# Correction de la feuille d'exercices n°1

**Exercice 1.** **Résoudre (1)** $y' + 3y = 3x^2 + 11x$**.** On résout l'EDO (1) sur $\mathbb{R}$.

— Solution de l'équation homogène :

$$y_h(x) = \lambda e^{-3x}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $\lambda$ est une constante réelle arbitraire.

— L'EDO (1) est de la forme : $y' + 3y = P(x)$ où $P$ est un polynôme de degré 2. On cherche alors une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré au plus 2 :

$$y_0(x) = ax^2 + bx + c.$$

En réinjectant dans l'EDO, on obtient alors :

$$3ax^2 + (2a+3b)x + b + 3c = 3x^2 + 11x, \qquad \text{soit :} \qquad 3a = 3,\ 2a+3b = 11,\ b+3c = 0,$$
$$\text{i.e. :} \qquad a = 1,\ b = 3,\ c = -1$$

D'où : $y_0(x) = x^2 + 3x - 1$.

Solution générale de (1) :

$$y(x) = \lambda e^{-3x} + x^2 + 3x - 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $\lambda$ est une constante réelle arbitraire.

*Remarque: si on ne "voit" pas sous quelle forme chercher une solution particulière, on peut toujours utiliser la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (1) sous la forme :* $y_0(x) = \lambda(x)e^{-3x}$*. En réinjectant* $y_0$ *et* $y_0'$ *dans (1), on obtient :* $\lambda'(x) = (3x^2 + 11x)e^{3x}$*. Or :*

$$\begin{aligned}
\int_0^x te^{3t}dt &= \left[t\frac{e^{3t}}{3}\right]_0^x - \frac{1}{3}\int_0^x e^{3t}dt = (\frac{1}{3}x - \frac{1}{9})e^{3x} + \frac{1}{9}\\
\int_0^x t^2e^{3t}dt &= \left[t^2\frac{e^{3t}}{3}\right]_0^x - \frac{2}{3}\int_0^x te^{3t}dt = \frac{1}{3}(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9})e^{3x} - \frac{2}{27}
\end{aligned}$$

*ce qui donne après calculs :* $\lambda(t) = e^{3x}(x^2 + 3x - 1) + cte$*. On prend par exemple :* $cte = 0$ *et une solution particulière de (1) est donc :*

$$y_0(x) = x^2 + 3x - 1.$$

**Résoudre (2) $y' + 3y = \sin x$.** On résout l'EDO (2) sur $\mathbb{R}$.

— Solution de l'équation homogène :

$$y_h(x) = \lambda e^{-3x}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $\lambda$ est une constante réelle arbitraire.

— Recherche d'une solution particulière : l'EDO (2) est de la forme : $y' + 3y = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ avec ici : $a = 0$, $b = 1$ et $\omega = 1$. On cherche alors une solution particulière sous la forme : $y_0(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$, soit ici :

$$y_0(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x).$$

On réinjecte dans l'EDO (2) et on obtient :

$$(3\alpha + \beta)\cos(x) + (-\alpha + 3\beta)\sin(x) = \sin(x),$$

soit : $3\alpha + \beta = 0$ et $-\alpha + 3\beta = 1$, i.e. : $\alpha = -\dfrac{1}{10}$ et $\beta = \dfrac{3}{10}$. D'où :

$$y_0(x) = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$$

solution particulière de (2).

Solution générale de (2) :

$$y(x) = \lambda e^{-3x} - \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $\lambda$ est une constante réelle arbitraire.

*Remarque: Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de (2) sous la forme :* $y_0(x) = \lambda(x)e^{-3x}$. *En réinjectant* $y_0$ *et* $y_0'$ *dans (2), on a alors :*

$$\lambda'(x) = e^{3x}\sin x, \quad \textit{soit par exemple :} \quad \lambda(t) = -\frac{1}{10}e^{3x}\cos x + \frac{3}{10}e^{3x}\sin x.$$

*On retrouve :* $y_0(x) = -\dfrac{1}{10}\cos x + \dfrac{3}{10}\sin x$ *solution particulière de (2).*

**Résoudre (3) $y' + 3y = 2\sin x + 3x^2 + 11x$.** On résout l'EDO (3) sur $\mathbb{R}$.

— Solution de l'équation homogène :

$$y_h(x) = \lambda e^{-3x}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $\lambda$ est une constante réelle arbitraire.

