Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, i.e. des systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1 à coefficients a_{ij} constants de la forme :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} x_1'(t) & = & a_{11}\, x_1(t) + \cdots + a_{1n}\, x_n(t) + f_1(t), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}\, x_1(t) + \cdots + a_{nn}\, x_n(t) + f_n(t). \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, le système (S) s'écrit :

$$(S) \qquad \dot{X}(t) = AX(t) + F(t)$$

en posant $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée de taille n dont le coefficient de la $i$ème ligne et $j$ème colonne est a_{ij}, et :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

De façon tout à fait analogue à ce qui a été vu au chapitre 1 pour la résolution des EDO linéaires du premier ordre, on aimerait pouvoir écrire e^{tA}. Pour cela, il nous faut définir l'exponentielle de matrice.

3.1 Exponentielle de matrice

Définition 3.1 *Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n. On définit l'exponentielle de la matrice M par :*

$$e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} = 1 + M + \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{3!} + \dots.$$

L'exponentielle d'une matrice diagonalisable se calcule facilement. Si M est diagonalisable, alors il existe une matrice P inversible telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

où les λ_i sont les valeurs propres de M. On obtient alors :

$$e^M = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dans le cas où M est une matrice non diagonalisable, on peut toujours la calculer explicitement, mais cela nécessite des outils hors programme (réduction de Jordan).

L'exponentielle de matrice possède les propriétés suivantes :

Lemme 3.1 (Propriétés de l'exponentielle de matrice)

- $e^0 = I$.
- *Si les matrices A et B commutent ($AB = BA$), alors :*

$$e^{A+B} = e^A\, e^B = e^B\, e^A.$$

- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- $e^A\, A = A\, e^A$.
- $\dfrac{d}{dt} e^{At} = A\, e^{At}$.

Exercice 6. Calculer les exponentielles des matrices suivantes :

- $A_1 = aI_n$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.
- $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Résolution du système : $X'(t) = AX(t) + F(t)$

Les solutions du système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$(S)\ X'(t) = AX(t) + F(t)$$

s'écrivent :

$$X(t) = X_h(t) + X_0(t),$$

où :
- X_h est solution du système homogène : $X'(t) = AX(t)$.
- X_0 est <u>une</u> solution particulière du système (S).

3.2.1 Solution du système homogène $X'(t) = AX(t)$

Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$, la solution du système : $\dot{X}(t) = AX(t)$ s'écrit :

$$X(t) = e^{At} X_0,$$

où $X_0 = X(0) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de constantes réelles arbitraires.

Remarque 3.1 (Systèmes à coefficients non constants) *Il est important de noter que si la matrice A dépend de t, alors en général $\frac{d}{dt} e^{A(t)} \neq A'(t)\, e^{A(t)}$. Les solutions de systèmes non autonomes $\dot{X}(t) = A(t)\, X(t)$ ne peuvent d'ailleurs pas se calculer explicitement en général, contrairement au cas des systèmes à coefficients constants.*

Le résultat précédent montre que les solutions du système homogène $X'(t) = AX(t)$ forment un espace vectoriel de dimension n (n degrés de liberté). Il suffit donc de trouver n solutions linéairement indépendantes pour toutes les avoir. On a en particulier :

Si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, la solution générale de $X'(t) = AX(t)$ est de la forme :

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} V_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{\lambda_i t}\, V_i$$

où :
- λ_i sont les valeurs propres de A,
- V_i des vecteurs propres associés ($(V_1, \ldots, V_n)$ forme une base de vecteurs propres),
- c_i des constantes arbitraires réelles quelconques.

