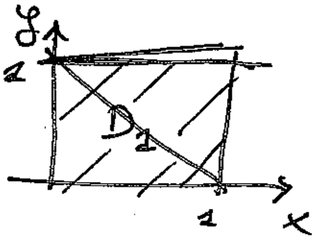
Exo : Intégrales multiples à bornes fixes



1) $I=\iint_{D_1} \underbrace{y e^{xy}}_{=f(x,y)} \, dx\, dy$

f est continue sur D_1.

Th. Fubini.

$$I = \int_0^{1} \underbrace{\int_0^1 y e^{xy} \, dx}_{[e^{xy}]_0^1 = e^y - 1} \, dy = \int_0^1 (e^y - 1)\, dy$$

$$= [e^y - y]_0^1$$

$$= e - 1 - 1 + 0 = \underline{e - 2}$$

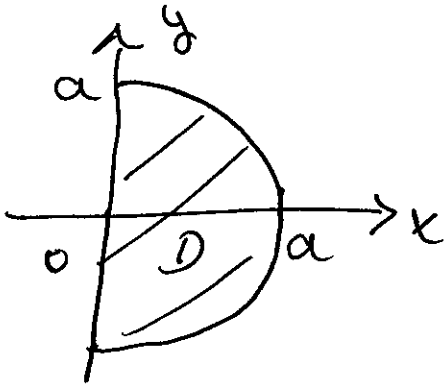
NB. Si la borne entourée avait dépendu de x

nous aurions dû intervertir l'ordre d'intégrat°.

cf prochain exo.

2) $I = \iint_D 2x\,(2x^2+y^2)\,dx\,dy$

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,;\, x\geq 0 \quad x^2+y^2\leq a^2\}$.



Chgt de var. polaires. $x=\rho\cos\theta$
$y=\rho\sin\theta$

$D = \{(\rho,\theta) \quad 0\leq\rho\leq a \,; \quad \leq\theta\leq +\pi/2\}$

$$I = \int_0^a \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2\rho\cos\theta\,(2\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)\cdot \underline{\rho}\, d\theta\, d\rho$$

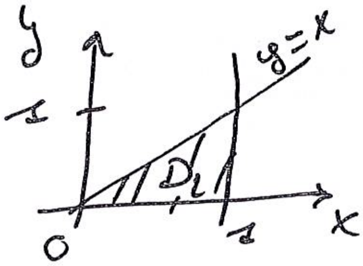
⚠ Jacobien

$$\Rightarrow I = \int_0^a \rho^4 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (4\cos^3\theta + 2\cos\theta\sin^2\theta)\, d\theta}_{=J}\, d\rho$$

$=$ etc

Int. dble à borne variable

$$I = \iint_{D_2} \underbrace{x^2 e^{xy}}_{= f(x,y)} \, dx\, dy \; ; \; D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; \begin{array}{l} y - x \le 0 \\ x \le 1 \\ y \ge 0 \end{array} \right\}$$



Q° : comment formuler cette intégrale double ?

$$\iint_{D_2} f(x,y)\, dx\,dy$$

?

Réponse : Il nous faut exprimer D_2 avec x variant entre 2 bornes fixes et intégrer par rapport à y (ou inversement en terme de x, y)

. L'ensemble D_2 peut se reformuler ainsi :

$$0 \le y \le x \text{ et } x \le 1$$

(soit donc $0 \le x \le 1$)

On peut alors écrire :

$$I = \int_0^{x} \left(\int_0^1 f(x,y)\, \boxed{dx} \right) dy \leftarrow \boxed{\text{Calcul bloqué}}$$

Dépend de x ! — borne fixe ok

Mais on a aussi (on peut échanger les $\int$).

$$I = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{x} \varphi(x,y)\, dy\right)}_{} dx$$

ok.

$$= \int_0^1 x \underbrace{\left(\int_0^x e^{xy}\, dy\right)}_{= [e^{xy}]_0^x = e^{x^2} - 1} dx$$

$$= \int_0^1$$

$$= \int_0^1 x(e^{x^2} - 1)\, dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} e - 1$$

Rem. on peut égal^t exprimer D_2 ainsi :

$y \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.

D'où : $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 \varphi(x,y)\, dx\right) dy$

= etc