— Recherche d'une solution particulière de (3) : on a vu que $y_{0,1}(x) = x^2 + 3x - 1$ est une solution particulière de $y' + 3y = 3x^2 + 11x$ et que $y_{0,2}(x) = -\dfrac{1}{10}\cos x + \dfrac{3}{10}\sin x$ est une solution particulière de $y' + 3y = \sin x$. Par conséquent : $y_0 = y_{0,1} + 2y_{0,2}$ est une solution particulière de (3).

Solution générale de (3) :

$$y(x) = \lambda e^{-3x} + x^2 + 3x - 1 - \frac{1}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $\lambda$ est une constante réelle arbitraire.

**Résoudre (4)** $y' - y = xe^x$**.** On résout l'EDO (4) sur $\mathbb{R}$.

— Solution de l'équation homogène :

$$y_h(x) = \lambda e^x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $\lambda$ est une constante réelle arbitraire.

— Recherche d'une solution particulière $y_0$ de (4) : l'équation est de la forme

$$y' + ay = P_n(x)e^{\alpha x}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_n$ est un polynôme de degré $n$, admet une solution particulière de la forme : $Q(x)e^{\alpha x}$ où $Q$ est un polynôme de degré au plus $n+1$. Dans le cas présent, on a : $\alpha = 1$ et $n = 1$. On cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

On réinjecte dans (4) et on obtient après calculs :

$$(2ax + b)e^x = xe^x, \quad \text{soit :} \quad 2a = 1,\ b = 0.$$

Une solution particulière de (4) est donc : $y_0(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x$.

Solution générale de (4) :

$$y(x) = \lambda e^x + \frac{x^2}{2}e^x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $\lambda$ est une constante réelle arbitraire.

*Remarque: On peut toujours utiliser la méthode de variation de la constante pour calculer une solution particulière de (4) : on cherche $y_0$ sous la forme : $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, soit : $\lambda'(x) = x$ et $\lambda(x) = \dfrac{x^2}{2}$ par exemple. Donc une solution particulière de (4) est : $y_0(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x$.*

**Résoudre (5)** $xy' + y = x^2 + e^x$**.**

On résout l'EDO (5) sur $\mathbb{R}^*$.

— Solution de l'équation homogène : $\dfrac{-b(x)}{a(x)} = -\dfrac{1}{x}$ donc $u(x) = -\ln(x) = \ln(\dfrac{1}{x})$.

On obtient ainsi :

$$y_h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x} & \text{si } x > 0\,, \\ \dfrac{\lambda_2}{x} & \text{si } x < 0\,, \end{cases}$$

où $\lambda_1$, $\lambda_2$ sont des constantes réelles arbitraires.

— Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière $y_0$ sous la forme : $y_0(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x}$. En réinjectant dans (5), on obtient : $\lambda'(x) = x^2 + e^x$, dont une primitive est : $\lambda(x) = \dfrac{x^3}{3} + e^x$. Donc $y_0(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{e^x}{x}$ est une solution particulière de (5).

Solution générale de (5) sur $\mathbb{R}^\star$ :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{e^x}{x} & \text{si } x > 0\,, \\ \dfrac{\lambda_2}{x} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{e^x}{x} & \text{si } x < 0\,, \end{cases}$$

où $\lambda_1$, $\lambda_2$ sont des constantes réelles arbitraires.

*Remarque: A cause du terme* $\dfrac{e^x}{x}$ *qui "explose" quand* $x$ *tend vers* 0*, il n'existe pas de solution définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

**Résoudre (6)** $(x^2 + 1)y' - xy = 0$**.**

Le coefficient $x^2 + 1$ devant $y'$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, on résout l'EDO (6) sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\frac{-b(x)}{a(x)} = \frac{x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$
$$\Rightarrow \quad y(x) = C\sqrt{x^2+1}$$

Solution générale de (6) :

$$y(x) = C\sqrt{x^2+1}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $C$ est une constante réelle arbitraire.

