big)$$
$$= \partial^2_{yy} u(x,y) \text{ par symétrie}$$

Aussi $\partial_x u(x,y)$ est symétrique,

donc $\partial^2_{xy} u(x,y) = \partial^2_{xx} u(x,y)$

On a finalt la matrice Hessienne :

$$H_u(x,y) = \begin{pmatrix} h(x,y) & h(x,y) \\ h(x,y) & h(x,y) \end{pmatrix}$$

avec $h(x,y) = \dfrac{u(x,y)}{(x+y)^2} + u(x,y)\left(1 - \dfrac{1}{(x+y)}\right)^2$

avec $u(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x+y}$. Et

$h(x,y)$ peut se ré-écrire ainsi :

$$h(x,y) = u(x,y)\left(1 - \frac{2}{(x+y)} + \frac{2}{(x+y)^2}\right)$$

$\longrightarrow$

2) $u(x,y) = \cos(x+2y)$

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\partial_x u(x,y) = -\sin(x+2y)$$
$$\partial_y u(x,y) = -2\sin(x+2y)$$

$$\partial^2_{xx} u(x,y) = -\cos(x+2y) = -u(x,y)$$
$$\partial^2_{xy} u(x,y) = -\cos(x+2y)\cdot 2 = -2u(x,y)$$
$$\partial^2_{yy} u(x,y) = -2\cos(x+2y)\cdot 2 = -4u(x,y)$$

D'où :

$$\nabla u(x,y) = -\sin(x+2y)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$H_u(x,y) = -u(x,y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

EXO [redacted]: Calcul vectoriel

Soient $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ *et* $\mathbf{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ *deux fonctions vectorielles de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
On pose :

$$\text{rot } \mathbf{\Phi} = \nabla \wedge \Phi = \begin{pmatrix} \partial_y \Phi_3 - \partial_z \Phi_2 \\ \partial_z \Phi_1 - \partial_x \Phi_3 \\ \partial_x \Phi_2 - \partial_y \Phi_1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \text{div } \mathbf{\Psi} = \partial_x \Psi_1 + \partial_y \Psi_2 + \partial_z \Psi_3.$$

1. *Soit* Φ *de classe* $\mathcal{C}^2$. *Montrer que* div (rot $\mathbf{\Phi}$) = 0.
   On admet la réciproque : soit $\mathbf{\Psi}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *tel que* div $\mathbf{\Psi} = 0$, *il existe une fonction vectorielle* $\mathbf{\Phi}$ *telle que* $\mathbf{\Psi} =$ rot $\mathbf{\Phi}$.
2. *Application :*
   a) Soit $\mathbf{\Psi}(x, y, z) = (x - 2xyz, 0, yz^2 - z)$ *définie sur* $\mathbb{R}^3$. *Justifier qu'il existe* $\mathbf{\Phi}$ *telle que* rot $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}$.
   b) Déterminer alors $\mathbf{\Phi}$ *telle que :*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; \Phi_3(x, y, z) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; \Phi_2(x, y, 0) = xy, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; \Phi_1(x, 0, 0) = 0.$$

Note : rot exprime la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point (opérateur fort utilisé en mécanique des fluides).
Correction.

1) Soit Φ fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^2$. Le théorème de Schwarz s'applique et l'on a :

$$\text{div (rot } \mathbf{\Phi}) = \partial^2_{xy} \Psi_3 - \partial^2_{xz} \Psi_2 + \partial^2_{yz} \Psi_1 - \partial^2_{xy} \Psi_3 + \partial^2_{xz} \Psi_2 - \partial^2_{yz} \Psi_1$$

d'où le résultat.

2) a) On a : $div(\mathbf{\Phi})(x, y, z) = 1 - 2yz + 0 + 2yz - 1 = 0$. Et l'on peut appliquer le résultat admis à la question précédente ; d'où l'existence de $\mathbf{\Phi}$ telle que rot $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}$.

b) Soit $\mathbf{\Phi}$ telle que $\mathbf{\Psi} =$ rot $\mathbf{\Phi}$. On a alors :

$$\begin{cases} \Psi_1(x, y, z) = -\partial_z \Phi_2(x, y, z) \\ \Psi_2(x, y, z) = \partial_z \Phi_1(x, y, z) \\ \Psi_3(x, y, z) = \partial_x \Phi_2(x, y, z) - \partial_y \Phi_1(x, y, z) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \partial_z \Phi_2(x, y, z) = -x + 2xyz \\ \partial_z \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Psi_3(x, y, z) = \partial_x \Phi_2(x, y, z) - \partial_y \Phi_1(x, y, z) \end{cases}$$

L'équation (1) du système précédent donne : $\Phi_2(x, y, z) = -xz + xyz^2 + fct_1(x, y)$;
et $\Phi_2(x, y, 0) = xy$ implique : $\Phi_2(x, y, z) = -xz + xyz^2 + xy$.

L'équation (2) du système précédent donne : $\Phi_1(x, y, z) = fct_2(x, y)$; et $\Phi_1(x, 0, 0) = 0$ implique : $fct_2(x, 0) = 0$.

L'équation (3) du système précédent donne : $\partial_y \Phi_1(x, y, z) = y$; soit : $\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{2} y^2 + fct_3(x)$.

Et $\Phi_1(x, 0, 0) = 0$ implique : $\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{2} y^2$.

Ce qui nous donne finalement l'expression $\mathbf{\Phi}(x, y, z)$ qui satisfait les contraintes de l'énoncé.