

Exo 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 .

a) Soit $g(x, y) = f(x+y)$. On a: $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

On a: $g(x, y) = f \circ \varphi(x, y)$ avec $\varphi(x, y) = x+y$.

φ de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

Donc g est de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

b) On a (dérivation de fonctions composées):

$$\partial_x g(x, y) = f'(x+y) \cdot 1 \leftarrow \frac{\partial(x+y)}{\partial x}$$

$$\partial_y g(x, y) = f'(x+y) \cdot 1 \leftarrow \frac{\partial(x+y)}{\partial y}$$

Soit $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x g(x, y) \\ \partial_y g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x+y) \\ f'(x+y) \end{pmatrix}$.

b) On a: $h(x, y) = f \circ \varphi(x, y) = f(x^2 + y^2)$

avec $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$

φ de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

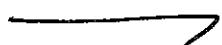
Donc h de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

$$\text{On a: } \partial_x h(x, y) = f'(x^2 + y^2) \cdot 2x = 2x f'(x^2 + y^2).$$

$$\partial_y h(x, y) = 2y f'(x^2 + y^2)$$

c) Avec les \hat{u} arguments que précédemment,
 on montre que k de classe C^1 de \mathbb{R}^2 ds \mathbb{R} .²

Et : $\begin{cases} \partial_x k(x,y) = y f'(xy) \\ \partial_y k(x,y) = x f'(xy) \end{cases}$



Exo 2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = (\ln(x), ex-y); g(u,v) = 3u - \frac{1}{v}.$$

$$F(x,y) = g \circ f(x,y).$$

- 1- f est de classe C^1 sur $\Omega_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.
 g est de classe C^1 sur $\Omega_g = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; v \neq 0\}$.

On a : $F(x,y) = g(\ln x, ex-y)$
 $= 3 \ln x - \frac{1}{ex-y}.$

F est de classe C^1 sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq ex-f\}$.

2/1000

2- On a : $(u,v) \in \Omega_g$,

$$\partial_u g(u,v) = 3; \quad \partial_v g(u,v) = \frac{1}{v^2}.$$

2- On a:

$$\circ \partial_x F(x, y) = \partial_u g(\ln x, \ln y) \cdot \frac{1}{x}$$

$$+ \partial_v g(\ln x, \ln y) \cdot 2$$

$$= \frac{3}{x} + \frac{2}{(\ln x)^e} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

$$\circ \partial_y F(x, y) = \partial_u g(\ln x, \ln y) \cdot 0$$

$$+ \partial_v g(\ln x, \ln y) \cdot (-1)$$

$$= \frac{-1}{(\ln y)^e} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

D'où l'expres^on de $\nabla f(x, y) = (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y))^T$.

