Exo 1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Soit $g(x,y) = f(x+y)$. On a : $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

On a : $g(x,y) = f \circ \varphi(x,y)$ avec $\varphi(x,y) = x+y$.

φ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}$

Donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

- On a (dérivation de fcts composées) :

$$\partial_x g(x,y) = f'(x+y) \cdot 1 \leftarrow \frac{\partial(x+y)}{\partial x}$$

$$\partial_y g(x,y) = f'(x+y) \cdot 1 \leftarrow \frac{\partial(x+y)}{\partial y}$$

Soit $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} f'(x+y) \\ f'(x+y) \end{pmatrix}$.

b) On a : $h(x,y) = f \circ \varphi(x,y) = f(x^2+y^2)$

avec $\varphi(x,y) = x^2+y^2$

φ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Donc h de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On a : $\partial_x h(x,y) = f'(x^2+y^2) \cdot 2x = 2x\, f'(x^2+y^2)$.

$\partial_y h(x,y) = 2y\, f'(x^2+y^2)$

c) Avec les û arguments que précédemment, on montre que k de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}$.

Et : $\begin{cases} \partial_x k(x,y) = y f'(xy) \\ \partial_y k(x,y) = x f'(xy) \end{cases}$

Exo 2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = (\ln(x), 2x - y)$; $g(u,v) = 3u - \frac{1}{v}$.

$F(x,y) = g \circ f(x,y)$.

1- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0\}$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega_g = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 ; v \neq 0\}$

On a : $F(x,y) = g(\ln x, 2x - y)$

$= 3 \ln x - \dfrac{1}{2x - y}$.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \quad y \neq 2x\}$.

2- On a : $\forall (u,v) \in \Omega_g$,

$\partial_u g(u,v) = 3$; $\partial_v g(u,v) = \frac{1}{v^2}$.

2- On a :

- $\partial_x F(x,y) = \partial_u g(\ln x, 2x-y) \cdot \frac{1}{x}$

$+ \partial_v g(\ln x, 2x-y) \cdot 2$

$= \frac{3}{x} + \frac{2}{(2x-y)^2} \quad \forall (x,y) \in \Omega.$

- $\partial_y F(x,y) = \partial_u g(\ln x, 2x-y) \cdot 0$

$+ \partial_v g(\ln x, 2x-y) \cdot (-1)$

$= \frac{-1}{(2x-y)^2} \quad \forall (x,y) \in \Omega.$

D'où l'expression de $\nabla f(x,y) = (\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y))^T$.

$\longrightarrow$