# Transformée de Fourier

*par J. Monnier, professeur INSA Toulouse.*

*Jerome.Monnier@insa-toulouse.fr*

Janvier 2019

**Résumé**

Introduction aux transformées - intégrales de Fourier, un outil mathématique essentiel pour l'ingénieur.
Public visé : étudiants, professionnels en formation continue, cycle préparatoire de notre école d'ingénieur INSA.

## Table des matières

FIGURE 1.1 – J.-B. Joseph Fourier (1768- 1830), mathématicien et physicien français, est connu pour avoir déterminé par le calcul la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente i.e. les séries de Fourier.
La méthode de calcul permettant de passer, de façon réversible, d'une fonction à la série trigonométrique correspondante est la transformée de Fourier. Cette méthode est incontournable en théorie du signal, imagerie numérique, compression de données, dans l'exploitation des systèmes 3G, 4G. Source. e.g. Wikipedia.

# 1 Introduction

La *Transformée de Fourier* (TF) est une extension pour les fonctions *non périodiques* du Développement en Série de Fourier (DSF) des fonctions périodiques.

La transformée (continue) de Fourier (également appelée intégrale de Fourier) associe à une fonction $F(x)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une autre fonction notée $\mathcal{F}(F(x))(\xi)$ ou plus simplement $\hat{F}(\xi)$ ; $\xi$ est une variable indépendante de $x$, appelée variable duale.

$$\mathcal{F} : F(x) \mapsto \hat{F}(\xi) \equiv \mathcal{F}(F(x))(\xi)$$

Lorsque la fonction $F(x)$ représente un signal e.g. une image, une onde sonore, électromagnétique ($x$ désignant la variable de temps ou d'espace), sa *transformée de Fourier* $\hat{F}(\xi)$ est son *spectre* avec $\xi$ qui représente la fréquence ou la pulsation.

Notons que la variable duale est ici continue et non discrète comme c'était le cas avec les séries de Fourier (l'indice $n$). Notons aussi qu'une intégrale n'est rien d'autre qu'une « somme continue »...

Les transformées - intégrales de Fourier constituent un pilier de "l'analyse de Fourier" qui ont par la suite constitué une base majeure de diverses branches mathématiques (e.g. l'analyse harmonique [1] et ses liens forts avec des outils mathématiques modernes) et de l'analyse du signal (jusqu'aux ondelettes). Aussi cette transformation mathématique peut être très utile pour résoudre certaines équations différentielles car bien plus simple à résoudre dans l'espace de Fourier i.e l'espace fréquentiel.

1. L'analyse harmonique consiste à étudier la représentation de fonctions, signaux comme superposition d'ondes de base ; les ondes de base s'appellent les harmoniques,

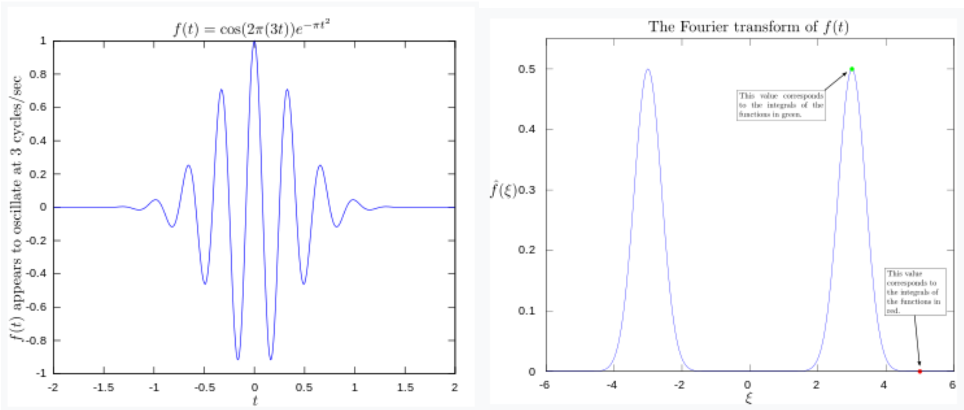



FIGURE 1.2 – (G) Exemple de fonction-signal (réel) $F(x)$ oscillant à 3 Hertz et exponentiellement amorti. (D) Module de sa transformée de Fourier $|\hat{F}(\xi)|$ représentant le « volume » d'information fréquentielle contenue dans le signal $F$ ; noter les pics en $\pm 3$ Hz. (Généralement $\hat{F}(\xi)$ est une fonction complexe et non réelle). Images extraites de Wikipédia.