**Résoudre (7)** $(x^2+3x+2)y' - y = (x+1)^2\cos(x)$**.** On cherche les racines du polynôme $x^2+3x+2$ et on trouve : $-1$ et $-2$. On résout donc l'EDO sur $I = ]-\infty, -2[\, \cup\, ]-2, -1[\, \cup\, ]-1, +\infty[$.

— Solution de l'équation homogène :

$$\frac{-b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$
$$\Rightarrow \quad u(x) = \ln|x+1| - \ln|x+2| \,.$$

On en déduit que :

$$y_h(x) = \begin{cases} \dfrac{C_1(x+1)}{x+2} & \text{si } x < -2\,, \\ \dfrac{C_2(x+1)}{x+2} & \text{si } -2 < x < -1\,, \\ \dfrac{C_3(x+1)}{x+2} & \text{si } x > -1\,, \end{cases}$$

où $C_1, C_2, C_3$ sont des constantes réelles arbitraires.

— Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière $y_0$ sous la forme :

$$y_0(x) = C(x)\frac{x+1}{x+2}.$$

On réinjecte dans (7) : sachant que les termes en $C(x)$ doivent s'annuler entre eux, on n'écrit que les termes en $C'(x)$ soit, en n'oubliant pas que : $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ :

$$\begin{aligned}(x^2+3x+2)\,\frac{x+1}{x+2}\,C'(x) = (x+1)^2\cos(x) \quad &\Rightarrow \quad (x+1)^2C'(x) = (x+1)^2\cos(x) \\ &\Rightarrow \quad C'(x) = \cos(x) \\ &\Rightarrow \quad C(x) = \sin(x) \quad \text{par exemple.}\end{aligned}$$

On en déduit alors que $y_0(x) = \dfrac{x+1}{x+2}\sin(x)$ est une solution particulière de (7).

La solution générale de (7) sur $\mathbb{R} - \{-1,-2\}$ s'écrit donc :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2}(C_1 + \sin x), & \text{si } x < -2\,, \\ \dfrac{x+1}{x+2}(C_2 + \sin x), & \text{si } -2 < x < -1\,, \\ \dfrac{x+1}{x+2}(C_3 + \sin x), & \text{si } x > -1\,, \end{cases}$$

où $C_1, C_2, C_3$ sont des constantes réelles arbitraires.

La question que l'on peut se poser maintenant est : peut-on définir cette solution sur un ensemble plus "grand" que $\mathbb{R}-\{-1,-2\}$ ? Tout d'abord on remarque dans l'expression générale de la solution qu'elle est bien définie en $x=-1$, dérivable et même $C^1$ à condition de choisir : $C_1 = C_2$ (on dit que la solution est *prolongeable de classe* $C^1$ en $x=-1$). On peut donc définir une solution sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2}(C_1 + \sin x), & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x+1}{x+2}(C_3 + \sin x), & \text{si } x > -2 \end{cases}, \text{ avec } C_1, C_3 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}.$$

En revanche lorsque $x$ tend vers $-2$, la solution générale explose (même si on prend $C_1 = C_2 = 0$), donc il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Résoudre (8) $x(x-1)y'(x) + (x-n-1)y(x) = 0$.**

On résout l'EDO (8) sur $I = \mathbb{R} - \{0,1\}$.

$$\frac{-b(x)}{a(x)} = -\frac{x-n-1}{x(x-1)} = \frac{n}{x-1} - \frac{n+1}{x} \qquad \text{(décomposition en éléments simples)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u(x) &= n\ln|x-1| - (n+1)\ln|x| = \ln(|x-1|^n) + \ln\left(\frac{1}{|x|^{n+1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}\right) + cte. \end{aligned}$$

La solution générale sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ est donc :

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \dfrac{(x-1)^n}{x^{n+1}} & \text{si } x < 0\,, \\ C_2 \dfrac{(x-1)^n}{x^{n+1}} & \text{si } 0 < x < 1\,, \\ C_3 \dfrac{(x-1)^n}{x^{n+1}} & \text{si } x > 1\,, \end{cases}$$

où $C_1, C_2, C_3$ sont des constantes réelles arbitraires.

