Correction de la feuille de révision n°2

Exercice 1.

$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& 2x-y-3 \\ y' &=& -2x+3y+1 \end{array}\right.$, système différentiel linéaire homogène à coefficients constants.

On note:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et } F(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système (S_1) s'écrit donc : $X'(t) = AX(t) + F(t)$.

1. **Résolution du système homogène:** $X'(t) = AX(t)$.

- Valeurs propres de A:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 est: $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$.
Donc: $\lambda = 1$ ou $\lambda = 4$.

- Calcul d'une base de vecteurs propres de A dans $\mathbb{R}^2$:
  - Vecteur propre v_1 associé à $\lambda = 1$:

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ on voit que } C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc on prend } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  - Vecteur propre v_2 associé à $\lambda = 4$:

$$A - 4I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on voit que } C_1 - 2C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc on prend } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Les solutions s'écrivent donc:

$$X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

soit:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& \alpha e^t + \beta e^{4t} \\ y(t) &=& \alpha e^t - 2\beta e^{4t} \end{array}\right. ,$$

où α et β sont des constantes réelles arbitraires et $t \in \mathbb{R}$.

2. **Solution particulière:** les coefficients et le second membre du système étant constants, on peut se contenter de chercher une solution particulière constante sous la forme $X_0(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on doit donc résoudre le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2a - b = 3 \\ -2a + 3b = -1 \end{array} \right. , \quad \text{soit} \quad A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Ici la matrice A est inversible, donc le système précédent admet une unique solution que l'on calcule facilement: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (2, 1)$.

3. **Solution du système** (S_1):

$$X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \alpha e^t + \beta e^{4t} + 2 \\ y(t) & = & \alpha e^t - 2\beta e^{4t} + 1 \end{array} \right.$$

où α et β sont des constantes réelles arbitraires.

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y+t^2 \\ y' & = & x-t^2 \end{array}\right. \quad \text{système différentiel linéaire à coefficients constants.}$$

On note:

$$X(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad \text{et } f(t)=\begin{pmatrix} t^2\\ -t^2\end{pmatrix}.$$

Le système (S_2) s'écrit donc également $X'(t)=AX(t)+f(t)$.

1. **Résolution de l'équation homogène:** $X'=AX$**.**

- Valeurs propres de A:

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow \lambda^2-1=0$$

  Donc $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$.

- Calcul d'une base de vecteurs propres de A dans $\mathbb{R}^2$:
  - Vecteur propre v_1 associé à $\lambda=1$:

$$A-I_2=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \text{on voit que } C_1+C_2=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix},\ \text{donc on prend } v_1=\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

  - Vecteur propre v_2 associé à $\lambda=-1$:

$$A+I_2=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \text{on voit que } C_1-C_2=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix},\ \text{donc on prend } v_2=\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

- Les solutions de l'équation homogène s'écrivent donc:

$$X_h(t)=\alpha e^t\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}+\beta e^{-t}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

2. **Recherche d'une solution particulière** X_0 par la méthode de variation de la constante. On cherche X_0 sous la forme:

$$\begin{array}{rcl} X_0(t) & = & \alpha(t)e^t\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}+\beta(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix} \\ & = & \alpha(t)e^tv_1+\beta(t)e^{-t}v_2. \end{array}$$

   Calculons:

$$\begin{array}{rcl} AX_0(t) & = & \alpha(t)e^tAv_1+\beta(t)e^{-t}Av_2 \\ & = & \alpha(t)e^tv_1-\beta(t)e^{-t}v_2 \end{array}$$

   puis on dérive X_0 par rapport à t:

$$\begin{array}{rcl} X_0'(t) & = & \alpha'(t)e^tv_1+\beta'(t)e^{-t}v_2+\alpha(t)e^tv_1-\beta(t)e^{-t}v_2 \\ & = & \alpha'(t)e^tv_1+\beta'(t)e^{-t}v_2+AX_0(t) \end{array}$$

   En réinjectant dans le système (S_2) i.e. en écrivant: $X_0'(t)=AX_0(t)+f(t)$, on obtient:

$$\alpha'(t)e^t\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}+\beta'(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}=f(t),$$

soit à résoudre:
$$\alpha'(t)e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta'(t)e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix}$$
Réécrivons cette équation sous la forme d'un système linéaire en $(\alpha'(t), \beta'(t))$ à résoudre:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} e^t\alpha'(t) + e^{-t}\beta'(t) & = & t^2 \\ & & \\ e^t\alpha'(t) - e^{-t}\beta'(t) & = & -t^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{|r|r} \times 1 & \times 1 \\ + & - \\ \times 1 & \times 1 \end{array}$$

