INSA Toulouse, cycle préparatoire

Mathématiques - Analyse 1

Comportement de fonctions : équivalences de fonctions, développements limités, développements asymptotiques.

Intégration : intégrales simples, fonctions rationnelles, intégrales généralisées.

Ressources issues de nombreux enseignants (-chercheurs) de la communauté et tout particulièrement de l'INSA Toulouse, département de mathématiques appliquées (GMM).

Polycopié édité par J. Monnier, professeur INSA.

jerome.monnier@insa-toulouse.fr

Table des matières

Première partie

Equivalences, Développements Limités, Développements Asymptotiques

Chapitre 1

Equivalences de fonctions

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle ayant au moins deux points et sauf mention contraire, $f : I \to \mathbb{R}$ désigne une fonction définie sur I, à valeurs réelles.

1. Comparaison de fonctions

Dans cette section, a appartient à $\bar{\mathbb{R}}$ i.e. a est un réel fini ou bien a est égal à $\pm\infty$. Les fonctions considérées sont définies dans un voisinage de a (ou de a^+ ou de a^-), sauf peut-être en a.

1.1. Notations de Landau.

1.1.1. *Définitions.* Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (ou de a^+ ou de a^-), sauf peut-être en a. On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a. On introduit ici deux notations.

Définition 1.1. *On dit que f est **dominée par** g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{O}(g)$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big)$ s'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ tels que si $|x-a| \leq \alpha$ alors $|f(x)| \leq \lambda |g(x)|$. Autrement dit, $\dfrac{f}{g}(x)$ est borné au voisinage de a.*

Définition 1.2. *On dit que f est **négligeable devant** g en a et on note $f = \underset{a}{o}(g)$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x-a| \leq \alpha$ alors $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$. Autrement dit, $\dfrac{f}{g}(x)$ tend vers 0, au point a.*

On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \iff \text{il existe une fonction } \varepsilon \text{ telle que } f(x) = g(x)\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0}$$

Vous pouvez choisir l'écriture qui vous convient le mieux. Dans les deux cas, il est important de faire figurer le point où ces égalités ont lieu, en mettant le point a sous le signe o dans le premier cas, et en écrivant $\lim_a \varepsilon(x) = 0$ dans le deuxième.
En effet, cette notion "f négligeable devant g" est une <u>notion locale</u>. On ne compare f et g qu'au voisinage du point a.

Les caractérisations utilisées dans la pratique s'obtiennent directement :

PROPOSITION 1.1.

(1) $f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$ *si et seulement si* $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(2) $f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big)$ *si et seulement si* $\dfrac{f}{g}(x)$ *est bornée dans un voisinage de* a.

Par exemple on a :

(1) $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.

(2) $x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.

Aussi on écrit :

(1) $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(2) $f(x) = \underset{x\to a}{O}(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.

Dans ce cours, on se servira très majoritairement du concept de $o_a(.)$, et très peu du $O_a(.)$.

** POUR ALLER PLUS LOIN

1.1.2. *Propriétés. En utilisant les caractérisations ci-dessus, on obtient les résultats suivants.*

PROPOSITION 1.2. *Soit f, g et h des fonctions définies dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. On suppose que g et h ne s'annulent pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a.*

(1) Si $f = \underset{a}{o}(g)$ *alors* $f = \underset{a}{O}(g)$.

(2) Si $f = \underset{a}{o}(g)$ *alors* $fh = \underset{a}{o}(gh)$.

(3) Si $f = \underset{a}{O}(g)$ *alors* $fh = \underset{a}{O}(gh)$.

Proposition 1.3. *Soit* f, g, φ, ψ *des fonctions définies dans un voisinage de* a*, sauf peut-être en* a*. On suppose que* g *et* ψ *ne s'annulent pas dans un voisinage de* a *sauf peut-être en* a*.*

(1) Si $f = \underset{a}{o}(g)$ *et* $\varphi = \underset{a}{o}(\psi)$ *alors* $f\varphi = \underset{a}{o}(g\psi)$.

(2) Si $f = \underset{a}{O}(g)$ *et* $\varphi = \underset{a}{O}(\psi)$ *alors* $f\varphi = \underset{a}{O}(g\psi)$.

(3) Si $f = \underset{a}{o}(g)$ *et* $\varphi = \underset{a}{O}(\psi)$ *alors* $f\varphi = \underset{a}{o}(g\psi)$.

**

1.1.3. *Croissances comparées.* Les résultats suivants, appels "croissances comparées", comparent les croissances des *fonctions puissances, logarithme, et exponentielle.* Ces résultats sont très souvent utiles.

Proposition 1.4. *Soit* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

(1) $(\ln x)^\beta = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\alpha)$

i.e. en $+\infty$*, la puissance polynomiale est toujours "plus forte" que le* ln.

(2) $x^\beta = \underset{x \to +\infty}{o}(e^{\alpha x})$

i.e. en $+\infty$*, l'exponentielle est toujours "plus forte" que la puissance polynomiale.*

(3) $|\ln x|^\beta = \underset{x \to 0^+}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

Tracer de telles fonctions avec un logiciel graphique et/ou calculer de telles quantités par exemple pour : $\alpha = 1/2,\ \beta = 10$ avec x moyennement grand puis très grand...

Notons par exemple que (1) est équivalent à $\lim\limits_{+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$.

De la proposition précédente découlent en particulier les majorations suivantes :

Pour α et β strictement positifs,

(1) pour x dans un voisinage de $+\infty$, $(\ln x)^\beta \leq x^\alpha$,

(2) pour x dans un voisinage de $+\infty$, $x^\beta \leq e^{\alpha x}$,

(3) pour x dans un voisinage de 0^+, $|\ln x|^\beta \leq \frac{1}{x^\alpha}$.

Ceci reste vrai pour $\beta \leq 0$ bien entendu.