Or on remarque que la solution est prolongeable en une fonction $C^1$ en $x = 1$ à condition que : $C_3 = C_2$. On peut donc définir une solution sur $\mathbb{R}^\star$ :

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \dfrac{(x-1)^n}{x^{n+1}}, & \text{si } x < 0 \\ C_2 \dfrac{(x-1)^n}{x^{n+1}}, & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ arbitraires, } \forall x \in \mathbb{R}^\star.$$

En revanche lorsque $x$ tend vers 0, la solution générale explose, donc il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Exercice 2.** **Résoudre (9)** $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

C'est une EDO linéaire d'ordre 2 à <u>coefficients constants</u> que l'on résout donc sur $\mathbb{R}$.

— Solution de l'équation homogène : $y'' - 2y' + y = 0$. C'est une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants, donc on résout l'équation homogène via l'équation caractéristique associée : $r^2 - 2r + 1 = 0$.
  — Discriminant : $\Delta = 4 - 4 = 0$ (une racine double).
  — Solution de l'équation caractéristique : $r = 1$.

  Les solutions de l'équation homogène s'écrivent donc :

$$y_h(x) = (A + Bx)e^x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

  où $A, B$ sont des constantes réelles arbitraires.

— Recherche d'une solution particulière $y_0$ par la méthode de variation de la constante : on cherche $y_0$ sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} y_0(x) & = & A(x)e^x + xB(x)e^x \\ y_0'(x) & = & A'(x)e^x + xB'(x)e^x + A(x)e^x + B(x)(x+1)e^x \end{array}$$

  On impose alors : $A'(x)e^x + xB'(x)e^x = 0$ pour éviter l'apparition des dérivées secondes de $A$ et $B$ dans $y_0''$ et on réinjecte dans l'EDO (9). Ceci nous donne un système linéaire de deux équations à résoudre en $(A'(x), B'(x))$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^xA'(x) + xe^xB'(x) & = & 0 \\ e^xA'(x) + (x+1)e^xB'(x) & = & 6xe^x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A'(x) + xB'(x) & = & 0 \\ A'(x) + (x+1)B'(x) & = & 6x \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A'(x) & = & -6x^2 \\ B'(x) & = & 6x \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A(x) & = & -2x^3 \\ B(x) & = & 3x^2 \end{array}\right. \quad \text{par exemple.}$$

  Une solution particulière de (9) est donc : $y_0(x) = (-2x^3 + x \times 3x^2)e^x = x^3e^x$.

| |
|---|
| Solution générale de (9) sur $\mathbb{R}$ : $$y(x) = (A + Bx)e^x + x^3e^x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$ où $A, B$ sont des constantes réelles arbitraires. |

**Résoudre (10)** $y'' - 2y' + 2y = 2$**, avec** $y(0) = 0$ **et** $y'(0) = 1$.

C'est une EDO linéaire d'ordre 2 à <u>coefficients constants</u> que l'on résout donc sur $\mathbb{R}$.

— Solution de l'équation homogène : $y'' - 2y' + y = 0$ via l'équation caractéristique associée : $r^2 - 2r + 2 = 0$.
  — Discriminant : $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$ (deux racines complexes).
  — Solutions de l'équation caractéristique : $r = 1 \pm i$.

  Les solutions de l'équation homogène s'écrivent donc :

$$y_h(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

  où $A, B$ sont des constantes réelles arbitraires.