Par élimination, on obtient alors:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha'(t) & = & 0 \\ \beta'(t) & = & t^2 e^t \end{array} \right.$$

On intègre et on trouve: $\alpha(t) = cte = 0$ et $\beta(t) = (t^2 - 2t + 2)e^t$ par exemple. Une solution particulière du système (S_2) est donc: $X_0(t) = (t^2 - 2t + 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. **La solution générale de (S_2) s'écrit donc:**

$$\boxed{X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (t^2 - 2t + 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

soit:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \alpha e^t + \beta e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y(t) & = & \alpha e^t - \beta e^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{array} \right.$$

où α et β sont des constantes réelles arbitraires.

$$(S_3) \quad \begin{cases} x' &= x \\ y' &= x+3y-z \\ z' &= x+2y \end{cases}$$ système différentiel linéaire homogène à coefficients constants.

On note:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et } f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (S_3) s'écrit donc également: $X'(t) = AX(t)$.

- **Valeurs propres de A:**

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda(3-\lambda)) = 0.$$

  Donc: $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ i.e.: $\lambda = 1$ (valeur propre double) ou $\lambda = 2$.

- **Calcul d'une base de vecteurs propres de A dans $\mathbb{R}^3$:**

  – Vecteurs propres (v_1,v_2) associé à $\lambda = 1$:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

  On voit que $C_1 + C_3 = C_2 + 2C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  – Vecteur propre v_3 associé à $\lambda = 2$:

  $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, on voit que $C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc on prend $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **La solution générale s'écrit donc:**

$$X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

soit:

$$\begin{cases} x(t) &= \alpha e^t \\ y(t) &= \beta e^t + \gamma e^{2t} \\ z(t) &= (\alpha + 2\beta)e^t + \gamma e^{2t} \end{cases}$$

où α, β et γ sont des constantes réelles arbitraires.

$$(S_4) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x+y+z-1 \\ y' & = & x-y+z-1 \\ z' & = & x+y-z-1 \end{array} \right. \quad \text{système différentiel linéaire à coefficients constants.}$$

Le système (S_4) s'écrit également: $X'(t) = AX(t) + f(t)$ en notant:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } f(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. **Solution de l'équation homogène:** $X'(t) = AX(t)$.

   - Valeurs propres de A : la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable à valeurs propres réelles que l'on calcule:

   $$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ i.e.: } \begin{vmatrix} 0 & 2+\lambda & 1-(1+\lambda)^2 \\ 0 & -2-\lambda & 2+\lambda \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

   soit: $(2+\lambda)^2 + (2+\lambda)(1-(1+\lambda)^2) = 0$. Donc:

   $$\lambda = -2 \text{ ou } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \qquad \text{i.e.:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -2 \text{ (vp double)} \\ \text{ ou} \\ \lambda = 1 \end{array} \right.$$

   - Calcul des vecteurs propres de A :
     - Vecteur propre v_1 associé à $\lambda = 1$:

     $$A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

     On voit que $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
     - Vecteurs propres (v_2,v_3) associé à $\lambda = -2$:

     $$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

     On voit que $C_1 - C_2 = C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc on prend $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- La solution du système homogène s'écrit donc:

$$X_H(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. **Solution particulière:** $X' = AX + f$ admet ici une solution évidente: $X_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. **Solution générale:**

$$X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

soit:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 1 + \alpha e^t + \beta e^{-2t} + \gamma e^{-2t} \\ y(t) & = & 1 + \alpha e^t - \beta e^{-2t} \\ z(t) & = & 1 + \alpha e^t - \gamma e^{-2t} \end{array} \right.$$

où α, β et γ sont des constantes réelles arbitraires.

$$(S_5) \quad \begin{cases} x_1' &= \quad x_1 + x_2 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 \end{cases}$$

On note:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (S_1) s'écrit donc également: $X'(t) = AX(t)$.

- **Valeurs propres de A:**

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ i.e.: } \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

  Donc: $\lambda = 1 + i$ ou $\lambda = 1 - i$.