# 2 Définitions & fondamentaux

## 2.1 Définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$

**Définition 1.** Soit une fonction $F(x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), $F$ intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens $F \in L^1(\mathbb{R})$ : l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|\, dx$ est finie i.e. convergente.
La transformée de Fourier de $F$ est la fonction $\mathcal{F}(F) = \hat{F}$ définie par :

$$\boxed{\mathcal{F}(F) : \xi \mapsto \hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x \qquad (2.1)}$$

où $e^{iz}$ désigne l'exponentielle complexe.

Notons que même pour $F$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\hat{F}$ est (a-priori) à valeurs dans $\mathbb{C}$.
La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un opérateur qui transforme une fonction $F(x)$ sur $\mathbb{R}$, intégrable, en une autre fonction $\hat{F}(\xi)$ ; $\xi$ est appelée variable duale.

## 2.2 Remarques & premières propriétés

1. Il est possible de choisir une définition légèrement différente pour la transformation de Fourier ; cela n'est qu'une question de convention dont les conséquences ne se sont que des facteurs multiplicatifs dans les formules à venir (notamment dans l'expression de la transformée de Fourier inverse). Typiquement selon les communautés scientifiques, e.g. mécaniciens, électroniciens, physiciens quantiques etc, on considèrera les définitions suivantes : $\hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\, \mathrm{d}x$ ou encore $\hat{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x$.
2. On peut définir la transformée de Fourier pour une fonction $F$ à plusieurs variables : $F(x_1, \ldots, x_n)$. Si on note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ , $(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$, alors on a :

$$\hat{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ (\xi,x)}\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

Typiquement en traitement d'images, on effectue des transformations de Fourier à deux dimensions.

Par ailleurs la transformée de Fourier d'une fonction radiale est radiale.

Pour des raisons de clarté et sans perte importante de généralité, ce cours se limite aux fonctions à une seule variable.

3. Les situations types sont les suivantes :
   (a) la variable primale $x$ est le temps (s) ; dans ce cas, la variable duale $\xi$ a la dimension d'une fréquence (Hz). $\hat{F}(\xi)$ représente alors le *spectre fréquentiel du signal* $F(x)$.
   (b) la variable primale $x$ est une position (m) ; dans ce cas, la variable duale $\xi$ a la dimension de l'inverse d'une longueur. $\xi$ désigne ce que l'on appelle le vecteur d'onde.

   Un exemple physique remarquable sont les phénomènes de diffraction qui donnent une image de l'espace dual du réseau ; ils sont en quelque sorte une « machine naturelle à transformation de Fourier ».

Le **théorème de Riemann-Lebesgue** (également appelé lemme intégral de Riemann-Lebesgue) stipule les points suivants.

— La transformée de Fourier $\hat{F}(\xi)$ est une fonction continue (alors que $F(x)$ ne l'est pas forcément !).

— A l'infini, la transformée de Fourier $\hat{F}$ tend vers 0 :

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \hat{F}(\xi) = 0 \tag{2.3}$$

— On a l'estimation : $\|\hat{F}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

## 2.3 Exemple usuel : fonction porte et sinus cardinal

Considérons la fonction porte (ou fonction créneau) de largeur $L$ définie par : $P(x) = 1$ pour $x \in [-L/2, +L/2]$ et 0 sinon. On calcule sa transformée de Fourier.

On remarque : $\forall a,\ \int_{-a}^{+a} e^{ix}dx = \int_{-a}^{+a} \cos x\, dx + i \int_{-a}^{+a} \sin x\, dx = 2\int_0^{+a} \cos x\, dx$.

D'où : $\hat{P}(\xi) = 2\int_0^{L/2} \cos(\xi x)\ dx$. Et donc :

$$\hat{P}(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\xi}\frac{\sin(L\xi/2)}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ L & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

La fonction $(\sin x/x)$ s'appelle le sinus cardinal ; elle est notée *sinc*, cf Fig.

On remarque que l'on a bien conformément au **théorème de Riemann-Lebesgue** : $\lim_{\xi\to\pm\infty} \hat{P}(\xi) = 0$. Aussi bien que la fonction originale ne soit pas continue, sa transformée de Fourier l'est.

Le spectre fréquentiel du « signal porte » est réel (et non complexe). On verra par la suite que ceci est dû au fait que le signal $P(x)$ est réel pair.