1.2. Equivalents.

1.2.1. *Définition.* Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (ou de a^+ ou de a^-), sauf peut-être en a. On suppose que f et g ne s'annulent pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a. On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a et on note :

$$\boxed{f \underset{a}{\sim} g \text{ ou } f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ si } f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))}$$

De manière équivalente,

$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ si et seulement s'il existe une fonction } \varepsilon \text{ telle que } f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))}$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 1.5. *On a la caractérisation suivante.*

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \textit{si et seulement si} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Proposition 1.6. *On a :*

(1) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *si et seulement si* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$*. (Commutativité).*

(2) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *alors* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$*. (Transitivité).*

Notez qu'une fonction équivalente à une fonction donnée n'est pas unique.
Il est recommandé de n'écrire qu'un seul terme dans le membre de droite d'une équivalence.
Prenons un exemple : $f(x) = x\ln x - x + \ln x - 4 - 1/x$.
En utilisant les croissances comparées, on obtient $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln x$. Mais il est vrai également que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln x - x$, ainsi que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln x + 182\sqrt{x}$.
En fait on peut ajouter à $x\ln x$ toute fonction qui est négligeable devant $x\ln x$ en $+\infty$.
En termes d'équivalents, on n'apporte aucune information supplémentaire en mettant plusieurs termes : *seul le terme dominant a un sens.*
Par contre, on peut écrire $f(x) = x\ln x - x + \underset{+\infty}{o}(x)$, donc : $(f(x) - x\ln x) \underset{+\infty}{\sim} -x$.
(En fait on vient d'écrire là un "développement asymptotique" de f en $+\infty$; nous verrons cette notion au paragraphe suivant).

Exercice 1.1.

a) Donner un équivalent en 0 *de* $\cos(x)$.

b) Donner un équivalent en 0 *et en* $+\infty$ *de* $f(x) = x + cos(x)$*.*

COROLLAIRE 1.1. *Soit f une fonction polynômiale de la forme*

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n, \quad \text{avec } 0 < p \leq n,\ a_p \neq 0,\ a_n \neq 0$$

Alors,

$$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p.$$

EXERCICE 1.2. *Donner les équivalents de* $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x$ *en* 0 *et en* $+\infty$*.*

1.2.2. *Premières propriétés.*

PROPOSITION 1.7.

(1) Soit $l \in \mathbb{R}^*$*. On a* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} l$ *si et seulement si* $\lim_{x \to a} f(x) = l$*.*

(2) Si $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $\lim_{x \to a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$*, alors* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *et vaut* l*.*

(3) Si $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* f *et* g *sont du même signe au voisinage de* a*.*

PROPOSITION 1.8. *Soit* f, g *telles que* $f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$*. Alors,*

$$f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

1.2.3. *Opérations sur les équivalents.* Voici la liste des opérations usuelles "compatibles" avec les équivalents.

PROPOSITION 1.9. *(1) Produit : si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$*, alors* $f\varphi \underset{a}{\sim} g\psi$*.*

(2) Quotient : si $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$*, alors* $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{\psi}$*.*

(3) Composition à droite : si $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = a$*, alors* $f(\varphi(x)) \underset{x \to x_0}{\sim} g(\varphi(x))$*.*

Par contre, la composition à gauche n'est *pas possible a-priori* :

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \not\Rightarrow \quad \varphi(f(x)) \underset{a}{\sim} \varphi(g(x))$$

Un exemple. Soit $f : x \mapsto x^2 + x$ et $g : x \mapsto x^2$. On a : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$. On a aussi : $\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par conséquent : $e^{f(x)} \underset{+\infty}{\nsim} e^{g(x)}$...

Aussi *l'addition n'est pas possible sans vérification préalable.* Donnons un exemple. Soient $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto -x^2 - x$. On a : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2$.
On a par ailleurs : $f(x) + g(x) = -x + 1 \underset{+\infty}{\sim} -x$. C'est à dire que :

$$f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \varphi \underset{a}{\sim} \psi \quad \not\Rightarrow \quad f + \varphi \underset{a}{\sim} g + \psi$$

Par contre dans le cas particulier suivant, l'addition des équivalents est licite.

PROPOSITION 1.10. *(Addition) Soient λ, μ deux réels, $f \underset{a}{\sim} \lambda h$ et $g \underset{a}{\sim} \mu h$.*
- *Si $\lambda + \mu \neq 0$, $f + g \underset{a}{\sim} (\lambda + \mu)h$,*
- *Si $\lambda + \mu = 0$, $f + g = \underset{a}{o}(h)$.*

** POUR ALLER PLUS LOIN. Dans les cas particuliers suivants, on peut composer à gauche.

PROPOSITION 1.11. *On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. Alors,*

(1) Valeur absolue : $|f| \underset{a}{\sim} |g|$.

(2) Puissance : pour tout $\alpha > 0$, si g est strictement positive au voisinage de a, $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.
En particulier, $\sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{g}$.

(3) Logarithme <u>sous conditions</u> : si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l \in [0, +\infty]$ et si $l \neq 1$, alors $\ln f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ln g(x)$.

(4) Exponentielle <u>sous conditions</u> : si $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, alors $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$.

EXEMPLE 1.1. *Soit $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$. On a $x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $\sqrt{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = x$.*
D'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

**

1.2.4. *Equivalents des fonctions usuelles en* 0.

Rappelons la définition de la dérivée :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) = f'(a)$$

De ce résultat, se déduit immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 1.12. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I, $a \in I$. Si f est dérivable en a avec $\underline{f'(a) \neq 0}$, alors : $\boxed{f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x - a)}$*

Notons qu'un Développement Limité (DL) de Taylor à l'ordre k (pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$) permet de généraliser ce résultat. Les DL de Taylor sont étudiés au chapitre suivant.

De cette proposition, on déduit les équivalents des fonctions suivantes.

$\sin x \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{sh} x \underset{0}{\sim} x$
$\tan x \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{th} x \underset{0}{\sim} x$
$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$	$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
$\arcsin x \underset{0}{\sim} x$	$\arctan x \underset{0}{\sim} x$
$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$	pour tout $\alpha \neq 0$

EXERCICE 1.3. *Démontrer les équivalents classiques ci-dessus.*

Notons que le résultat précédent ne permet pas de donner l'équivalent en 0 de $\cos x$ car $\cos'(0) = 0$....

Mais on a la

PROPOSITION 1.13. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I, $a \in I$. Supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k_0)}(a)$ existe et soit non nul.*
On définit :

$$s = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^s$ sur I , alors

$$\boxed{f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} \frac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^s}$$

Dans le cas de l'équivalent en 0 de $\cos x$ on obtient : $(\cos x - 1) \sim_0 -1/2x^2$.
On a alors : $\cos x \sim_0 1 - 1/2x^2$, soit donc : $\cos x \sim_0 1$.

POUR ALLER PLUS LOIN.

