Exo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = mx^2 - x^2y + \frac{1}{2}y^2 \quad , \quad m \in \mathbb{R}$$

1. f est la somme et le produit de monômes en x et y ; f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. $\partial_x f(x,y) = 2mx - 2xy$

$\partial_y f(x,y) = -x^2 + y$

$\partial^2_{xx} f(x,y) = 2m - \underline{2y}$; $\partial^2_{yy} f(x,y) = 1$

$\partial^2_{xy} f(x,y) = -2x$

On a donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(m-y) \\ -x^2+y \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(m-\underline{y}) & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\underline{m \neq 0}$. Déterminons les pt critiques de f.

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = m \\ y = x^2 \end{cases}$$

- Cas $x=0$. On a nécessairement $y=0$ car $m\neq 0$

Pt critique : $P_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

- Cas $y=m$ $(m\neq 0)$. Alors : $x=\pm\sqrt{m}$ si $m>0$

et $x^2=y$ n'admet pas de sol° pour $m<0$.

Donc : <u>pour $m>0$</u>, f admet 2 pts critiques <u>supplémentaires</u> : $P_1\begin{pmatrix}-\sqrt{m}\\m\end{pmatrix}$; $P_2\begin{pmatrix}+\sqrt{m}\\m\end{pmatrix}$

Calculons les Hessiennes aux pts critiques.

$$H_f(P_0)=\begin{pmatrix}2m & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$H_f(P_1)=\begin{pmatrix}0 & +2\sqrt{m}\\+2\sqrt{m} & 1\end{pmatrix} \qquad H_f(P_2)=\begin{pmatrix}0 & -2\sqrt{m}\\-2\sqrt{m} & 1\end{pmatrix}$$

cas $m>0$ $\qquad$ cas $m>0$

<u>Pt P_0</u> On a :

$\det H_f(P_0) = 2m$; avec $m \neq 0$ par hypothèse

Cas $m<0$. $H_f(P_0)$ a ses 2 v.p. λ_1, λ_2 de signe différent et donc P_0 est un pt selle et non pas un extremum local.

Cas $m>0$. $\lambda_1>0, \lambda_2>0$ car $tr(H_f(P_0))>0$
Donc P_0 est un min local strict.

<u>Pt P_1</u> <u>$m>0$</u>

$\det(H_f(P_1)) = -4m < 0$

Donc P_1 est un pt selle.

<u>Pt P_2</u> <u>$m>0$</u>

$\det(H_f(P_2)) = -4m < 0$

Donc P_2 est un <u>point selle</u>.

En résumé, pour $m>0$, f admet 1 min. local stricte qui est P_0

- P_0 est-il un min. global ?

Prenons $y = 2m > 0$.

Alors : $g(x) = f(x, 2m) = -m x^2 + 2m^2 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$

donc P_0 ne peut pas être un min. global.

- Pour simple information, calculons $f(P_0)$.

$f(P_0) = 0$

4) Cas $m = 0$

$$f(x,y) = -x^2 y + \frac{1}{2} y^2.$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2xy \\ -x^2+y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x=0 \text{ ou } y=0 \\ y = x^2. \end{cases}$$

unique pt critique : $P_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec $H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de $H_f(P_0)$ st dc : $\{0, +1\}$.

P_0 n'est dc pas un min. local strict.

(mais est potentiellement un min. local non strict; on ne peut l'affirmer).