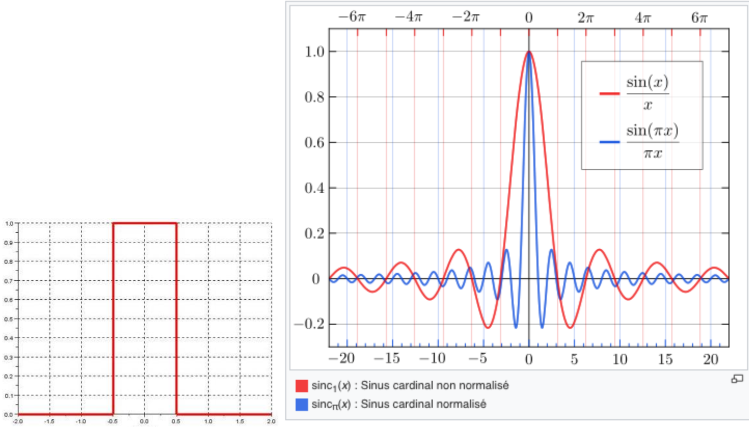



FIGURE 2.1 – (G) La fonction porte (pour $L = 1$). (D) Sa transformée de Fourier : le sinus cardinal. Images extraites de Wikipédia.

## 2.4 La transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$

Pour tout transformée de fonction (Fourier, Laplace et d'autres moins usuelles), il est indispensable pour l'usage de l' »outil mathématique » que l'on sache à l'espace originel. Dans le cas présent, il est nécessaire de savoir caractériser une - la transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}$ qui vérifierait : $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(F(x)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{F}(\xi)) = F(x)$.

### 2.4.1 Expression de $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$

Si $\hat{F}(\xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut montrer (ça n'est pas trivial du tout ! ) que :

$$\boxed{F(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{F})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\xi)\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi} \tag{2.5}$$

On remarque que l'expression de la transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}$ est très semblable à celle de la transformation directe $\mathcal{F}$. En effet seul change le signe de l'exponentielle complexe : $+i$ au lieu de $-i$ ! (Modulo le facteur multiplicatif $\frac{1}{2\pi}$ , facteur qui dépend de la définition choisie de $\mathcal{F}$).

Cette transformation inverse implique qu'à partir des variations fréquentielles on peut retrouver les variations temporelles.

A noter que cette transformation inverse permet de remonter à $F$ en tout point $x$ que si $F$ est continue sur $\mathbb{R}$, et au sens presque partout sinon.
Notons également que $\hat{F}(\xi)$ n'appartient pas nécessairement à $L^1(\mathbb{R})$ ! Un exemple est le sinus cardinal *sinc* qui est continue, borné, qui tend vers 0 à l'infini mais qui n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

### 2.4.2 Quelques relations liant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$

*Propriétés moins importantes dans le cadre du présent cours.*
Par définition on a : $\mathcal{F}(F(-x))(\xi) = \int_R F(-x) \exp(-ix\xi)\, dx$. (Attention au signe de l'exponentielle).

En effectuant le changement de variable $y = (-x)$, on obtient : $\mathcal{F}(F(-x))(\xi) = \int_R F(y)\exp(+iy\xi)\,dy$. Donc :

$$\mathcal{F}(F(-x))(\xi) = \mathcal{F}(F(x))(-\xi) \tag{2.6}$$

Par conséquent : $2\pi\mathcal{F}^{-1}(F(x))(\xi) = \int_R F(x)\exp(+ix\xi)\,dx = \mathcal{F}(F(-x))(\xi) = \mathcal{F}(F(x))(-\xi)$.
Soit à $x$ donné,

$$\mathcal{F}(F(-x))(\xi) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(F(x))(\xi) \qquad \forall\xi \tag{2.7}$$

Ou encore :

$$\mathcal{F}^2(F(x)) = 2\pi\, F(-x)\ \forall x \tag{2.8}$$

Par récurrence on obtient : $\mathcal{F}^4(F(x)) = (2\pi)^2 F(x)$. Soit :

$$\mathcal{F}^4 = (2\pi)^2 Id \tag{2.9}$$

L'opérateur de Fourier $\mathcal{F}(.)$ est donc « 4 - périodique » (modulo le facteur multiplicatif $(2\pi)^2$).