Démonstration. La formule de Taylor-Young à l'ordre s pour f en a s'écrit

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^s + (x-a)^s\varepsilon(x), \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$$

c'est-à-dire $f(x) - f(a) = \dfrac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^s + \underset{x\to a}{o}((x-a)^s)$. D'où le résultat. □

Remarque 1.1. *Pour étudier une fonction au voisinage d'un* <u>*autre point que* 0</u>*, on se ramène à une étude en 0 à l'aide du changement de variable ad-hoc.*

. *Pour étudier $f(x)$ au voisinage de $x = a$ (a fini), on pose $y = (x-a)$ et on étudie $g(y) = f(a+y)$ au voisinage de $y = 0$.*

. *Pour étudier $f(x)$ au voisinage de $x = \pm\infty$, on pose $y = 1/x$ et on étudie $g(y) = f(1/y)$ au voisinage de $y = 0$.*

2. Calculs de limites à l'aide d'équivalents

Le concept d'équivalent constitue un outil très utile pour calculer des limites a-priori indéterminées.

Exemple 1.2. *Calculer la limite de $f(x)$ quand $x \to a$ dans les différents cas suivants. On notera en premier lieu l'indétermination a-priori.*

(1) $f(x) = \dfrac{(1+x^2)\tan x}{\sin(2x)}$, $a = 0$.
On a : $1 + x^2 \underset{0}{\sim} 1$, $\tan x \underset{0}{\sim} x$ *et* $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$.
En vertu des propriétés de multiplication-division d'équivalents, on a :
$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1\cdot x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.
Finalement : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

(2) $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1\right)$, $a = +\infty$.
On a : $\dfrac{x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On peut donc utiliser un équivalent de $e^u - 1$ en 0.
On a : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Avec $u = \dfrac{x}{x^2+1}$, *on obtient :* $e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Ainsi : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}x = 1$.
Finalement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Chapitre 2

Formules de Taylor & Développements Limités

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point a de I, alors on peut écrire pour tout $x \in I$,

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x), \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0}$$

ou encore : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{a}{o}(x-a)$.
Cela revient à approcher f par une fonction affine au voisinage de a.

Exercice 2.1. *Faire un dessin illustrant cette relation.*

1. Formules de Taylor

Dans ce partie sont présentés des théorèmes qui étendent le résultat precedent : ce sont les formules dites de Taylor. Sous des hypothèses de régularité sur la fonction f, on écrit f, au voisinage d'un point a sous la forme d'un polynôme en $(x-a)$ plus un reste :

$$\boxed{f(x) = P_n(x-a) + \text{reste}, \quad P_n \text{ polynôme de degré } \leq n}$$

Les diverses formules diffèrent par la forme du reste.

Le "reste" est appelé ainsi car négligeable par rapport à $(x-a)^n$ au voisinage de a : "reste"$=o(x-a)^n$. Rappelons que cela signifie que "reste" tend vers 0 quand $x \to a$, et ce plus vite que $(x-a)^n$. Autrement écrit :

$$\frac{reste}{(x-a)^n} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

Nous reviendrons sur ces notions de comparaison de fonctions dans le chapitre suivant.

1.1. Formule de Taylor-Young.

1.1.1. *Enoncé.*

Théorème 2.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in I$.*
Il existe une fonction ε telle que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On notera la validité uniquement *locale* de ce développement.

On notera aussi que l'on doit avoir f de classe $\mathcal{C}^n$ (régularité de la fonction).

Il découle le résultat suivant.

Proposition 2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et si $f^{(n+1)} = 0$ (i.e. $f^{(n+1)}(x) = 0$ pour tout $x \in I$), alors f est un polynôme de degré au plus n sur I.*

Exercice 2.2.
a) Montrer que pour les fonctions sin(x) et exp(x), les formules de Taylor existent en tout point a de $\mathbb{R}$ et pour tout degré n, $n \geq 1$.
b) Donner l'expression de leur formule de Taylor-Young au point 0.

Exercice 2.3. *Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 3 en* 0 *de : cos*$^3(x)$.

On obtient ce que l'on appelle par la suite le Developpement Limité (DL) de Taylor d'ordre 3.

Exemple 2.1. *Revenons à un calcul de limite un peu ardu. Soit :*

$$f(x) = \frac{\tan x(1 - \sin x)}{\sin(2x)}$$

On cherche à calculer la limite de f au point $a = \pi/2$.

On effectue le changement de variable $h = (x - a)$ pour se ramener en 0. On obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin\left(h + \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \sin\left(h + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos\left(h + \frac{\pi}{2}\right)\sin(2h + \pi)} \\ &= \frac{\cos(h)(1 - \cos(h))}{\sin(h)\sin(2h)} \end{aligned}$$

Un DL de Taylor montre que : $1 - \cos(h) \sim_0 \dfrac{h^2}{2}$ *; ce qui donne finalement :*

$$f(x) \sim_{h\to 0} \frac{h^2/2}{h \cdot 2h} = \frac{1}{4}$$

On a donc : $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

POUR ALLER PLUS LOIN

1.2. Formule de Taylor-Lagrange.

THÉORÈME 2.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a, x \in I$, il existe $c \in]a, x[$ tel que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

2. Développements limités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
L'objectif d'un Développement Limité (DL) est de comparer f à une fonction *polynômiale* dans un *voisinage* de a, $a \in I$.

2.1. Définition et lien avec les formules de Taylor. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *Développement Limité à l'ordre n en a (DL_n en a)* s'il existe un *polynôme* à coefficients réels P_n de degré au plus n, et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, tels que : $\forall x \in I$,

$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{f(x) = P_n(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)}$$

P_n s'appelle la partie principale de f d'ordre n en a.

On peut montrer qu'un DL en un point a, s'il existe, est unique. Par conséquent, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ en un point a (hypothèse de régularité requise), *la formule de Taylor-Young d'ordre n fournit l'unique* DL_n *de* f *au point* a

THÉORÈME 2.3. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* I, $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $a \in I$.
Alors f *admet un* DL_n *en* a *de la forme suivante :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

L'ordre d'un DL se lit sur le reste. Par exemple, $f(x) = 2x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$ est un DL_7 de la fonction f au point $x = 0$.

** POUR ALLER PLUS LOIN.
La définition ci-dessus peut s'étendre à f définie seulement sur $I \setminus \{a\}$ (dans le cas a réel). Supposons que f admet un DL_0 en a, du type $f(x) = a_0 + \underset{x\to a}{o}(1)$. En faisant tendre x vers a, on obtient $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a_0$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en a, en posant $f(a) = a_0$. Dans la suite, on supposera donc que f est définie et continue en a. On supposera également que la fonction ε qui apparaît dans le DL est continue en a (avec $\varepsilon(a) = 0$).

REMARQUE 2.1. *De cette première propriété, on déduit par exemple que* ln *n'admet pas de DL en 0, ou encore que* $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'admet pas de DL en 0, et ce à aucun ordre.*

Supposons maintenant que f est continue en a et admet un DL_1 en a, de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$. On a vu que $a_0 = f(a)$. On obtient donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = a_1 + \underset{x\to a}{o}(1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} a_1$. La fonction f est donc dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

Réciproquement, si f est dérivable en a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)$ donc $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$, et f admet un DL_1 en a.
On a donc le résultat suivant.

