INSA Toulouse. Cycle préparatoire.
Mathématiques.

Fiche de rappel
Résolution d'équations différentielles linéaires
du 1er ordre et du 2nd ordre

1 Equations différentielles du 1er ordre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I. On cherche la fonction $x : I \to \mathbb{R}$, $x(t)$ dérivable, solution de l'EDO linéaire du 1er ordre suivante :

$$x'(t) + a(t)\,x(t) = b(t) \tag{1}$$

L'équation (1) est dite *à coefficients constants* si ni a ni b ne dépendent de t.

Etapes de résolution de (1) :
1. Solution générale de l'équation dite homogène (notée $x_0(t)$),
2. *Une* solution particulière (de l'équation originelle (1) (notée $x_p(t)$),
3. La solution générale de l'équation originelle (1), notée $x(t)$, est alors :

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$

1. Equation homogène.

On appelle équation homogène, l'équation avec le second membre égal à 0 (i.e. $b = 0$).
La solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$x(t) = \lambda\, e^{-A(t)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constant arbitraire, et A est une primitive de a (c'est à dire $A'(t) = a(t)$ pour tout $t \in I$).
Dans le cas où a est une constante, on obtient :

$$x(t) = \lambda\, e^{-at}$$

2. Une solution particulière de l'équation originelle (1).

Cela peut être très difficile à trouver ... Cependant, dans bien des cas nous savons faire. Le cas le plus simple est $b(t)$ constante. Dans ce cas ci, une solution particulière est : $x_p(t) = b/a(t)$ pour t tel que a non nul.

3. La solution générale de l'équation originelle (1).

Elle est de la forme :

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constant arbitraire.

2 Equations différentielles du 2nd ordre homogènes à coefficients constants

Soient $b, c \in \mathbb{R}$. On cherche la fonction $x(t)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable, qui vérifie l'EDO linéaire du 2nd ordre homogène et à coefs constants suivante :

$$x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0. \tag{2}$$

On appelle *équation caractéristique* associée à (2) l'équation suivante :

$$r^2 + b\,r + c = 0. \tag{3}$$

On calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4c$ et on peut ensuite distinguer les trois cas suivants.

1. Si $\Delta > 0$. L'équation (3) a deux racines réelles

   $$r_1 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{\Delta}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{\Delta}).$$

   Les solutions de (2) s'écrivent alors :

   $$x(t) = \alpha\, e^{r_1\, t} + \beta\, e^{r_2\, t}$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires.

   Cas particulier : $b = 0$. Dans ce cas, on a $r_1 = -r_2 = \sqrt{-c}$. Une écriture équivalente des solutions est alors :

   $$x(t) = a_1\, \mathrm{ch}(\sqrt{-c}\, t) + a_2\, \mathrm{sh}(\sqrt{-c}\, t),$$

   où $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires ($a_1 = \alpha + \beta$, $a_2 = \alpha - \beta$) et ch, sh désignent les fonctions *cosinus et sinus hyperboliques*

   $$\mathrm{ch}(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \mathrm{sh}(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

2. Si $\Delta = 0$, (3) a une racine unique $r = -b/2$. Les solutions de (2) s'écrivent alors :

   $$x(t) = (\alpha + \beta\, t)\, e^{r\, t}$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires.

3. Si $\Delta < 0$. L'équation (3) a deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$ avec

$$z = \frac{1}{2}(-b + i\sqrt{-\Delta}), \quad \bar{z} = \frac{1}{2}(-b - i\sqrt{-\Delta}).$$

Les solutions de (2) s'écrivent :

$$x(t) = (\alpha + i\beta)\, e^{z\,t} + (\alpha - i\beta)\, e^{\bar{z}\,t}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires.

A noter que dans ce cas, une écriture équivalente des solutions est

$$x(t) = a_1\, e^{-bt/2} \cos(\sqrt{-\Delta}\, t/2) + a_2\, e^{-bt/2} \sin(\sqrt{-\Delta}\, t/2),$$

où $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires ($a_1 = 2\alpha$, $a_2 = -2\beta$).