On a également :

$$\mathcal{F}^3 = (2\pi)^2\, \mathcal{F}^{-1} \tag{2.10}$$

La transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}$ peut donc aussi s'exprimer en fonction de $\mathcal{F}^3$.

## 2.5 Interprétation de la transformée en terme de projection orthogonale

Soit $f$ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) c'est à dire que $f$ est de carré intégrable : $\int_{\mathbb{R}} |f|^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Cet espace $L^2$ est un espace dit de Hilbert muni du *produit scalaire hermitien* suivant : $< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \bar{g}(x)\ dx$.

Pour $F(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , on a alors :

$$\hat{F}(\xi) =< f(x), \mathrm{e}^{+i\xi x} > \tag{2.11}$$

Autrement dit, $\hat{F}(\xi)$ *est le projeté orthogonale de* $F(x)$ *sur l'harmonique* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}$ .

De même (modulo le facteur multiplicatif $(2\pi)^{-1}$) pour la transformée de Fourier inverse : $\mathcal{F}^{-1}(\hat{F})(x) = \frac{1}{2\pi} < \hat{F}(x)\,, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} >$ .

# 3 Propriétés élémentaires de $\mathcal{F}(\cdot)$

Présentons les propriétés élémentaires fort utiles de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$.

*Exercice. Montrer les propriétés ci-dessous.*

## 3.1 Linéarité

Par construction, l'opérateur transformée de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$ est linéaire.

En effet, pour $(f, g)(x)$ fonctions satisfaisant les conditions d'existence de leurs transformées de Fourier respectives, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{F}\left(af(x) + bg(x)\right) = a\mathcal{F}\left(f(x)\right) + b\mathcal{F}\left(g(x)\right) = a\hat{f} + b\hat{g} \tag{3.1}$$

## 3.2 Symétrie du graphe de $|\hat{F}(\xi)|$

On a :

$$\left|\hat{F}(\xi)\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\cos(\xi x)\,dx\right|^2 + \left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\sin(\xi x)\,dx\right|^2 \tag{3.2}$$

Donc : $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \left|\hat{F}(-\xi)\right|^2 = \left|\hat{F}(\xi)\right|^2$.

Le module de $\hat{F}(\xi)$ est une fonction paire. (On peut le remarquer sur les figures indiquant $|\hat{F}(\xi)|$).

**Valeur de $\hat{F}(0)$.** En posant $\xi = 0$ dans (2.1), on obtient que $\hat{F}(0)$ est la valeur de l'intégrale de $F$ sur le domaine.

## 3.3 Changement d'échelle - dilatation dans le « domaine temporel »

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = \frac{1}{|a|}\,\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) \tag{3.3}$$

La dilatation dans un des deux domaines (temporel ou fréquentiel) implique une dilatation inverse dans l'autre.

Un exemple illustrant ce phénomène est lorsque l'on lit avec un disque vinyl 33 tours à 45 tours par minute (demandez à vos (grands)-parents si besoin :). Cela engendre une augmentation de la fréquence du signal audio (facteur noté $a$ dans le tableau récapitulatif, $a > 1$) : on dilate le signal audio dans le domaine temporel ce qui le dilate de manière inverse dans le domaine fréquentiel. (Cela amusait beaucoup les enfants que l'on était !).

Soit $F$ une fonction à support borné i.e. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall |x| > x_0, F(x) = 0$.

Cette propriété montre également que : *« Supp(F) croît » si et seulement « Supp($\hat{F}$) décroît, et inversement.*

## 3.4 Translation temporelle

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) = e^{-i\,a\xi}\,\hat{f}(\xi) \tag{3.4}$$

A une translation de $F(x)$ correspond un déphasage de $\hat{F}(\xi)$ ; le terme $Im(e^{-i\xi a}) = -\sin(a\xi)$ étant un facteur de phase.