Proposition 2.2.

(1) f admet un DL_0 en a si et seulement si f est continue en a.

(2) f admet un DL_1 en a si et seulement si f est dérivable en a

Attention. Ceci ne se généralise pas pour $n \geq 2$.

Exemple 2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$.
Montrons que f admet un DL_2 en 0. On a déjà vu que $x \sin \dfrac{1}{x} = \underset{x\to 0}{o}(1)$ donc $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
Etudions la dérivabilité seconde de f en 0. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et pour $x \neq 0$,*

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

*Donc, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$.
Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, dont le premier terme tend vers 0 en 0 mais dont le second terme n'admet pas de limite en 0. Ainsi, f n'est pas deux fois dérivable en 0.*

** Fin "pour aller plus loin" **

2.2. Parité.

Lorsque le fonction considérée est paire ou impaire, il est plus qu'intéressant de se rappeler du résultat suivant.

Proposition 2.3. *Soit I un intervalle symétrique par rapport à l'origine, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet un DL_n en 0, $n \geq 0$.*

(1) Si f est paire, alors $P_n(f)$ n'a que des puissances paires.

(2) Si f est impaire, alors $P_n(f)$ n'a que des puissances impaires.

Autrement dit, $P_n(f)$ préserve la parité de f.

** Pour aller plus loin.

Développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$ s'il existe un polynôme à coefficients réels P_n de degré au plus n et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ une fonction tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^n \varepsilon(x), \ \lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

**

2.3. Exemples fondamentaux. Commencons par un exemple trivial : le cas ou f est elle-meme un polynome !

Soit f une fonction polynômiale de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p, \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \ a_p \neq 0.$$

Alors f admet un DL en 0 à tout ordre. En effet :

- Si $n \geq p$, $a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ est un polynôme de degré $\leq n$, le reste est nul.
- Si $n < p$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n(a_{n+1} x + \ldots + a_p x^{p-n}) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.

(1) Au travers de l'astuce d'écriture suivante (astuce à retenir) :

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$$

On en déduit deux développements limités fort utiles en pratique.

En effet, on obtient :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)}$$

Ou encore en posant $x = -x$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)}$$

(2) La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, $\exp^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La formule de Taylor-Young donne alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n).}$$

(3) Les fonctions cosinus et sinus étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elles admettent un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(k)}(0) = 1$, $\sin^{(k)}(0) = 0$ si k est pair, $\cos^{(k)}(0) = 0$, $\sin^{(k)}(0) = 1$ si k est impair.

La formule de Taylor-Young donne alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}).}$$

et

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}).}$$

Il s'agit du DL à l'ordre $2n+1$ de cos et du DL à l'ordre $2n+2$ de sin. Notons aussi que par parité, il s'agit en fait du DL à l'ordre $2n+2$ (resp. $2n+3$) de cos (resp. sin).

(4) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ pour tout $x > -1$, pour tout

$k \in \mathbb{N}$.

La formule de Taylor-Young donne alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

(5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, $f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La formule de Taylor-Young donne alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

Pour $\alpha = -1$, on retrouve le DL de $\dfrac{1}{(1+x)}$ en 0.

Pour $\alpha = 1/2$ et $\alpha = -1/2$, on obtient le DL de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto 1/\sqrt{1+x}$ en 0.

A l'ordre 2, cela donne

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2), \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2). \end{aligned}$$

Exercice 2.4. *Retrouver vous-memes par le calcul ces DL.*

2.4. Développements limités ailleurs qu'au point 0. Lorsque l'on veut étudier une fonction f au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a quelconque (a-priori différent de 0), on peut se ramener à une fonction auxiliaire en 0 en faisant les changements de variables suivants.

— Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - a$.
  Alors $h \to 0$ quand $x \to a$, $f(x) = f(a+h)$ et on étudie $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0.

— Si $a = \pm\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$.
  Alors $h \to 0$ quand $x \to a$, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ et on étudie $h \mapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0.

Dans la suite, nous énoncerons les résultats pour des développements limités au voisinage de 0, ceux concernant des développements limités au voisinage d'autres points s'en déduisent par les changements de variables précédents.

2.5. Opérations sur les développements limités. Notons que pour les fonctions pour lesquelles les dérivées successives sont simples à calculer, le formule de Taylor-Young permet d'obtenir rapidement le développement limité de la fonction au point considéré. Mais si les dérivées successives sont lourdes à calculer, ou bien si la forme d ela fonction s'y prete, on utilise plutot les théorèmes d'opérations qui suivent.

2.5.1. *Addition et multiplication par une constante.*

Théorème 2.4. *(Addition). Soit I un intervalle tel que $0 \in I$ ou 0 extrémité de I. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $(\lambda f + \mu g)$ admet un DL_n en 0 et*

$$\boxed{P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g)}$$

Exemple 2.3. *On a vu : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$.
Donc : $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$. En sommant et en soustrayant, on obtient simplement les DL de* ch *et* sh *en 0 !*
On remarquera que ch *étant la partie paire de l'exponentielle, son DL en 0 ne contient que des puissances paires, et que* sh *étant la partie impaire de l'exponentielle, son DL en 0 ne contient que les puissances impaires.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)}$$

Il s'agit la du DL à l'ordre $2n+1$ de ch et du DL à l'ordre $2n+2$ de sh.

2.5.2. *Produit.*

THÉORÈME 2.5. *(Produit). Soit I un intervalle tel que $0 \in I$ ou 0 extrémité de I. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0.*
Alors le produit fg admet un DL_n en 0 et

$$\boxed{P_n(fg) \text{ s'obtient en tronquant à l'ordre } n \text{ le polynôme } P_n(f) \cdot P_n(g).}$$

EXEMPLE 2.4. *Déterminons le DL_2 en 0 de $f : x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$. Ce DL existe puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.*
On a : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ et $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.
Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 + x - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &\quad \text{NB. Les termes de degré} > 2 \text{ du produit "rentrent" dans le } o \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

2.5.3. *Quotient.* Soit I un intervalle tel que $0 \in I$ ou 0 extrémité de I. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. On suppose de plus que $\underline{g(0) \neq 0}$.
On cherche a écrire un DL_n en 0 de $\dfrac{f}{g}(x)$.
La démarche est la suivante. On écrit le DL_n de g au point 0 :

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + .. + \frac{g^{(n)}}{n!}x^n + \underset{0}{o}(x^n)$$