— Solution particulière évidente : $y_0(x) = 1$.
— Solution générale sur $\mathbb{R}$ :

$$y(x) = e^x(A\cos x + B\sin x) + 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $A, B$ sont des constantes réelles arbitraires.
— Conditions initiales : on impose à la solution de vérifier $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, soit :

$$A + 1 = 0 \text{ et } A + B = 1, \qquad \text{soit :} \qquad A = -1 \text{ et } B = 2.$$

La solution de (10) est donc :

$$\boxed{y(x) = e^x(-\cos x + 2\sin x) + 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

**Résoudre (11) $x^2y''(x) - 2y(x) = x^3$.**

On résout l'EDO (11) sur $\mathbb{R}^*$.
— Résolution de l'équation homogène : $x^2y''(x) - 2y(x) = 0$. C'est une EDO linéaire du second ordre à coefficients <u>non constants</u>. On va donc appliquer la méthode de réduction d'ordre :

**Etape 1** On "devine" une solution de l'équation homogène en essayant en premier des polynômes de degré 1 (ça ne marche pas !), puis de degré 2 et là on trouve : $y_1(x) = x^2$ solution de l'équation homogène.

**Etape 2** On cherche une solution $y_2$ de l'équation homogène, linéairement indépendante de $y_1$, sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} y_2(x) &=& x^2C(x) \\ y_2'(x) &=& x^2C'(x) + 2xC(x) \\ y_2''(x) &=& x^2C''(x) + 4xC'(x) + 2C(x), \end{array}$$

puis on réinjecte dans l'équation homogène associée à (11) en se rappelant que normalement tous les termes en $C(x)$ s'annulent entre eux (donc je ne les écris pas - sauf éventuellement pour vérifier mes calculs...). On obtient :

$$x^4C''(x) + 4x^3C'(x) = 0, \qquad \text{soit :} \qquad xC''(x) + 4C'(x) = 0$$

$$\frac{C''(x)}{C'(x)} = -\frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \frac{cte}{x^4}$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = \frac{K}{x^3} = \frac{1}{x^3} \text{ par exemple.}$$

$C$ est bien non constante, donc : $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$ est bien linéairement indépendante de $y_1$ et solution de l'EDO homogène associée à (11).

**Etape 3** La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$y_h(x) = Ax^2 + \frac{B}{x}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^*\,,$$

où $A, B$ sont des constantes réelles arbitraires. Ou si on veut aller plus loin :

$$y_h(x) = \begin{cases} A_1 x^2 + \dfrac{B_1}{x} & \text{si } x < 0\,, \\ A_2 x^2 + \dfrac{B_2}{x} & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$

où $A_1, B_1, A_2, B_2$ sont des constantes réelles arbitraires.

— Recherche de la solution particulière : étant donné que les coefficients de l'EDO ne sont pas constants, la seule méthode a priori disponible est la variation des constantes. Cependant, une autre méthode (non présente dans le cours) est possible ici : on remarque que les coefficients et le second membre de l'EDO sont polynômiaux, et de degré inférieur ou égal à 3. Il y a donc de fortes chances (mais rien de garanti) de pouvoir trouver une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. On cherche donc la solution particulière de (11) sous cette forme :

$$y_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On réinjecte dans l'EDO et on trouve : $a = \dfrac{1}{4}$, $b = c = d = 0$, soit : $y_0(x) = \dfrac{x^3}{4}$.

La solution générale de (11) sur $\mathbb{R}^\star$ s'écrit ainsi :

$$y(x) = \begin{cases} A_1 x^2 + \dfrac{B_1}{x} + \dfrac{x^3}{4} & \text{si } x < 0\,, \\ A_2 x^2 + \dfrac{B_2}{x} + \dfrac{x^3}{4} & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$

où $A_1, B_1, A_2, B_2$ sont des constantes réelles arbitraires.

Peut-on définir une solution sur $\mathbb{R}$ ? Si on fait tendre $x$ vers 0, la solution générale explose à cause du terme en $\frac{1}{x}$ SAUF SI $B_1 = B_2 = 0$ ! On impose donc :

$$B_1 = B_2 = 0 \quad \text{puis} \qquad A_1 = A_2 \text{ (pour avoir continuité, puis classe } C^1\text{).}$$

On a donc cette fois une solution sur $\mathbb{R}$ définie par :

La solution générale de (11) sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$y(x) = Ax^2 + \frac{x^3}{4}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $A$ est une constante réelle arbitraire.

**Résoudre (12) $t^2y''(t) + ty'(t) - y(t) = t^2$.**

On résout sur $\mathbb{R}^*$.