## Modulation (= translation fréquentielle)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\xi) = \hat{f}\,(\xi - a) \tag{3.5}$$

## 3.5 Dérivation dans le domaine temporel & conséquence en terme de spectre

Si $F$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et dérivable, si sa dérivée $F'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors la transformée de Fourier de la dérivée de $F$ est :

$$\widehat{F'}(\xi) = \mathrm{i}\,\xi\,\hat{F}(\xi) \tag{3.6}$$

Par récurrence pour $F$ de classe $C^k$ et si chaque fonction dérivée est intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\widehat{F^{(k)}}(\xi) = (\mathrm{i}\,\xi)^k\,\hat{F}(\xi) \tag{3.7}$$

**Conséquence importante : régularité de $F$ et décroissance de son spectre.**

On déduit de la propriété précédente que pour $F$ de classe $C^k$,

$$\left|\widehat{F}(\xi)\right| \sim_{+\infty} \frac{1}{\xi^k}\left|\widehat{F^{(k)}}(\xi)\right| \tag{3.8}$$

C'est à dire que *plus $F$ est régulière plus le module de son spectre $\hat{F}$ décroît rapidement vers* 0 *à l'infini.*

*Exercice.* Illustrer cette propriété importante à l'aide de deux graphes correspondant l'un à l'autre : l'un dans le domaine temporel, l'autre dans le domaine fréquentiel.

## 3.6 Dérivation dans le domaine fréquentiel

*Dans notre contexte cette propriété est moins fondamental.*

Si $\hat{F}$ est dérivable, on a :

$$\hat{F}'(\xi) = -\mathrm{i}\,\widehat{xF(x)}\,(\xi) \tag{3.9}$$

Par récurrence pour $\hat{F}$ de classe $C^k$, on obtient :

$$\hat{F}^{(k)}(\xi) = (-\mathrm{i})^k\,\widehat{x^kF(x)}\,(\xi) \tag{3.10}$$

| | Fonction | Transformée de Fourier |
|---|---|---|
| **Linéarité** | $a \cdot g_1(x) + b \cdot g_2(x)$ | $a \cdot \hat{g}_1(\xi) + b \cdot \hat{g}_2(\xi)$ |
| **Contraction du domaine** | $f(a \cdot x)$ | $\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot \hat{f}(\xi/a)$ |
| **Translation temporelle** | $g(x + x_0)$ | $\hat{g}(\xi) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x_0}$ |
| **Modulation dans le domaine temporel** | $g(x) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi_0}$ | $\hat{g}(\xi - \xi_0)$ |
| **Produit de convolution** | $(f * g)(x)$ | $\hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$ |
| **Produit** | $(f \cdot g)(x)$ | $\frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$ |
| **Dérivation dans le domaine temporel** | $f'(x)$ (voir conditions ci-dessous) | $\mathrm{i}\xi \cdot \hat{f}(\xi)$ |
| **Dérivation dans le domaine fréquentiel** | $x \cdot f(x)$ | $\mathrm{i}\hat{f}'(\xi)$ |
| **Symétrie** | réelle et paire | réelle et paire |
| | réelle | paire (à symétrie hermitienne) |
| | réelle et impaire | imaginaire pure et impaire |
| | imaginaire pure et paire | imaginaire pure et paire |
| | imaginaire pure et impaire | réelle et impaire |
| **Forme** | gaussienne | gaussienne |

FIGURE 3.1 – Récapitulatif des propriétés de la transformée de Fourier. Tableau extrait de Wikipédia.

On en déduit la majoration suivante :

$$\left| \hat{F}^{(k)}(\xi) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)| \, dx \tag{3.11}$$

## 3.7 Parité

Soit $F(x)$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. On montre immédiatement que :

— Si $F(x)$ est *réelle paire* alors $\hat{F}(\xi)$ est réelle paire.
En effet, on a dans ce cas :

$$\hat{F}(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} F(x) \cos(\xi x) \, dx \tag{3.12}$$

— Si $F(x)$ est *réelle impaire* alors $\hat{F}(\xi)$ est imaginaire pure, impaire.
En effet, on a dans ce cas :

$$\hat{F}(\xi) = -2i \int_0^{+\infty} F(x) \sin(\xi x) \, dx \tag{3.13}$$

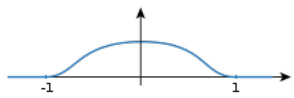



FIGURE 4.1 – Une gaussienne « normalisée » : fonction en cloche, infiniment régulière, paire, décroissant exponentiellement à l'infini.

# 4 Le produit de convolution $*$

On introduit ici quelques concepts mathématiques fondamentaux dont on a besoin par la suite.

## 4.1 Les fonctions gaussiennes

Les fonctions gaussiennes sont des fonctions de la forme : $f(x) = \exp(-x^2)$, cf Fig. Elles ont une forme caractéristique de courbe en cloche.

Ces fonctions sont très importantes du fait de la *densité de probabilité de la loi normale* qui est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.1}$$

où $\mu$ est l'espérance mathématique et $\sigma$ est l'écart type. On note $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ cette loi normale.

