Chapitre 2

Équations différentielles linéaires du second ordre

2.1 Définitions et vocabulaire

On appelle équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre toute équation de la forme :

$$(E) \qquad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$$

où y est une fonction réelle inconnue, et a, b, c et f sont des fonctions réelles connues.

Les fonctions a, b et c sont appelées **coefficients** de l'EDO et la fonction f **second membre** de l'EDO.

Définition 2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

- *les fonctions a, b, c et f sont continues sur I,*
- *pour tout $x \in I$, $a(x) \neq 0$.*

Sous ces conditions, on appelle ***solution de*** *(E) sur I toute fonction y de classe C^2 sur I et vérifiant (E) en tout point x de I.*

On note à nouveau $\mathcal{H}$ les hypothèses précédentes.

Vocabulaire :

- L'équation (E) est dite **homogène** si la fonction f est identiquement nulle : $f \equiv 0$.
- (E) est dite à **coefficients constants** si les fonctions a, b et c sont constantes.

2.2 Résolution des EDO linéaires du second ordre

2.2.1 Existence de solutions

Proposition 2.1 *Si les hypothèses $\mathcal{H}$ sont vérifiées, alors l'équation (E) possède une infinité de solutions.*

Définition 2.2 *On étend la notion de condition initiale (CI) à toute condition du type $y'(t_1) = \beta$ où $t_1 \in I$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Un problème de Cauchy associée à une EDO linéaire d'ordre deux nécessite l'adjonction de deux conditions initiales :*

$$(P) \qquad \begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)\,, \\ y(t_0) = \alpha\,, y'(t_1) = \beta\,. \end{cases}$$

Le résultat suivant nous assure que le problème précédent possède une solution unique.

Théorème 2.1 *Si les hypothèses $\mathcal{H}$ sont vérifiées, alors le problème de Cauchy (P) possède une unique solution sur I.*

A retenir : Sans condition initiale, l'EDO (E) possède toujours une infinité de solutions. Avec deux conditions initiales, il n'existe qu'une seule solution.

Comme pour l'ordre un, le résultat suivant nous donne une méthodologie de calcul des solutions d'une EDOL du second ordre.

Théorème 2.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) une EDOL du second ordre telles que les hypothèses $\mathcal{H}$ sont vérifiées. La solution générale de (E) s'écrit alors :*

$$y(x) = y_h(x) + y_0(x)$$

où :

- *y_h est solution de l'équation homogène associée à (E) et notée (E_h) :*

$$(E_h) \qquad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0\,.$$

- *y_0 est une solution particulière de (E).*

Pour résoudre une EDOL du second ordre, on procédera donc, comme pour l'ordre un, en deux étapes :

1. **calcul des solutions de l'équation homogène (E_h),**

2. **recherche d'une solution particulière de l'équation complète (E).**

2.2.2 Résolution des EDOL homogènes du second ordre

On s'intéresse dans ce paragraphe à la résolution des EDO linéaires homogènes de la forme :

$$(E_h) \qquad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0.$$

Cas général

Contrairement aux EDO linéaires du premier ordre, on n'a pas d'expression explicite des solutions lorsque les coefficients sont non constants. Commençons par donner la structure des solutions d'une EDO linéaire homogène du second ordre.

Proposition 2.2 *Soit I un intervalle où les fonctions a, b et c sont définies et continues et tel que $a(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$. Les solutions de l'équation homogène (E_h) sont de la forme :*

$$y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x),$$

où y_1, y_2 sont deux solutions ***linéairement indépendantes*** *(i.e. $y_1(x)/y_2(x)$ n'est pas une constante) de (E_h), et λ et μ sont des constantes réelles arbitraires.*
Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E_h) forme un espace vectoriel de dimension 2.

D'après la proposition précédente, il suffit donc de connaître deux solutions linéairement indépendantes de (E_h) pour les connaître toutes.

En réalité, on a même mieux : il suffit de connaître une solution de l'équation homogène pour pouvoir en construire une deuxième, linéairement indépendante de la première, et ainsi les obtenir toutes.

Méthode de réduction d'ordre. C'est une variante de la méthode de la variation de la constante. Le principe est le suivant :

Étape 1. "Deviner" une solution y_1 de l'équation (E_h) : regarder la forme de l'équation, essayer par exemple des polynômes : x, x^2, e^x (si $a(x) + b(x) + c(x) = 0$, $y(x) = e^x$ est solution), ou toute autre fonction simple.