Soit : $g(x) = P_n(g(x)) + \underset{0}{o}(x^n)$. On factorise $g(0)$, ce qui donne :

$$P_n(g(x)) = g(0)(1 + Q_n(x))$$

où Q_n est un polynôme de degré $\leq n$ qui vérifie $Q_n(0) = 0$.
Ainsi on a développé g sous la forme suivante :

$$g(x) = g(0)\left(1 + Q_n(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\right)$$

Comme g ne s'annule pas en 0, $1/g$ est définie dans un voisinage de 0 et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(0)\left(1+Q_n(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\right)} \\
&= \frac{1}{g(0)}\frac{1}{(1+u(x))}
\end{aligned}$$

avec $u(x)=Q_n(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$, $u(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Soit :

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(0)}\left(1-u+u^2+\ldots+(-1)^n u^n+\underset{u\to 0}{o}\left(u^n\right)\right)$$

On remplace ensuite $u(x)$ par son expression $(Q_n(x)+o_{x\to 0}(x^n))$, et on tronque à l'ordre n en x.
On obtient alors le DL_n de $\frac{1}{g}(x)$ en 0 et finalement celui du quotient $\frac{f}{g}$ par produit.

En résumé, **le point clef pour obtenir le DL d'un quotient au point a, est de faire apparaitre une expression de la forme : $\frac{1}{1+u(x)}$, avec** $u(a)=0$.

Exemple 2.5. *Déterminons le DL_5 de* $\tan$ *en 0, en considérant* $\tan(x)$ *comme étant le quotient de* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$.
NB. On pourrait obtenir plus simplement le DL de $\tan$ *en appliquant directement la formule de Taylor.*
On a :

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)}{1\underbrace{-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)}_{=u\underset{x\to 0}{\to}0}} \\
&= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\left(1-u+u^2+\underset{u\to 0}{o}(u^2)\right)
\end{aligned}$$

Avec : $u^2=\frac{x^4}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)$. *D'ou :*

$$\begin{aligned}
\tan x &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\left(1+(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!})+\frac{x^4}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\\
&= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)
\end{aligned}$$

Dans le cas où $g(0)=0$, on peut parfois conclure. La procédure est toujours la même. Prenons un exemple.

EXEMPLE 2.6. *Déterminons le* DL_3 *de* $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ *en 0. Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 0, mais* $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\sim} \sin x$*, donc* f *admet une limite en 0, qui vaut 1.*

Comme précédemment, our obtenir le DL de f *en 0 (s'il existe), on cherche à se ramener à une fonction du type* $x \mapsto v(x)/(1+u(x))$*, avec* $u(0)=0$*.*

Pour cela on met en facteur la plus petite puissance dans les DL du numérateur et du dénominateur, ici x*. Par cette procédure, on va diminuer d'un ordre ces DL. Il faut donc partir des* DL_4 *de ces fonctions pour obtenir un* DL_3 *de* f*. On a*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)}{x-\frac{x^3}{3!}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)}\\
&= \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\
&= \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)\left(1+\frac{x^2}{6}\right)+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$

** Pour aller plus loin

2.5.4. *Composition.*

Théorème 2.6. *Soit I et J deux intervalles tels que $0 \in I$, $0 \in J$. Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\underline{f(0) = 0}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. Alors la composée $g \circ f$ admet un DL_n en 0 et*

$\boxed{P_n(g \circ f) \text{ s'obtient en tronquant à l'ordre } n \text{ le polynôme } P_n(g) \circ P_n(f)}$.

Exemple 2.7. *Déterminons le DL_4 en 0 de $x \mapsto e^{\cos x}$. Il faut prendre garde ici : $\cos 0 = 1$, donc on ne peut <u>pas</u> utiliser directement le DL de $\exp$ en 0. On écrit le DL de $\cos(x)$ en 0, on obtient :*

$$e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$$

Ce qui donne (astuce) :

$$e^{\cos x} = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$$

On a fait ressortir : $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x\to 0}(x^4)$ tel que $u \underset{x\to 0}{\to} 0$!
On obtient alors :

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^4)\right) \\ &= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

2.5.5. *Intégration.*

Théorème 2.7. *Soit I un intervalle tel que $0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f admet un DL_n en 0 du type $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$. Alors toute primitive F de f sur I admet un DL_{n+1} en 0 de la forme*

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right).$$

Autrement dit, on integre le DL pour obtenir celui de sa primitive.
N'oubliez pas d'ajouter la constante d'intégration.

Exemple 2.8. *La fonction* arctan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *donc elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

Donc en intégrant ce DL, on obtient

$$\arctan x = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

2.5.6. *Dérivation.* -Attention, *sans hypothese de régularité suffisante sur f, il est interdit de dériver un DL.*
Il se peut que f admette un DL_n en a mais que f' n'admette pas de DL_{n-1} en a. Donnons un example.

Exemple 2.9. *Considérons* $f : x \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *si* $x \neq 0$, 0 *si* $x = 0$.
On a $f(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, *donc f admet un DL_1 en 0. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec* $f'(x) = 1 + 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. *La dérivée f' n'admet donc pas de limite en 0, d'où f' n'admet pas de DL_0 en 0.*

Cependant, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $n \geq 1$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et d'après la formule de Taylor-Young, *f' admet un DL_{n-1} en a* de la forme suivante (formule de Taylor habituelle) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \ldots + \frac{(f')^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n-1}\right) \\ &= \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n\right)' + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on peut donc dériver le DL_n de f pour obtenir le DL_{n-1} de f' en a.

Cette remarque n'est intéressante que si le DL_n de f en a n'a pas été obtenu à l'aide de la formule de Taylor-Young, c'est-à-dire en calculant les dérivées successives de f . En effet, dans le cas contraire pour obtenir un DL de f' il suffit de procéder de la meme maniere avec la formule de Taylor.

2.6. Formule de Taylor et extrema. La formule de Taylor-Young permet d'obtenir une condition suffisante d'extremum pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

THÉORÈME 2.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$.*

(1) Si $f''(a) > 0$, alors f admet un mimimum local strict en a.

(2) Si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local strict en a.

DÉMONSTRATION. On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a. Comme $f'(a) = 0$, on a

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x-a), \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x-a) = 0.$$

Supposons $f''(a) > 0$. Comme $\lim_{x\to a}\varepsilon(x-a) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x-a| < \eta$, $|\varepsilon(x-a)| \leq f''(a)/4$, donc $\varepsilon(x-a) \geq -f''(a)/4$ et $(x-a)^2\varepsilon(x-a) \geq -f''(a)(x-a)^2/4$. Ainsi, pour $|x-a| < \eta$, $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) \geq \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 = \frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 > 0.$$

La fonction f admet donc un minimum strict en a.
Le cas $f''(a) < 0$ est laissé en exercice. □

REMARQUE 2.2.