Rappelons que de nombreux phénomènes (physiques ou non) suivent une distribution de type gaussien, expliqué par le théorème central limite. (Ce théorème stipule que sous certaines conditions la somme de variables aléatoires indépendantes tend vers une variable aléatoire gaussienne).

Le produit de convolution de deux fonctions gaussiennes $f(x) = (f_1 * f_2)(x)$ est une fonction gaussienne d'écart-type $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)$. En probabilités, il s'agit de la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales.

## 4.2 Définition

Le produit de convolution noté $*$ est un opérateur bilinéaire, un produit commutatif.

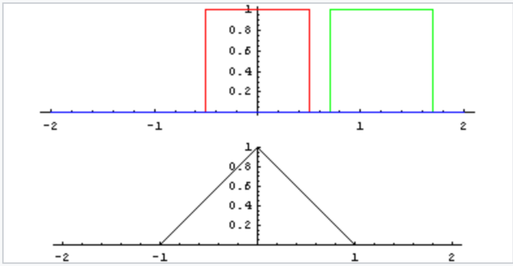
**Définition 2.** Soient $(f, g)$ deux fonctions définies dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Si $f$ et $g$ sont intégrales sur $\mathbb{R}$, on définit :

$$\boxed{(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dx \tag{4.2}}$$

Le produit de convolution de deux fonctions est une autre fonction.

Dans l'intégrale, les deux fonctions sont parcourues en sens contraire l'une de l'autre, cf Fig. et vidéo correspondante.

Le produit de convolution généralise l'idée de moyenne glissante. Cela peut être vu comme étant est la représentation d'un filtre linéaire. Le produit de convolution est omniprésent en traitement d'image, traitement du signal pour les filtres (passe-bas, passe-haut, passe-bande). Si l'on a un signal entrant $e(t)$ et un élément filtrant ayant une fonction de transfert $h(t)$ alors le signal de sortie $s(t)$ sera la convolution



Convolution d'une fonction porte par elle-même.

FIGURE 4.2 – Produit de convolution de 2 fonctions portes. Voir sur Wikipedia Fr la vidéo correspondante.

de ces deux fonctions : $s = e * h$.

Du point de vue mathématique cela permet d'étudier le comportement local d'une fonction $f$ au voisinage d'un point $x$, en choisissant la fonction $g$ suffisamment « concentrée ». Une fonction type pour $g$ est alors une gaussienne.

En statistique, la corrélation croisée est définie à partir d'une formule semblable.

A noter que l'on peut définir un produit de convolution *discret* comme suit :

$$(f * g)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)g(m) \tag{4.3}$$

Les produits de convolution discrets apparaissent notamment dans les réseaux de neurones convolutifs appliqués aux images.

## 4.3 Propriétés de base

Soient $f$ et $g$ sont deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.

Les propriétés qui suivent sont quasi-immédiates à montrer (exercice).

**Commutativité.** Le produit de convolution est commutatif :

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) \tag{4.4}$$

Cette propriété se montre immédiatement en effectuant le changement de variable dans l'expression de $(f * g)(x)$.

**Le Dirac $\delta$ est l'élément neutre de $*$.** Pour $f$ dans $C_c^0(\mathbb{R})$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\delta * f)(x) = f(x) \tag{4.5}$$

Cette propriété se déduite immédiatement de la définition (4.2) de la propriété fondamentale de $\delta(x)$.

**Translation.** Le produit de convolution est invariant par translation au sens suivant.

Notons $\tau_h(\cdot)$ la translation d'une fonction $f(x)$ : $\tau_h(f(x)) = f(x-h)$. On a alors :

$$\tau_h(f) * g = \tau_h\,(f * g) \tag{4.6}$$

Cette propriété d'invariance par translation est un élément clef tant en filtrage de signal (indépendance spatial ou temporel du filtre appliqué) que par exemple dans la recherche de patterns multi-echelles au sein d'une image à l'aide des réseaux de neurones convolutifs.

**Dérivée.** *(Propriété moins importante dans notre contexte).*

Si $f$ et $g$ sont $C^1(\mathbb{R})$, si $f'$ et $g'$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors on a :

$$(f * g)' = f' * g = f * g' \tag{4.7}$$

**Estimations mathématiques.** *(Propriétés moins importantes dans notre contexte).* On a estimations suivantes (admis) :

— Si $f$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $(f * g)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ ; et : $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.

— Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $(f * g)$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ ; et : $\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^2}$.

— Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $(f * g)$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$ ; et : $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$.

Tous ces résultats restent valables pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$.

# 5 Propriétés plus avancées de $\mathcal{F}(.)$

## 5.1 Transformée de Fourier et convolution

Une propriété forte de $\mathcal{F}$ est de transformer le produit de convolution en une multiplication, et inversement. Cette propriété est centrale dans l'analyse des filtres notamment.

**Proposition 3.** *Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :* $\mathcal{F}\left((f * g)(x)\right) = \mathcal{F}\left(f(x)\right) \cdot \mathcal{F}\left(g(x)\right)$. Autrement noté :

$$\boxed{\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) \tag{5.1}}$$

Montrons cette égalité. En vertu du théorème de Fubini (et en supposant tous les termes intégrables sur $\mathbb{R}$), on a :

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \left( \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \exp(-ix\xi)\, dx \right) dy \tag{5.2}$$

On effectue le changement de variable $z = (x - y)$. On obtient :

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \exp\left(-i\xi y\right) \left( \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp(-iz\xi)\, dz \right) dy \tag{5.3}$$

Soit le résultat : $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$.

De manière similaire on montre que :

$$\widehat{f \cdot g}(\xi) = \hat{f}(\xi) * \hat{g}(\xi) \tag{5.4}$$

## 5.2 Egalité de Plancherel-Parseval : conservation de l'énergie

L'égalité de Plancherel-Parseval (issu du théorème de Plancherel) pour les transformées (intégrales) de Fourier est semblable à celui établi pour les séries de Fourier. Rappelons qu'une intégrale de Fourier est en quelque sorte la prolongation continue des séries de Fourier.

**Théorème 4.** *Soit $f$ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.*
*On a l'égalité :*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \tag{5.5}$$

Si $f$ est une onde, l'énergie $\mathcal{E}$ de cette onde, du signal, est égale à : $\mathcal{E} = \|f\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx$.

L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi$ correspond à la décomposition de $f$ en harmoniques (décomposition dans l'espace fréquentiel).

Cette égalité s'interprète alors comme suit : *modulo un facteur multiplicatif (ici $(2\pi)^{-1}$), l'énergie du signal est conservée par la transformée de Fourier.*

**Décroissance de l'énergie en fonction des fréquences**

Ce théorème combiné à la propriété de décroissance fréquentielle (3.8) montre que pour un signal $f(x)$ donné, $f$ d'une certaine régularité $C^k$, *les basses fréquences de $f$ sont les plus énergétiques tandis que les hautes fréquences le sont de moins en moins.*

*Exercice.* Illustrer cette propriété importante à l'aide de deux graphes correspondant l'un à l'autre : l'un dans le domaine temporel, l'autre dans le domaine fréquentiel.

## 5.3 Transformée de Fourier d'une gaussienne

Un résultat majeur est le suivant : *la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.*

**Proposition 5.** *La transformée de Fourier d'une gaussienne centrée en 0 est une gaussienne centrée en 0 d'amplitude et écart type modifiés comme suit :*

$$\mathcal{F}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right)(\xi) = \left(\sigma\sqrt{2\,\pi}\right)\exp\left(-\sigma^2\xi^2\right) \tag{5.6}$$

*En particulier, si $f(x)$ est la gaussienne normalisée au sens $\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1$, centrée en 0, d'écart type $\sigma$ alors sa transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ est la gaussienne centrée en 0, d'écart type $\sigma^{-1}$.*

Un exemple physique (parmi bien d'autres) de ce résultat est que les faisceaux lasers sont des faisceaux gaussiens.

*Démonstration.*
Calculer « de front » $\mathcal{F}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right)(\xi)$ ne semble pas possible.
Par contre on remarque que $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ vérifie l'EDO linéaire d'ordre 1 suivante :

$$f'(x) = -\frac{x}{\sigma^2}f(x) \tag{5.7}$$

On effectue ensuite la transformée de Fourier de cette équation différentielle. On obtient :

$$\widehat{f'(x)}(\xi) = -\frac{1}{\sigma^2}\quad\widehat{xf(x)}(\xi) \tag{5.8}$$

