Corrigé examen Outils Mathématiques

Exercice 1 :

Commençons par déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de résolution de l'équation.

Si on note $\begin{cases} f : x \longmapsto \ln(x) \\ g : x \longmapsto \ln(4x^2+8x+4) \\ h : x \longmapsto \ln(x+1) \end{cases}$, alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h$.

Or $\begin{cases} \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[\\ \mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R},\ 4x^2+8x+4 \in \mathbb{R}_+^*\} \\ \mathcal{D}_h = \{x \in \mathbb{R},\ x+1 \in \mathbb{R}_+^*\} =]-1, +\infty[\end{cases}$

Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $4x^2+8x+4 = 4(x^2+2x+1) = 4(x+1)^2$.

Donc $4x^2+8x+4 \in \mathbb{R}_+^* \iff 4(x+1)^2 > 0$

$\iff x \neq -1$

D'où $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Au final, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h =]0, +\infty[\cap (\mathbb{R} - \{-1\}) \cap]-1, +\infty[$

donc $\boxed{\mathcal{D} =]0, +\infty[\,.}$

Soit $x \in \mathcal{D}$:

$$\ln(x) + \ln(4x^2+8x+4) = 4\ln(x+1) \iff \ln(x) + \ln(4(x+1)^2) = \ln((x+1)^4)$$
$$\iff \ln(4x(x+1)^2) = \ln((x+1)^4)$$
$$\iff 4x(x+1)^2 = (x+1)^4$$

(en appliquant la fonction exponentielle)

$\Leftrightarrow (x+1)^4 - 4x(x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2\left[(x+1)^2 - 4x\right] = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2\left[x^2 - 2x + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ ou $x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$.

Or $-1 \notin \mathcal{D}$, donc la seule solution possible est $x=1$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

Exercice 2 :

$z = \sqrt{3}\,i - 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{|z| = 2}.$

Donc $z = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2(\cos(Arg(z)) + i \sin(Arg(z)))$

D'où $\begin{cases} \cos(Arg(z)) = \frac{-1}{2} \\ \sin(Arg(z)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{Arg(z) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]}.$

Ainsi $z = |z|\, e^{i\,Arg(z)} = 2 e^{\frac{2i\pi}{3}}.$

Donc $\boxed{\begin{cases} z^2 = 4 e^{\frac{4i\pi}{3}} = -2 - 2\sqrt{3}\,i \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{2} e^{\frac{-2i\pi}{3}} = \frac{-1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i \end{cases}}$

Exercice 3 :

Notons (1) : $Q \Rightarrow (P \text{ et } R)$,

et (2) : $(P \Rightarrow Q) \text{ et } R$.

Etudions la valeur de vérité de $(1) \Rightarrow (2)$ en fonction des valeurs de vérité de P, Q et R à l'aide d'un tableau de vérité.

P	Q	R	P et R	(1)	$P \Rightarrow Q$	(2)	$(1) \Rightarrow (2)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F

On remarque que la valeur de vérité de $(1) \Rightarrow (2)$ varie en fonction des valeurs de vérité de P, Q et R.

$\boxed{\text{$(Q \Rightarrow (P \text{ et } R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ et } R)$ est soit vraie soit fausse en fonction des valeurs de vérité de P, Q, R.}}$

Elle n'est ni vraie tout le temps, ni fausse tout le temps.

Exercice 4 :

1) NON(P) : $\underline{\exists x \in \mathbb{R}^-, \forall y \in \mathbb{R}^+, y^3 \leq x^3}$.

NON(Q) : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}^-, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 \leq x^3}$.

2) Prouvons que <u>P est vraie</u>.

Soit $x \in \mathbb{R}_-$, alors $x \leq 0$.

Donc $x^3 \leq 0$.

Posons $y = 1$. On a bien $\begin{cases} y \in \mathbb{R}_+ \\ x^3 < y^3 \end{cases}$ car $\begin{cases} x^3 \leq 0 \\ 0 < 1 = y^3 \end{cases}$.

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_-, \exists y \in \mathbb{R}_+, y^3 > x^3}$, d'où $\boxed{\text{P vraie}}$.

Prouvons maintenant que <u>Q est fausse</u>, en montrant que <u>NON(Q) est vraie</u>.

Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Posons $y = x - 1$.

Déjà on a bien $y \in \mathbb{R}$, mais on a aussi :

$$y \leq x \quad (\text{puisque } x - 1 \leq x)$$

Or la fonction $z \mapsto z^3$ est <u>croissante sur $\mathbb{R}$</u>.

Donc si on l'applique à l'inégalité précédente, cela ne change pas le sens de l'inégalité d'où on obtient :

$$y^3 \leq x^3.$$

On vient donc de prouver que : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_-, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 \leq x^3}$.

Donc <u>NON(Q) est vraie</u>, et donc $\boxed{\text{Q est fausse.}}$

Exercice 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition : " u_n bien défini et $0 \leq u_n < 2$ ".

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie.

• Initialisation : $n = 0$

On sait que $u_0 \in [0, 2[$, donc u_0 est bien défini et $0 \leq u_0 < 2$.

Donc P_0 vraie.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie.

