

Formation continue INSA. Cycle préparatoire.
Mathématiques. Analyse #2.

Feuille TD #2
Fonctions de plusieurs variables.
Extrema

Exercice 1 Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x, y) = (x^2 + 2x + 2) \cosh(x + y + 3)$$

admet un unique minimum local sur \mathbb{R}^2 . Ce minimum local est-il global ?

Exercice 2 On note $B(0, r)$ la boule ouverte de \mathbb{R}^3 de rayon $r > 0$ et de centre $(0, 0)$. On considère la fonction $f : B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3z - 3y$$

Déterminer les extrema de $f(x, y, z)$, s'ils existent, et préciser leur nature.

Exercice 3 Soit f la fonction définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par :

$$f(x, y) = mx^2 - x^2y + \frac{1}{2}y^2,$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné.

1. Justifier que la fonction f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ,
2. Calculer son gradient et sa hessienne en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 .
3. Supposons $m \neq 0$. Déterminer, en fonction du signe de m , les éventuels extrema locaux de f . Préciser s'ils sont locaux ou globaux.
4. Que peut-on dire dans le cas $m = 0$?