— Résolution de l'équation homogène : $t^2y''(t)+ty'(t)-y(t) = 0$. C'est une EDO linéaire du second ordre à coefficients non constants. On va donc appliquer la méthode de réduction d'ordre :

**Etape 1** On "devine" une solution de l'équation homogène : $y_1(t) = t$ est solution de l'équation homogène.

**Etape 2** On cherche une solution $y_2$ de l'équation homogène, linéairement indépendante de $y_1$, sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} y_2(t) & = & tC(t) \\ y_2'(t) & = & tC'(t) + C(t) \\ y_2''(t) & = & tC''(t) + 2C'(t), \end{array}$$

puis on réinjecte dans l'équation homogène associée à (12). On obtient :

$$t^3C''(t) + 3t^2C'(t) = 0, \qquad \text{soit :} \qquad tC''(x) + 3C'(x) = 0$$

$$\frac{C''(t)}{C'(t)} = -\frac{3}{t} \quad \Rightarrow \quad C'(t) = \frac{cte}{t^3}$$

$$\Rightarrow \quad C(t) = \frac{K}{t^2} = \frac{1}{t^2} \text{ par exemple.}$$

$C$ est bien non constante, donc : $y_2(t) = \dfrac{1}{t}$ est bien linéairement indépendante de $y_1$ et solution de l'EDO homogène associée à (12).

**Etape 3** La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$y_h(t) = At + \frac{B}{t}\,,\ \forall t \neq 0\,,$$

où $A, B$ sont des constantes réelles arbitraires. Ou plus généralement :

$$y_h(t) = \begin{cases} A_1t + \dfrac{B_1}{t} & \text{si } t < 0\,, \\ A_2t + \dfrac{B_2}{t} & \text{si } t > 0\,, \end{cases}$$

où $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires.

— Solution particulière : comme pour l'EDO précédente, la seule méthode a priori disponible est la variation des constantes. Cependant, on remarque ici que les coefficients et le second membre sont tous polynômiaux, et de degré inférieur ou égal à 2. On peut donc tenter de chercher la solution particulière $y_0$ sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $y_0(t) = at^2 + bt + c$. On trouve alors après injection et identification : $y_0(t) = \dfrac{t^2}{3}$.

La solution générale de (12) sur $\mathbb{R}^\star$ s'écrit ainsi :

$$y(t) = \begin{cases} A_1t + \dfrac{B_1}{t} + \dfrac{t^2}{3}, & \text{si } t < 0 \\ A_2t + \dfrac{B_2}{t} + \dfrac{t^2}{3}, & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires.

Peut-on définir une solution sur $\mathbb{R}$ ? par un raisonnement identique à celui de l'EDO précédente, on montre qu'il y a des solutions sur $\mathbb{R}$ et qu'elles sont définies par :

La solution générale de (12) sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$y(t) = At + \frac{t^2}{3}\ ,\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R} \text{ constante arbitraire.}$$

**Exercice 3.** Par intégration par parties, on montre qu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ est :

$$x \mapsto x \ln x - x.$$

**Résoudre** (13) $\qquad y'' - \ln(x)y' - \frac{1}{x}y = 0$**.**

On résout cette EDO sur $\mathbb{R}_+^*$. On remarque que $(y'(x) - \ln(x)y(x))' = y''(x) - \ln(x)y'(x) - \frac{1}{x}y(x)$. Donc l'EDO (13) s'écrit encore :

$$(13b) \qquad y'(x) - \ln(x)y(x) = \lambda_1$$

où $\lambda_1$ est une constante réelle arbitraire. On est donc ramené à résoudre l'EDO (13b) sur $\mathbb{R}_+^*$ :

- Résolution de l'équation homogène : $\dfrac{-b(x)}{a(x)} = \ln x$. Les solutions s'écrivent donc :

$$y(x) = \lambda_2 e^{x \ln x - x} = \lambda_2 x^x e^{-x},$$

  où $\lambda_2$ est une constante réelle arbitraire.
- Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_0(x) = \lambda_2(x)x^x e^{-x}$. En réinjectant dans l'EDO (13b), on obtient :

$$\lambda_2'(x)x^x e^{-x} = \lambda_1 \qquad \text{soit par exemple : } \lambda_2(x) = \lambda_1 \int_a^x t^{-t}e^t dt$$

  où $a$ est un réel quelconque.

