INSA Toulouse, cycle préparatoire.
Formation continue.

TD Séries de Fourier

Exercice 1

a. Démontrer que :

$$\int_{-L}^{L} sin(\frac{k\pi x}{L})\ dx \ = \ 0 \text{ pour } k = 1, 2, 3, ...$$

et

$$\int_{-L}^{L} cos(\frac{k\pi x}{L})\ dx \ = \ 0 \text{ pour } k = 1, 2, 3, ...$$

b. Démontrer que :

$$\int_{-L}^{L} cos(\frac{m\pi x}{L})cos(\frac{n\pi x}{L})\ dx \ = \ L \text{ si } m = n; \ = 0 \text{ sinon}$$

et

$$\int_{-L}^{L} sin(\frac{m\pi x}{L})sin(\frac{n\pi x}{L})\ dx \ = \ L \text{ si } m = n; \ = 0 \text{ sinon}$$

$(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

A toutes fins utiles, on rappelle les formules de trigonométrie suivantes :
$cosA\ cosB = \frac{1}{2}(cos(A - B) + cos(A + B))$
et $sinA\ sinB = \frac{1}{2}(cos(A - B) - cos(A + B))$

Exercice 2

Développer en série de Fourier la fonction "créneau" 2π-périodique :
$f(x) = -1$ pour $x \in]-\pi, 0[$; $f(x) = +1$ pour $x \in [0, \pi]$.

Quelle est la valeur de la série en $x = 0$?

Exercice 3

On considère la fonction $f(x)$, 2π-périodique :
$f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, +\pi]$.

1. Développer en série de Fourier la fonction f.

2. En déduire les sommes des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Indice. Utiliser soit l'égalité de Parseval soit une valeur de Série calculée.

Exercice 4

1. Trouver les coefficients de Fourier correspondant à la fonction périodique de période 10 définie par : $f(x) = 0$ si $x \in]-5, 0[$ et $f(x) = 3$ si $x \in]0, 5[$.

2. Ecrire la série de Fourier correspondante.

3. Comment doit être définie la fonction $f(x)$ aux points $x = -5$, $x = 0$ et $x = 5$ pour que la série de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [-5, 5]$?

Exercice 5

1. Soit f la fonction impaire et 2π-périodique telle que : $f(x) = (\pi - x)$ pour $x \in [0, \pi[$.
a) Tracer le graphe de f.
b) Calculer la série de Fourier $S(x)$ de f.

2. Calculer $S(\pi/2)$ en utilisant le théorème de Dirichlet.

3. En utilisant le résultat de la question 2), calculer la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$