- **Calcul d'une base de vecteurs propres de A dans $\mathbb{C}^2$:**

  – Vecteur propre v_1 associé à $\lambda = 1 + i$:

  $$A-(1+i)I_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \text{ on voit que } C_1+iC_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc on prend } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

  – Vecteur propre v_2 associé à $\lambda = 1 - i$:

  $$A-(1-i)I_2 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \text{ on voit que } C_1-iC_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc on prend } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

- **Les solutions complexes s'écrivent donc:**

$$X(t) = \alpha e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \beta e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

  où α et β sont des constantes complexes arbitraires. Mais la solution cherchée est **réelle** donc: $\bar{x}(t) = x(t)$ ce qui implique: $\beta = \bar{\alpha}$ et:

$$X(t) = \alpha e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \bar{\alpha} e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

  On écrit maintenant: $\alpha = re^{i\theta}$ où r et θ sont de nouvelles constantes arbitraires mais réelles cette fois, et on obtient:

$$X(t) = re^t \left(e^{i(t+\theta)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + e^{-i(t+\theta)} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) = re^t \begin{pmatrix} e^{i(t+\theta)} + e^{-i(t+\theta)} \\ i(e^{i(t+\theta)} - e^{-i(t+\theta)}) \end{pmatrix}$$

  D'où:

$$X(t) = 2re^t \begin{pmatrix} \cos(t+\theta) \\ -\sin(t+\theta) \end{pmatrix}$$

soit:

$$\begin{cases} x_1(t) &= 2re^t \cos(t+\theta) \\ x_2(t) &= -2re^t \sin(t+\theta) \end{cases}$$

où r et θ sont des constantes réelles arbitraires.

Exercice 2.

On veut résoudre l'EDO:

$$y''' + y'' - y' - y = 0.$$

1. (a) On pose: $x_1 = y$, $x_2 = y'$ et $x_3 = y''$. Donc:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

L'EDO à résoudre s'écrit donc sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants:

$$(S) \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(b) Valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ i.e.: } -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Donc: $\lambda = -1$ (valeur propre double) ou $\lambda = 1$ (valeur propre simple).

(c) Calcul des vecteurs propres de A dans $\mathbb{R}^3$:

- Vecteur propre v_1 associé à $\lambda = 1$:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On voit que $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Vecteur propre v_2 associé à $\lambda = -1$:

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que $C_1 - C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc on prend $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que l'on ne trouve qu'un seul vecteur propre associé à $\lambda = -1$, ce qui est normal car A n'est <u>pas diagonalisable</u> (à vérifier en calculant la dimension des sous-espaces propres via le théorème du rang).

(d) Si on suit naïvement le cours, la solution générale du système (S) s'écrirait donc:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ae^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

soit:

$$y(t) = Ae^t + Be^{-t}.$$

Or on remarque que la solution y trouvée ne dépend que de deux constantes arbitraires A et B alors qu'on en attendait trois (EDO d'ordre 3). On a trouvé deux solutions de l'EDO initiale: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$. Il faut donc en trouver une troisième qui soient linéairement indépendante de y_1 et y_2.

(e) On vérifie que $y_3(t) = te^{-t}$ est solution de (E), linéairement indépendante de $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{-t}$ en effet si on a:

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = 0,$$

alors:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ ae^t + (b + ct)e^-t = 0 \quad \text{soit (sans détailler...):} \quad a = b = c = 0.$$

Donc la solution générale de (E) s'écrit:

$$y(t) = Ae^t + Be^{-t} + Cte^{-t} = Ae^t + (B + Ct)e^{-t}$$

où A, B et C sont des constantes réelles arbitraires et $t \in \mathbb{R}$.

2. Etant donné que (E) est une EDO linéaire d'ordre 3 à coefficients constants, on aurait pu procéder comme en cours pour les mêmes EDO mais d'ordre 2. A savoir: on cherche des solutions de (E) sous forme exponentielle: $y(t) = e^{rt}$. On réinjecte dans (E) et on obtient comme condition:

$$r^3 + r^2 - r - 1 = 0$$

qui est en fait l'équation caractéristique de l'EDO d'ordre 3. On la résout : la difficulté est qu'on ne dispose pas de méthode pour résoudre une équation de degré 3 (et c'est pour cela qu'il vaudra mieux passer par les systèmes différentiels d'ordre 1). Ici on "voit" deux solutions évidentes: $r = 1$ et $r = -1$ et en écrivant:

$$r^3 + r^2 - r - 1 = (r - 1)(r + 1)^2,$$

on en déduit que $r = 1$ est racine simple et $r = -1$ racine double. Donc on a deux solutions de (E) sous forme exponentielle:

$$y_1(t) = e^t \quad \text{et} \quad y_2(t) = e^{-t}.$$

Comme l'EDO est d'ordre 3, il nous manque une troisième solution y_3 linéairement indépendante des deux premières et on termine comme à la question précédente.