Exo Plan tangent

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Le plan tangent à la surface $f(x,y,z)=0$ au pt (x_0, y_0, z_0) est défini par :

$$(\mathcal{P}_T) : \partial_x f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \partial_z f(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0) = 0$$

---

1) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = (19 - x^2 - y^2)^{1/2}$$

Son graphe de $\mathbb{R}^3$ est décrit par : $z = g(x,y)$

On pose : $\underline{f(x,y,z) = z - g(x,y) = 0}$.

Le plan tgt au graphe de g au pt (x_0, y_0) est défini par l'eqn $(\mathcal{P}_T)$ avec $z_0 = g(x_0,y_0)$.

On a bien : $g(1,3) = (19-1-9)^{1/2} = 3$

Calculons :

$$\partial_x f(x,y,z) = -\partial_x g(x,y) = +\frac{2x}{2}(19-x^2-y^2)^{-1/2}$$
$$= x(19-x^2-y^2)^{-1/2}$$

$$\partial_y f(x,y,z) = -\partial_y g(x,y) = -\partial_x g(y,x) \text{ par symétrie}$$
$$= y(19-x^2-y^2)^{-1/2}$$

$$\partial_z f(x,y,z) = 1.$$

D'où l'équ du plan tgt au pt $P = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$:

$$\frac{1}{3}(x-1) + 1.(y-3) + (z-3) = 0$$

soit : $z = \cancel{6} + \frac{1}{3}(1-x) - y$

$$\underline{z = -\frac{1}{3}x - y + \frac{19}{3}}$$

2) $z = g(x,y) = \sin(\pi x y) \cdot \exp(2x^2 y - 1)$

au pt $(x,y) = (1, \frac{1}{2})$.

On a bien : $g(1, 1/2) = 1 \cdot \exp 0 = 1$

On pose : $f(x,y,z) = z - g(x,y)$

On a $f(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

On calcule :

$$\partial_x f(x,y,z) = -\partial_x g(x,y) = -\Big[\cos(\pi x y) \exp(-) \cdot \pi y + g(x,y) \cdot 4xy\Big]$$

$$\partial_y f(x,y,z) = -\partial_y g(x,y) = -\Big[\cos(\pi x y) \exp(-) \cdot \pi x + g(x,y) \cdot 2x^2\Big]$$

$$\partial_z f(x,y,z) = 1.$$

D'où l'eqn du plan tgt au graphe de g au pt $(1, 1/2)$:

$$-(x-1)\underbrace{\partial_x f(1, \tfrac{1}{2}, 1)}_{=-2} - (y - \tfrac{1}{2})\underbrace{\partial_y f(1, \tfrac{1}{2}, 1)}_{=-2} + 1 = z$$

Soit le plan d'equ :

$$z = 2(x + y - 1)$$

Exo Plan tangent

1) L'eqn d'un plan tangent est par définition une équation linéaire (ou affine) en (x, y, z).
Dc l'eqn proposée ne peut être celle d'un plan !

2) On pose : $g(x,y) = x^4 - y^2$
On a : $\partial_x g(x,y) = 4x^3$
$\partial_y g(x,y) = -2y$
D'où : $\partial_x g(x_0, y_0) = 32$; $\partial_y g(x_0,y_0) = -6$
Et l'eqn du plan tgt au graphe de g au pt $(2,3)$ s'écrit :

$$-(x-2) \cdot 32 + (y-3) \cdot (+6) + z - \underbrace{g(2,3)}_{=7} = 0$$

soit l'eqn de plan (dt linéaire ou affine) :

$$z = 32x - 6y - 39$$

Exo. Plan tangent parallèle à ~~un~~ autre plan

Surface considérée : $\underbrace{z - 4x^2 - y^2}_{= f(x,y,z)} = 0$

c'est une paraboloïde.

L'eqn de son plan tgt en un pt $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ s'écrit :

$$-8x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$\Leftrightarrow \underbrace{(-8x_0)}_{\substack{= a_0 \\ \text{donné}}} x + \underbrace{(-2y_0)}_{\substack{= b_0 \\ \text{donné}}} y + z = c_0 \quad : (\mathcal{E})$

avec $c_0 = -8x_0^2 - 2y_0^2 + z_0$
c_0 donné.

Pour que cette eqn de plan $(\mathcal{E})$ soit parallèle au plan d'eqn : $x + 2y + z = 6$

Il est nécessaire et suffisant que leurs vecteurs directeurs soient égaux cad :

$$(a_0, b_0) = (1, 2)$$

Soit : $\underline{x_0 = \frac{-1}{8}}$ et $\underline{y_0 = -1}$.

Ce qui correspond au pt de la surface suivant : $x_0 = -1/8$; $y_0 = -1$ et $z_0 = \frac{17}{16}$