Solution générale de (13) et (13b) :

$$y(x) = \lambda_2 x^x e^{-x} + \lambda_1 x^x e^{-x} \int_a^x t^{-t}e^t dt\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,$$

où $\lambda_1, \lambda_2$ sont des constantes réelles arbitraires.

**Exercice 4.** **Trouver toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le problème :**

$$(14) \qquad \begin{cases} y''(t) + \alpha y(t) = 0 \\ y(0) = 0, \ y(1) = 0 \end{cases}$$

**admet une solution $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle.**

Il s'agit d'une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants que l'on résout sur $\mathbb{R}$ via son équation caractéristique : $r^2 + \alpha = 0$.

$\boxed{\text{1er cas : } \alpha < 0.}$ Alors $r = \pm\sqrt{-\alpha}$ et la solution générale de (14) s'écrit :

$$y(x) = Ae^{\sqrt{-\alpha}x} + Be^{-\sqrt{-\alpha}x}.$$

Les conditions initiales imposent alors : $A + B = 0$ et $Ae^{\sqrt{-\alpha}} + Be^{-\sqrt{-\alpha}} = 0$, soit : $A = B = 0$. La seule solution du problème (14) est donc la fonction nulle.

$\boxed{\text{2eme cas : } \alpha = 0.}$ Alors on résout : $y'' = 0$, soit :

$$y(x) = ax + b.$$

Les conditions initiales imposent alors : $b = 0$ et $a = 0$, soit à nouveau : $y \equiv 0$.

$\boxed{\text{3eme cas : } \alpha > 0.}$ Alors $r = \pm i\sqrt{\alpha}$ et la solution générale de l'EDO (14) s'écrit :

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\alpha}x) + B\sin(\sqrt{\alpha}x).$$

Les conditions initiales imposent : $A = 0$ et $\sin(\sqrt{\alpha}) = 0$, d'où : $\alpha = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

En conclusion, le problème (14) avec conditions aux limites admet une solution $y$ non identiquement nulle si et seulement si $\alpha = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. On a alors :

$$y(x) = B\sin(k\pi x),$$

où $B$ est une constante réelle arbitraire.

**Exercice 5.** **Résoudre $x^2y'' + xy' + y = 0$, $x > 0$.**

On résout cette EDO sur $\mathbb{R}$. On cherche des solutions sous la forme : $y(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $x > 0$, où $\alpha \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\ y''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

En réinjectant dans l'EDO, on obtient :

$$\alpha(\alpha-1)x^\alpha + \alpha x^\alpha + x^\alpha = 0, \text{ soit : } \alpha^2 + 1 = 0$$

D'où : $\alpha = \pm i$. Les solutions s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ax^i + Bx^{-i} = Ae^{i\ln x} + Be^{-i\ln x} \\ &= A\cos\ln x + B\cos\ln x + i(A\sin\ln x - B\sin\ln x) \end{aligned}$$

où $A, B \in \mathbb{C}$ sont des constantes arbitraires. Or on cherche des solutions réelles, ce qui implique la condition suivante : $Im\ y(x) = 0$. Posons :

$$A = a + i\alpha \qquad B = b + i\beta.$$

Les solutions s'écrivant :

$$y(x) = [(a+b)\cos\ln x + (\beta-\alpha)\sin\ln x] + i\,[(\alpha+\beta)\cos\ln x + (a-b)\sin\ln x]\,,$$

la condition $Im\ y(x) = 0$ impose : $(\alpha+\beta)\cos\ln x + (a-b)\sin\ln x = 0$, soit : $a = b$ et $\beta = -\alpha$. Autrement dit :

$$A = a + i\alpha = \bar{B}.$$

| |
|---|
| Solution générale réelle : $$y(x) = 2a\cos\ln x + 2\beta\sin\ln x = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x$$ où $C_1, C_2$ sont des constantes réelles arbitraires. |