Or on peut montrer que : $\widehat{xf(x)}(\xi) = \frac{i}{2\pi}\widehat{f}'(\xi)$ (calcul à faire en exercice).
D'où :

$$2i\pi\xi\ \widehat{f}(\xi) = -i\frac{1}{\sigma^2}\widehat{f}'(\xi) \tag{5.9}$$

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{\widehat{f}'}{\widehat{f}}(\xi) = -\sigma^2\ \xi \tag{5.10}$$

Son unique solution s'écrit :

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0)\ \exp\left(-\sigma^2\xi^2\right) \tag{5.11}$$

Avec :

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx\ = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\ dx \tag{5.12}$$

Cette intégrale s'appelle l'intégrale de Gauss ; elle n'est pas triviale à calculer.
On admet montré son calcul (e.g. par changement de variables polaires) ; on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\ dx = \sqrt{2\pi}\ \sigma \tag{5.13}$$

On obtient alors finalement :

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\ \sigma\ \exp\left(-\sigma^2\xi^2\right) \tag{5.14}$$

Ce qui montre le résultat.

# 6 Pour aller plus loin

## 6.1 Principe d'incertitude

*Pour aller plus loin ...*

On peut remarquer que les répartitions d'une fonction et de sa transformée de Fourier ont des comportements opposés : plus la « masse » de $f(x)$ est « concentrée », plus celle de sa transformée $\hat{f}(\xi)$ est étalée, et inversement. Par conséquent il est impossible de concentrer à la fois la masse d'une fonction et celle de sa transformée.

Ce compromis entre la dispersion d'une fonction et celle de sa transformée de Fourier dans les espaces temps-fréquence peut être formalisé par le principe dit d'incertitude.

Soit $f(x)$ de carré intégrable, $f(x)$ normalisée, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$. (La normalisation est toujours possible et permet de simplifier les calculs). En vertu du théorème de Plancherel-Parseval, $\hat{f}(\xi)$ est également normalisée.

On quantifie la dispersion de $f$ autour d'un point (ici $x = 0$) par : $D_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ . Il s'agit du le moment d'ordre 2 de $|f|^2$ (notion de probabilité).

De même pour la fréquence autour du point $\xi = 0$ : $D_0(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi$.

Pour $f(x)$ absolument continue, $(xf(x))$, $f'(x)$ de carrés intégrables, le *principe d'incertitude* stipule que :

$$D_0(f)\, D_0(\hat{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2} \tag{6.1}$$

En mécanique quantique, cette inégalité est connue sous le nom d'*inégalité de Heisenberg-Gabor.*

L'égalité n'est atteinte que pour la fonction gaussienne $f(x) = c\, \exp\left(\frac{-\pi x^2}{\sigma^2}\right)$ (alors $\hat{f}(\xi) = \sigma c \exp\left(-\pi\sigma^2\xi^2\right)$ ; $c$ est tel que $f$ est normalisée). Autrement dit *les fonctions gaussiennes centrées en 0 minimisent le principe d'incertitude de Fourier.*

## 6.2 Vers la transformée de Fourier discrète

La transformation de Fourier discrète est un outil mathématique de traitement du signal qui est la version discrète de la transformation de Fourier continue $\mathcal{F}(.)$ ; cette dernière étant utilisée pour le traitement d'un signal continue, analogique.

Soit un signal discret $s(n)$, sa transformée de Fourier (discrète) s'écrit :

$$\boxed{S_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k \frac{n}{N}} \qquad 0 \leqslant k < N} \tag{6.2}$$

La fonction discrète $S_N(k)$ (qui est une somme partielle) est une représentation spectrale discrète du signal échantillonné $s(n)$.

Rappelons par ailleurs que l'échantillonnage d'un signal continu (sa numérisation) se formalise avec l'outil peigne de Dirac (cf notes de cours sur le Dirac).

## 6.3 Lien entre la transformée de Fourier et une série

*Pour aller plus loin.*

Dans la définition de la transformée (continue) de Fourier (2.1), considérons une discrétisation spatiale en posant $x = n\Delta x$.

En remplaçant l'intégrale (qui est en fait une somme continue...) en une somme (discrète) sur $n$, on obtient :

$$\hat{F}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \exp(-i\xi \, n\Delta x) \tag{6.3}$$

La transformée de Fourier de $F(x)$ s'écrit alors comme une décomposition de $F$ en oscillateurs harmoniques. Via une « analyse non standard », un lien peut alors être fait entre cette expression et la décomposition en série de Fourier.