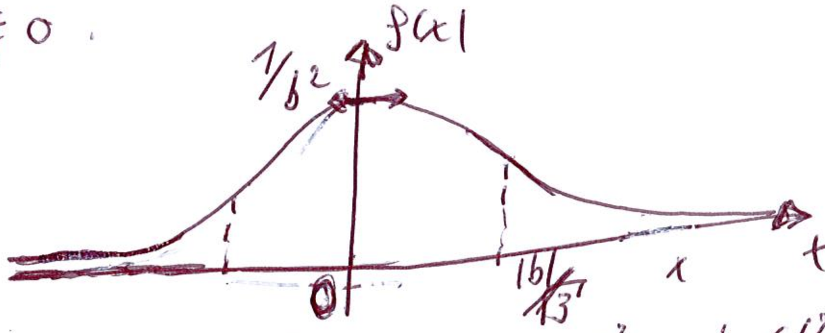
Exo. T.F. d'onde Lorenzienne.

$$f(x) = \frac{1}{b^2+x^2}, \; b^2 \neq 0.$$

1) a) f paire



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}(b^2+x^2)$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{b^2}{3}$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

b) Calculons $\mathcal{F}(e^{-b|x|})$; $b>0$.

$g(x) = e^{-b|x|}$ paire d'où $\mathcal{F}(e^{-b|x|})$ réelle, et :

$$\mathcal{F}(e^{-b|x|})(k) = 2\int_0^{+\infty} e^{-bx} \cos(kx)\, dx$$

ou encore :

$$\mathcal{F}(e^{-b|x|}) = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-bx} e^{-ikx}\, dx\right)$$

[Rappels : $\mathrm{Re}(a_0+ib_0) = a_0$; $\int e^{ix}dx = \frac{e^{ix}}{i} = -ie^{ix}$].

$$\text{D'où } \mathcal{F}(e^{-b|x|}) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{+e^{-(b+ik)x}}{b+ik}\right)\Bigg|_{x=0}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{b-ik}{b^2+k^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(e^{-b|x|})(k) = \frac{2b}{b^2+k^2}}$$

c) On a donc :

$$\mathcal{F}\left(e^{-b|x|}\right)(y) = 2b \cdot \frac{1}{b^2+y^2} = 2b \cdot f(y).$$

Or, rappel, on a la propté suivante :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\, \mathcal{F}\circ\mathcal{F}\left(f(+x)\right)(x) = f(-x) \quad \forall x.}$$

D'où :

$$e^{-b|x|} = \frac{2b}{2\pi}\, \mathcal{F}\left(f(y)\right)(x)$$ (par linéarité de l'opérateur $\mathcal{F}(\cdot)$)

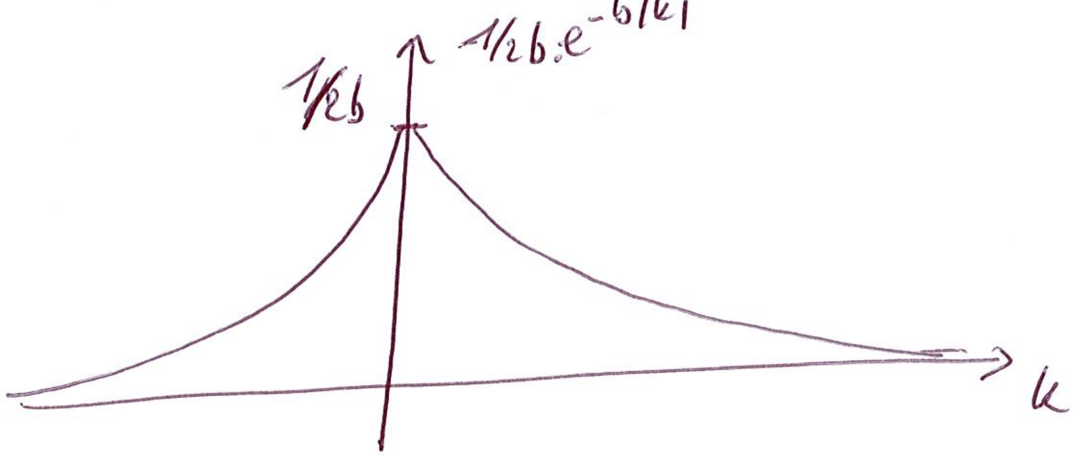
Ou encore :

$$\mathcal{F}\left(f(x)\right)(k) = \frac{\pi}{b}\, e^{-b|k|}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{1}{b^2+x^2}\right)(k) = \frac{\pi}{b}\, e^{-b|k|}}\ ,\quad \underline{b>0}$$

d) Graphe de $\hat{f}(k)$; $\hat{f}(k)$ paire



- Remarque. Calculer directement

$$\mathcal{F}(f(x))(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{b^2+x^2} e^{-ikx}\, dx$$

ne semble pas aisé à première vue.