En effet, si A est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres $V_1, \ldots, V_n$ associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A telle que :

$$A = PDP^{-1},$$

où D est une matrice diagonale avec les valeurs propres λ_i de A sur sa diagonale et $P = [V_1|\ldots|V_n]$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres. Le système $\dot{X}(t) = AX(t)$ s'écrit alors :

$$\dot{X}(t) = PDP^{-1}X(t), \qquad \text{soit} \qquad P^{-1}\dot{X}(t) = DP^{-1}X(t).$$

En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on est amené à résoudre le système :

$$Y'(t) = DY(t),$$

dont la solution est

$$Y(t) = e^{Dt}C\,,$$

soit :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

avec $C = (c_i)_{i=1,\ldots,n}$ vecteur des constantes arbitraires. D'où en revenant à $X(t) = PY(t)$:

$$\begin{aligned} X(t) &= [V_1|\ldots|V_n]Y(t) = [V_1|\ldots|V_n] \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} V_n \end{aligned}$$

Exercice 7. Ecrire les systèmes différentiels suivants sous forme matricielle puis les résoudre :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) &=& x_1 + 4x_2 \\ x_2'(t) &=& 2x_1 + 3x_2 \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) &=& 2x_1 - 3x_2 \\ x_2'(t) &=& x_1 - 2x_2 \end{array} \right.$$

3.2.2 Recherche d'une solution particulière

Revenons au système avec second membre :

$$X'(t) = AX(t) + F(t)$$

On commence toujours par regarder s'il n'existe pas une solution évidente. Sinon dans le cas général, on utilise une fois encore la méthode de variation de la constante.
On cherche une solution du système (S) sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} X(t) & = & e^{At}X_0(t) \\ \dot{X}(t) & = & Ae^{At}X_0(t) + e^{At}X_0'(t) \end{array}$$

On réinjecte dans le système différentiel (S) ce qui donne :

$$X_0'(t) = e^{-At}F(t)$$

dont on cherche une primitive pour enfin obtenir une solution particulière $X(t) = e^{At}X_0(t)$.

Exercice 8. Chercher les solutions des systèmes différentiels suivants :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 2x_1 - 3x_2 + \cos t \\ x_2'(t) & = & x_1 - 2x_2 + \sin t \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 1 \\ y' & = & x + 3y - z - 2 \\ z' & = & x + 2y \end{array} \right.$$

3.3 Résolution des EDO linéaires d'ordre quelconque à coefficients constants

Finissons ce chapitre par une utilisation des systèmes différentiels pour calculer les solutions d'une EDO linéaire d'ordre quelconque à coefficients constants.

Considérons une EDO d'ordre n à coefficients constants de la forme :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t),$$

en supposant : $a_n \neq 0$. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la résolution d'une EDO linéaire à coefficients constants d'ordre quelconque se ramène à la résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants et d'ordre 1.

En posant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1(t) & = & y(t) \\ x_2(t) & = & y'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n(t) & = & y^{(n-1)}(t) \end{array} \right. ,$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x_1'(t) & = & y'(t) \\ x_2'(t) & = & y''(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & y^{(n)}(t) = \dfrac{1}{a_n} f(t) - \dfrac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) - \cdots - \dfrac{a_1}{a_n} y'(t) - \dfrac{a_0}{a_n} y(t) \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, le système ci-dessus s'écrit également :

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

en posant :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} \cdots -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{array} \right), \qquad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

On résout alors le système $X'(t) = AX(t) + F(t)$ pour obtenir $X(t)$. La première composante de $X(t)$ nous donne alors la solution $y(t)$ de l'EDO de départ. Les autres composantes de $X(t)$ nous donne les dérivées $y'(t), y''(t), ..., y^{(n-1)}(t)$, elles ne présentent donc pas d'intérêt particulier.

Prenons l'exemple suivant, où on cherche à résoudre l'EDO :

$$y'''(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 0\,.$$

On posant :

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix},$$

on obtient que X est solution du système différentiel suivant :

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il reste alors à résoudre comme précédemment ce système afin d'obtenir $X(t)$, et donc la solution $y(t)$ de l'EDO de départ en lisant la première composante de $X(t)$.