Cours de remise à niveau Maths 2ème année

Déterminants

C. Maugis-Rabusseau
GMM Bureau 116
cathy.maugis@insa-toulouse.fr

Plan

Introduction

Dans ce chapitre, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Une présentation plus générale des déterminants est disponible dans le polycopié d'algèbre de première année.

Sommaire

Déterminant en dimension 2

Définition

Soit $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Le déterminant de a et b est le réel défini par

$$\det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Déterminant en dimension 2

Proposition

Soit a, b et c trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. $\det(e_1, e_2) = 1$.
2. (a, b) libre $\iff \det(a, b) \neq 0$.
3. Pour tous réels α et β, $\det(\alpha a, b) = \alpha \det(a, b)$ et $\det(a, \beta b) = \beta \det(a, b)$.
4. $\det(a, b + c) = \det(a, b) + \det(a, c)$ et $\det(a + c, b) = \det(a, b) + \det(c, b)$.
5. $\det(b, a) = -\det(a, b)$.

Sommaire

Déterminant en dimension 3

Définition

Soit $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ et $c = (c_1, c_2, c_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le déterminant de a, b et c est défini par le réel

$$\begin{aligned} \det(a, b, c) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned}$$

Il représente le volume "orientée" du parallélépipède défini par les vecteurs a, b et c.

Déterminant en dimension 3

"Croquis de calcul" :

$$
\begin{array}{ccc}
a_1 & b_1 & c_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 \\
a_1 & b_1 & c_1 \\
a_2 & b_2 & c_2
\end{array}
$$

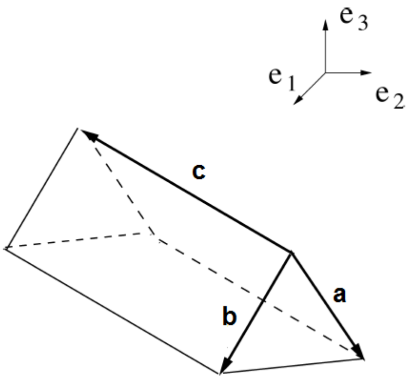

FIGURE : volume “orienté” du parallélépipède défini par les vecteurs *a*, *b* et *c*.

Déterminant en dimension 3

Proposition

Soit a, b et c trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$.
2. (a, b, c) libre $\iff \det(a, b, c) \neq 0$.
3. $\det(b, a, c) = -\det(a, b, c)$ et $\det(b, c, a) = \det(a, b, c)$.

Sommaire

Déterminant en dimension n

Définition

Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application linéaire.
On dit qu'elle est **n-linéaire alternée** si
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall V_1, \ldots, V_n, W$ n+1 vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1. $\phi(V_1, V_2, \ldots, V_i + \lambda W, \ldots, V_n) =$
   $\phi(V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots, V_n) + \lambda\phi(V_1, V_2, \ldots, W, \ldots, V_n)$.
   (*on dit que ϕ est n-linéaire*).
2. $\phi(V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots, V_j, \ldots, V_n) = 0$ si $V_i = V_j$.

On appelle **déterminant**, noté det, la forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$ qui prend la valeur 1 en $(e_1, \ldots, e_n)$.

Géométriquement, le dét. de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ représente le volume orienté du parallélépipède défini par ces vecteurs.
"n-linéaire" : additivité de deux volumes disjoints + la multiplication d'une arête par λ multiplie le volume par λ.
"alterné" : dit qu'un volume plat est nul.

Déterminant en dimension n

Proposition

Soit $V_1, \dots, V_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. det est une forme n-linéaire alternée.
2. $\det(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$.
3. $(V_1, V_2, \cdots V_n)$ libre $\Longleftrightarrow \det(V_1, V_2, \cdots V_n) \neq 0$.

Sommaire

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2,...,n\}} \in M_n(\mathbb{R})$.
On appelle **déterminant** de la matrice A le réel défini par :

$$\det(A) = \det(C_1, C_2, ..., C_n),$$

où les C_i sont les colonnes de A.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Proposition

Le déterminant de A est une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A. C'est aussi une forme n-linéaire alternée par rapport aux lignes de A car $\det({}^tA) = \det(A)$. En conséquence :

1. Échanger 2 colonnes de la matrice A change le signe du déterminant.
2. Échanger 2 lignes de la matrice A change le signe du déterminant.
3. Ajouter à une colonne une combinaison linéaire <u>des autres</u> colonnes ne modifie pas le déterminant.
4. Ajouter à une ligne une combinaison linéaire <u>des autres</u> lignes ne modifie pas le déterminant.
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Exemples

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez $\det(A)$.

2. Calculez de deux façons différentes $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.

   Déduisez-en les valeurs de

   $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & -6 & 15 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 10 \\ 6 & -6 & 12 \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Développement du det

Proposition

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} \in M_n(\mathbb{R})$.

- Développement suivant une colonne j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij}$$

- Développement suivant une ligne i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij}$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice A à laquelle on a enlevé la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Remarque

En pratique, on utilise les propriétés énoncées précédemment pour faire apparaître des "0" dans $\det(A)$ puis on développe selon la ligne ou la colonne contenant le plus de "0".

Exemple

Calculez de deux manières différentes le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Déterminant des matrices triangulaires supérieures

Proposition

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{ii} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Déterminant des matrices diagonales

Proposition

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Propriétés des det

Théorème

$$\forall (A,B) \in M_n(K)^2,\ \det(B\,A) = \det(A\,B) = \det(A) \times \det(B).$$

<u>ATTENTION</u> : En général, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Théorème

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. A inversible $\iff \det(A) \neq 0$.
De plus, si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Exemple

Déterminez les valeurs de λ pour lesquelles A est inversible.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$