(1) La réciproque de ces propriétés est fausse. La fonction $f : x \mapsto x^4$ admet un miminum global en 0, $f'(0) = f''(0) = 0$.

(2) Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire. La fonction f peut admettre un maximum (par exemple $x \mapsto x^4$ en 0), un mimimum (par exemple $x \mapsto -x^4$ en 0), ou ni l'un ni l'autre (par exemple $x \mapsto x^3$ en 0).
Ces exemples sont en fait typiques.

Astuce. Pour déterminer le comportement de f au voisinage de a, on écrit son développement de Taylor (s'il existe) jusqu'au premier terme non nul après $f(a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a), \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x-a) = 0.$$

Le signe de $f(x) - f(a)$ est donné par celui de ce terme. Si n est impair, $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a donc f n'admet pas d'extremum en a.

Si n est pair, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a donc f admet un extremum en a.

3. Récapitulatif des Développements Limités des fonctions usuelles en 0

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+3})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$$

Chapitre 3

Développements Asymptotiques

1. Principe et premier exemple

Un *Développement Limité* (DL) à l'ordre n permet d'approcher localement une fonction (suffisamment régulière) par un *polynôme* de degré n.
Un *Développement Asymptotique* (DA) consiste à étendre la gamme de fonctions auxquelles on cherche à comparer la fonction donnée.

Notons également que toutes les fonctions n'admettent pas de développement limité en tout point.

L'idée d'un DA est de se ramener à des fonctions dont le comportement est bien connu. Les *familles de fonctions les plus utilisées* sont : $(x \mapsto (x-a)^n)_{n\in\mathbb{R}}$ et $(x \mapsto x^\alpha |\ln x|^\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$ et $(x \mapsto x^\alpha e^{\beta x})_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$.
Dans ce cours le cas que l'on rencontrera le plus souvent est celui de la famille $(x \mapsto (x-a)^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

On parle alors de *développement dans l'échelle* des $(x \mapsto (x-a)^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Notons bien que $n \in \mathbb{Z}$ et non $\mathbb{N}$.

Exemple 3.1. *Soit $f : x \mapsto xe^{(\frac{2x}{x^2-1})}$. On cherche un DA de f en $\pm\infty$, sans préciser a-priori sur quelle échelle ni à quel ordre.*
Traitons d'abord la fonction exposant. On a :

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x}\frac{1}{(1-\frac{1}{x^2})}$$

En faisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{x^2}$ *et utilisant le DL de* $\dfrac{1}{1-u}$ *en* 0 *(à un ordre relativement bas donc simple mais intuitivement "suffisamment élevé"), on obtient :*

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}+\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On pose : $v = \dfrac{2x}{x^2-1}$. *On a :* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} v = 0$. *On peut alors utiliser le DL de la fonction exponentielle en* 0 *:* $\exp(v) = 1 + v + v^2/2 + o_0(v^2)$. *Ce qui nous donne à l'ordre* 2 *:*

$$\begin{aligned} e^{(\frac{2x}{x^2-1})} &= 1+(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3})+\frac{1}{2}\frac{4}{x^2}+\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= 1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

Attention à bien prendre en compte tous les termes requis jusqu'à "l'ordre" choisi a-priori. Dans le cas présent, l'ordre visé est : $\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$. *A noter que l'on aurait aussi pu considérer le développement moins poussé suivant :* $e^{(\frac{2x}{x^2-1})} = 1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Finalement, on obtient le Développement Asymptotique de f *suivant :*

$$f(x) = x+2+\frac{2}{x}+\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En résumé, pour obtenir ce DA, on a composé les DL requis à un ordre suffisant et en conservant bien les termes d'un certain ordre fixé a-priori. Le résultat est un développement de la fonction qui diffère bien d'un DL : il s'agit d 'un développement dans une famille de fonctions autre que de (simples) polynômes. On parle alors de Développement Asymptotique (DA) de f.

2. Etude des branches infinies de fonctions

2.1. Sur l'utilité du DA. L'objet d'un D.A. est d'apporter de précieuses informations sur le comportement de la fonction considérée $f(x) = xe^{(\frac{2x}{x^2-1})}$ au voisinage d'un point.

Dans le cas de l'exemple précédent, on aurait pu noter avant tout développement que : $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$. Cependant ne nous renseigne pas beaucoup sur le comportement de cette fonction à l'infini...

Comment f va-t-elle à l'infini ? Comme une exponentielle ? un polynôme ? si oui, de quel degré ? un logarithme ? ou encore ?...

Le D.A. obtenu nous renseigne alors précisément sur le comportement de f à l'infini. En effet, on a montré que :

$$f(x) - (x+2) = \frac{2}{x} + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Autrement dit, le graphe de cette fonction f admet une droite asymptote à l'infini (d'é quation $y = (x+2)$), et reste au-dessus de sa droite asymptote.
Seul un DA peut nous renseigner sur ce type de comportement.

EXERCICE 3.1. *Faites un dessin illustrant le comportement de la fonction à l'infini.*

2.2. Asymptotes. Notons par la suite $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f,

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathcal{D}_f\}$$

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie lorsque l'une des deux coordonnées tend vers $\pm\infty$.
On cherche souvent à déterminer plus précisément l'allure de ces branches infinies.
Peut-on en particulier affirmer si $\mathcal{C}_f$ "ressemble" à une autre courbe plus simple ?

Pour cela, on dé finit la notion de courbes asymptotes. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a fini ou $\pm\infty$.

DÉFINITION 3.1. *On dit que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont asymptotes (ou que $\mathcal{C}_f$ admet $\mathcal{C}_g$ pour asymptote) au voisinage de a si :* $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = 0$.

Remarque 3.1. *Lorsqu'une fonction f admet une limite infinie en un point a fini,* i.e. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, *on dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ pour asymptote. Cette dernière dé finition ne rentre pas dans le cadre de la définition précédente car la droite d'équation $x = a$ n'est pas la courbe représentative d'une fonction, mais l'idée reste la même.*

Exercice 3.2. *Donner un exemple et faites un dessin illustrant ces propos.*

Positionnement d'une courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote $\mathcal{C}_g$. Lorsque l'on sait que deux courbes sont asymptotes au voisinage de a (fini ou $\pm\infty$), on se demande souvent quelle est leur position relative au voisinage de a.
Pour cela, il suffit d'étudier le signe de $(f - g)$ au voisinage de a. En effet,
- Si $f(x) - g(x) \geq 0$ au voisinage de a, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ au voisinage de a,
- Si $f(x) - g(x) \leq 0$ au voisinage de a, alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ au voisinage de a.