Donc u_n bien défini et $0 \leq u_n < 2$.

D'où $2 \leq 2 + u_n < 4$, donc $2 + u_n \geq 0$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ existe.

Et la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[2, 4[$, et on obtient en l'appliquant :

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} < \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+1} < 2$$

Or $\sqrt{2} \geq 0$ donc $0 \leq u_{n+1} < 2$, ce qui prouve que P_{n+1} est vraie.

Bilan : P_n est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ bien défini et } 0 \leq u_n < 2}$.

Exercice 6 :

Effectuons la division euclidienne de A par B.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 \qquad\qquad + 2x + 5 & x^2 - 3x + 2 \\
\hline
-(x^5 - 3x^4 + 2x^3 \qquad\qquad) & x^3 + 3x^2 + 7x + 15 \\
\hline
3x^4 - 2x^3 + 2x + 5 & \\
-(3x^4 - 9x^3 + 6x^2 \qquad) & \\
\hline
7x^3 - 6x^2 + 2x + 5 & \\
-(7x^3 - 21x^2 + 14x \quad) & \\
\hline
15x^2 - 12x + 5 & \\
-(15x^2 - 45x + 30) & \\
\hline
33x - 25 &
\end{array}
$$

Donc $\boxed{A(x) = (x^3 + 3x^2 + 7x + 15)\,B(x) + 33x - 25,\ \forall x \in \mathbb{R}}$.

Exercice 7 :

$P(x) = x^4 + x^2 - 6.$

On pose $X = x^2$, alors :

$P(x) = Q(X) = X^2 + X - 6.$

Or $X^2 + X - 6 = 0 \iff X = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$\iff X = -3$ ou $X = 2.$

Donc $Q(X) = (X+3)(X-2)$ et donc :

$P(x) = (x^2+3)(x^2-2)$

$\Rightarrow P(x) = (x^2+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$

Or $x^2+3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc le facteur x^2+3 est irréductible dans $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{P(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+3),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{dans } \mathbb{R}[x]}$

Mais $x^2 + 3 = 0 \iff x = \sqrt{3}i$ ou $x = -\sqrt{3}i$ dans $\mathbb{C}$

Donc $x^2 + 3 = (x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)$ dans $\mathbb{C}[x]$.

Et donc : $\boxed{P(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i),\ \forall x \in \mathbb{C},\ \text{dans } \mathbb{C}[x]}$

Exercice 8 :

Notons $P(x) = 2x^4 - 2x^2 + 3$ et $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.
On a $Q(x) = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Donc <u>les pôles de F sont 1 et -1</u>, et <u>$\mathcal{D}_F = \mathbb{R} - \{-1,1\}$</u>.

De plus, $\begin{cases} P(1) = 3 \neq 0 \\ P(-1) = 3 \neq 0 \end{cases}$, donc F est <u>irréductible</u>.

On remarque que $\deg(P) = \deg(Q)$, donc F possède une partie entière non nulle que l'on détermine avec la division euclidienne de P par Q :

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 2x^2 + 3 & x^4 - 2x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -(2x^4 - 4x^2 + 2) & 2 \\ \cline{1-2} 2x^2 + 1 & \end{array}$$

Donc $\forall x \in \mathcal{D}_F$, $F(x) = 2 + \dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2}$.

Et la décomposition en éléments simples de F s'écrit donc :

$$\boxed{F(x) = 2 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}, \ \forall x \in \mathcal{D}_F}$$

- On remarque que $\forall x \in \mathcal{D}_F$, $F(-x) = 2 + \dfrac{2(-x)^2+1}{(-x-1)^2(-x+1)^2} = 2 + \dfrac{2x^2+1}{(x+1)^2(x-1)^2} = F(x)$

donc F est paire et on obtient alors $\forall x \in \mathcal{D}_F$:

$$2 + \frac{a}{-x-1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{-x+1} + \frac{d}{(x-1)^2} = 2 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

soit $\frac{-a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{-c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{(x+1)^2}$.

En identifiant, on obtient : $\begin{cases}-a=c\\ b=d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-c\\ b=d\end{cases}$.

(car la décomposition de F est unique)

- Soit $x\in\mathcal{D}_F$, on a $\begin{cases}(x-1)^2F(x)=2(x-1)^2+\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\\ (x-1)^2F(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+b+\frac{c(x-1)^2}{x+1}+\frac{d(x-1)^2}{(x+1)^2}\end{cases}$

En évaluant en $x=1$, on obtient alors : $\boxed{b=\frac{3}{4}}$

et comme $d=b$: $\boxed{d=\frac{3}{4}.}$

- Evaluons F en 0 : $F(0)=2+\frac{1}{1}=3$.

Et $F(0)=2-a+\frac{3}{4}+c+\frac{3}{4}=c-a+\frac{7}{2}$.

Donc $c-a+\frac{7}{2}=3 \Rightarrow c-a=\frac{-1}{2}$.

Or $c=-a$ donc $-2a=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ c=\frac{-1}{4}\end{cases}}$.

Donc $\boxed{F(x)=2+\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{3}{4(x+1)^2},\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1,1\}}$.