Étape 2. On cherche une solution y_2 de (E_h) à l'aide de la méthode de la variation de la constante, autrement dit sous la forme : $y_2(x) = C(x)y_1(x)$ avec C fonction non constante.

Étape 3. La solution générale de (E_h) s'écrit alors : $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $t^2y'' + ty' - y = 0$,

(b) $tx'' - 2(t-1)x' + (t-2)x = 0$, $t > 0$,

Cas particulier des EDO linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

Considérons maintenant une EDO linéaire homogène du second ordre à coefficients constants :

$$(E_c) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

On veut utiliser la méthode de réduction d'ordre pour résoudre cette équation. A l'étape 1, on se demande si l'équation (E_c) admet des solutions de la forme : $y(x) = e^{rx}$, où $r \in \mathbb{C}$. On obtient alors :

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = re^{rx} \qquad y''(x) = r^2 e^{rx}.$$

En réinjectant dans l'EDO (E_c), on obtient : $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ pour tout x, soit :

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0.}$$

appelée **équation caractéristique associée à** (E_c).

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique et r_1 et r_2 les racines (réelles ou complexes, distinctes ou confondues) de l'équation caractéristique.

Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions $r_1 \neq r_2$ réelles. Donc $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (E_c) d'où :

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \text{ avec } C_1,\ C_2 \text{ deux constantes réelles arbitraires.}}$$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$. Comme précédemment on a donc :

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}, \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{C} \text{ qui sont les } \textbf{solutions complexes} \text{ de } (E_h),}$$

ou bien si on veut les solutions réelles de (E_c) :

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right), \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}, \text{ qui sont les } \textbf{solutions réelles} \text{ de } (E_h)}$$

Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une unique solution $r = -\frac{b}{2a}$ (racine double). On a donc $y_1(x) = e^{rx}$ solution de l'EDO homogène (E_c). Par la méthode de réduction d'ordre, on trouve une deuxième solution : $y_2(x) = xe^{rx}$ linéairement indépendante de la première et la solution générale de (E_c) s'écrit alors :

$$\boxed{y(x) = (A + Bx)e^{rx}, \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes réelles arbitraires.}}$$

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $2y'' + 3y' + y = 0$ (c) $y'' + 2y' + y = 0$,

(b) $5y'' + 2y' + y = 0$

2.2.3 Recherche d'une solution particulière

On s'intéresse à nouveau à l'EDO complète :

$$(E) \qquad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$$

dont on cherche une solution particulière. On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes.

Cas d'une EDO à coefficients constants

- Si le second membre est de la forme $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ alors on peut chercher une solution sous la forme : $y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$.

- Si le second membre est de la forme $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$ avec P_n polynôme de degré n :
  <u>1^{er} **cas**</u> **:** si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ i.e. $\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$, on cherche une solution particulière sous la forme :
  $$y_0(x) = e^{\lambda x} Q_n(x) \quad \text{où } Q_n \text{ est un polynôme de degré } n.$$
  <u>2^{eme} **cas**</u> **:** si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et $2a\lambda + b \neq 0$ i.e. si $\lambda = r_1$ ou $\lambda = r_2$ avec $r_1 \neq r_2$, on cherche une solution particulière sous la forme :
  $$y_0(x) = e^{\lambda x} x Q_n(x) \quad \text{où } Q_n \text{ est un polynôme de degré } n.$$
  <u>3^{eme} **cas**</u> **:** si $\lambda = r_1 = r_2$, on cherche une solution particulière sous la forme :
  $$y_0(x) = e^{\lambda x} x^2 Q_n(x) \quad \text{où } Q_n \text{ est un polynôme de degré } n.$$

Cas général - Méthode de variation des constantes

Le principe est le suivant : on a trouvé une solution de l'équation homogène de la forme $y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$. On va chercher une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

On va être amené à chercher des fonctions A et B vérifiant le système suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} y_1(x)A'(x) + y_2(x)B'(x) = 0 \\ y_1'(x)A'(x) + y_2'(x)B'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}. \end{cases}$$

Ce système est un système linéaire en $(A'(x), B'(x))$, de déterminant :

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

appelé <u>Wronskien</u> de y_1 et y_2. Le système (S) a-t-il des solutions ? Oui car son déterminant $W(x)$ est non nul :

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = y_1(x)^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(x) \neq 0,$$

puisque y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $5y'' + 2y' + y = 1$,

(b) $y'' + y' - 2y = 2x$, avec : $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(c) $2y'' + 3y' + y = 2\cos(x)$

(d) $tx'' - 2(t-1)x' + (t-2)x = \dfrac{e^t}{t}$, $t > 0$,