Lorsqu'on connaît un Développement Asymptotique de f suffisamment précis, on peut souvent en déduire l'allure de la courbe représentative de f au voisinage du point considéré. En particulier, s'il existe une asymptote, et si oui quelle est la position de la courbe de f par rapport à son asymptote.

Exemple 3.2. *Revenons à l'exemple précédent.*
Soit $f : x \mapsto e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)}$. On a vu que

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi,

$$f(x) - (x + 2) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que la droite d'équation $y = (x + 2)$ est asymptote à la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
De plus $(f(x) - (x + 2))$ est du signe de $\dfrac{2}{x}$ au voisinage de $\pm\infty$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$, et en dessous au voisinage de $-\infty$.

3. Calcul de limites à l'aide de DL et DA

Les DL et DA deviennent utiles pour calculer les limites de formes indéterminées, lorsque les équivalents ne contiennent pas suffisamment d'information pour pouvoir conclure.

EXEMPLE 3.3. *Etudions l'existence de :* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x-\tan x}\right)$.
Notons l'indétermination a-priori de la limite.
Tentons de traiter le problème à l'aide des équivalents. On obtient : $f(x) \sim_0 \frac{x-x}{x-x}$...
Nous obtenons à nouveau une indétermination...
Il nous faut donc plus d'information pour lever cette indétermination.

On écrit alors des DL de toutes les fonctions impliquées, en faisant bien attention aux points auxquels on peut / doit effectuer ces DL, et aussi à l'ordre minimal requis pour obtenir l'information manquante...

On a : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ *et* $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. *Donc :*

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

On remarque que $\sin(0)=0$. *On peut alors écrire un DL de* $\ln(1+u)$ *en* $u=0$ *:*

$$\ln(1+\sin x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Donc :

$$\ln(1+\sin x) - \tan x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

On obtient finalement :

$$\frac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x-\tan x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{-x^3/2} = \frac{1}{x}$$

Finalement on en déduit que : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x-\tan x}\right)$ *n'existe pas ! (La fonction ne converge pas vers une valeur finie).*

Par contre on a obtenu montré que :
$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x - \tan x} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x - \tan x} = -\infty$.

Exemple 3.4. Pour aller (bien) plus loin

Déterminons le développement asymptotique de $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ *selon la famille* $(x \mapsto x^\alpha |\ln x|^\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$ *à la précision* $1/x^4$ *en* $+\infty$.
On a : $(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right)$.
Tout d'abord, on cherche un développement asymptotique de $\ln(1+x)$ *en* $+\infty$*. On a :* $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$*. Soit :*

$$\ln(1+x) = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

car $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'où : $\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x) = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{2x^4} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$,
et donc : $\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *par croissances comparées.*
On peut alors utiliser le DL_2 *d'exp en 0, ce qui donne :*

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x^2}} &= 1 + \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4}\right)^2 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right) \\
&= 1 + \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2}\frac{\ln^2 x}{x^4} - \frac{1}{2x^4} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right).
\end{aligned}$$

Deuxième partie

Intégration

Chapitre 4

Intégrales simples

1. Généralités

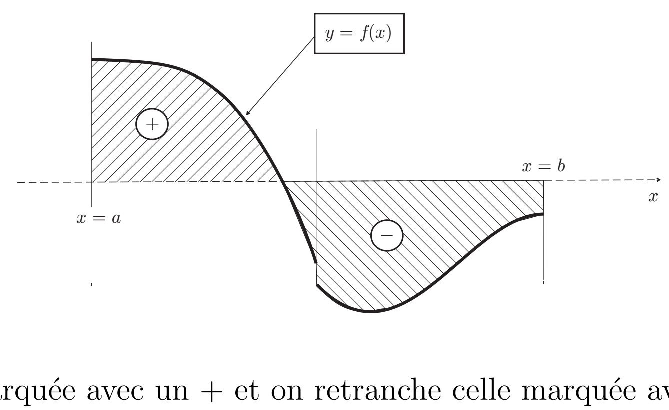
Dans ce chapitre nous allonsètudier l' "objet" suivant : $\int_a^b f(x)\,dx$, à savoir : "l'intégrale de la fonction $f(x)$ entre les bornes a et b".

REMARQUE 4.1. *La variable x est dite muette, c'està dire qu'elle peutêtre remplacée par n'importe quelle autre variable. C'està dire que l'on a cette quantité qui est ègaleàla suivante :* $\int_a^b f(t)dt$.

Avant de construire rigoureusement cette notion d'intégrale, donnons en d'abord une idée intuitive.

Cet objet revientàquantifier l'*aire algébrique* (i.e. signée) comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$, l'axe des x et les deux droites parallèles à l'axe des y ($x = a$ et $x = b$).

Par *aire algébrique*, on entend que les aires correspondant aux valeurs où **la fonction est positive** (partie du graphe **au dessus** de l'axe des x) sont comptées **positivement** et les aires où **la fonction est négative** (partie du graphe **en dessous** de l'axe des x) sont comptées **négativement**. La figure suivante donne une idée de cette aire :



On ajoute l'aire marquée avec un + et on retranche celle marquée avec un −.

On va commencer dans cette section par introduire la notion d'intégrale simple.

Pour pouvoir parler d'une **intégrale simple**, il faut que les conditions suivantes soient réunies :

— l'intervalle d'intégration doit être un **segment** $[a, b]$ (intervalle fermé borné) ;

— la fonction f doit être **définie**, sauf peut être en un **nombre fini de points** de $[a, b]$, et être **bornée** sur $\mathcal{D}_f \cap [a, b]$.

Le fait de ne pas exclure les fonctions qui ne sont pas définies en certains points est important dans les applications comme on l'a vu au chapitre 1 pour le calcul du volume de la poutre dont la section n'est pas continue (elle change brusquement).

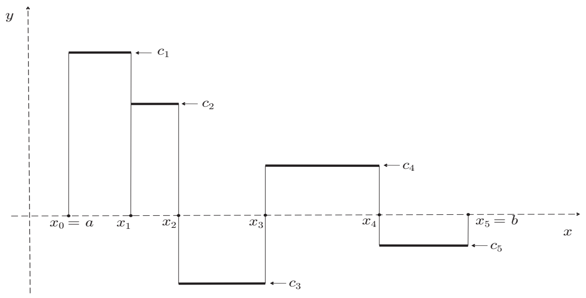
Les **intégrales simples** concernent donc les intégrales des fonctions f qui sont définieS sur un segment $[a, b]$ (potentiellement à l'exception d'un nombre fini de points) et qui sont bornées sur $\mathcal{D}_f \cap [a, b]$.
On écrira $f \in \mathcal{B}([a, b])$ pour désigner une fonction ayant ces propriétés.

Le but de cette section est de :
a) caractériser les fonctions qui sont intégrables (partie abstraite) ;
b) de donner des éléments permettant d'arriver à une expression analytique de la valeur de l'intégrale (si possible...),
et/ou de préparer les outilsàl'approximation de cette valeur à partir d'une algorithmique.

Dans toute la suite, $[a, b]$ désignera un segment de $\mathbb{R}$.

2. Fonctions en escalier

Nous allons d'abord définir l'intégrale de fonctions très simples : les fonctions constantes par morceaux sur $[a, b]$ qu'on appelle traditionnellement fonctions en escalier dont la figure suivante donne une idée



Par un passage à la limite adapté, nous en déduisons l'intégrale de fonctions plus générales.

Pour énoncer de façon précise la notion de fonction en escalier, nous avons besoin d'introduire la définition d'une subdivision du segment $[a,b]$ (appelée décomposition de domaine sans recouvrement dans la terminologie récente des méthodes numériques). Une **subdivision** du segment $[a,b]$ est une décomposition de $[a,b]$ en sous-intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ pour $i = 1, \cdots, n$ correspondant à la donnée d'une **suite finie** de points $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ telle que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On note par $\mathcal{P}_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. Chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ est appelé **intervalle de la subdivision**. Le **pas** ou**module** de la subdivision est la plus grande parmi les longueurs $h_i = x_i - x_{i-1}$ de ses intervalles

$$\delta(p) = \max_{i=1,\cdots,n} h_i.$$

Une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$ est une fonction f définie sauf au plus sur un nombre fini de points de $[a,b]$ ayant la propriété suivante : il existe une subdivision $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ telle que la restriction de f à chaque intervalle de la subdivision est constante, c'est à dire

$$f(x) = c_i, \quad \forall x \in \,]x_{i-1}, x_i[\,, \quad (i = 1, \cdots, n)\,.$$

Nous désignerons l'**ensemble des fonctions en escalier** sur $[a,b]$ par $\mathcal{E}([a,b])$. Il est immédiat que $\mathcal{E}([a,b])$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}([a,b])$.

Selon la description faite précédemment, l'intégrale d'une fonction en escalier f donnée comme ci-dessus vaut la quantité suivante :

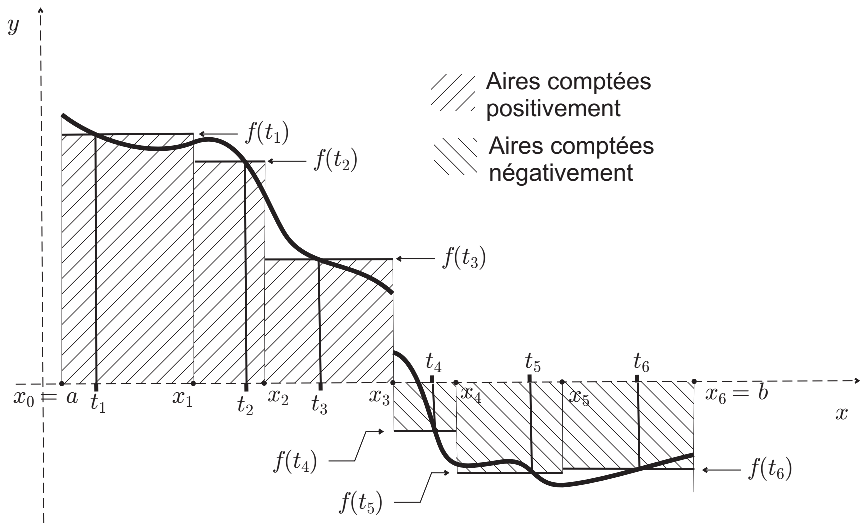
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i.$$

En toute rigueur, Il faudrait vérifier que cette définition soit consistante, c'est à dire qu'elle ne donne pas une valeur différente lorsqu'on utilise une autre subdivision pour définir la fonction f...
Les outils que l'on va introduire vont permettre de s'assurer de la consistance de cette définition de l'intégrale et l'étendre à des fonctions plus générales.

3. Définition de l'intégrale

3.1. Sommes de Riemann. Une approche naturelle pour définir l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{B}([a,b])$ est de l'approcher de façon de plus en plus précise en prenant des subdivisions p avec un pas de plus en plus petit par des fonctions en escalier qui sont égales à une valeur prise par f sur chaque intervalle de la subdivision.

Une illustration en est donnée par la figure suivante.



A noter que c'est ainsi que l'on peut *approcher numériquement la valeur* d'une intégrale dont on ne connait pas la valeur exacte : il s'agit de la méthode numérique de base dite des rectangles.

On appelle **somme de Riemann** d'une fonction $f \in \mathcal{B}([a,b])$ associée à une subdivision $p_n = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ (cf Figure) la quantité définie comme suit :

$$R(f, p_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i).$$

Pour une fonction escalier qui vaut $f(t_i)$ sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision p_n, la somme de Riemann $R(f, p_n)$ est égale à la valeur de son intégrale.

Définition 4.1. *On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si les sommes de Riemann correspondantes $R(f,p_n)$ tendent vers une limite finie lorsque $n \to +\infty$. Cette limite (finie) est alors la valeur de son intégrale.*

Autrement formulé : f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si il existe un nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ tel que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$,

$$\forall p_n \in \mathcal{P}_{a,b},\ \delta(p_n) \leq \eta, \implies \left| R(f,p_n) - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \varepsilon.$$

On note par $\mathcal{I}([a,b])$ le sous-ensemble des fonctions $f \in \mathcal{B}([a,b])$ qui sont intégrables sur $[a,b]$.

4. Propriétés fondamentales des fonctions intégrables

4.1. Relation de Chasles.

On a tout d'abord la propriété importante, donnée par le théorème suivant, qui va permettre de simplifier la vérification qu'une fonction est intégrable ou décomposer le calcul d'une intégrale en subdivisant l'intervalle d'intégration. Elle est appelée **relation de Chasles**.

Théorème 4.1. *Soit $f \in \mathcal{B}([a,b])$ et $a < c < b$.*
Alors $f \in \mathcal{I}([a,b])$ si et seulement si $f \in \mathcal{I}([a,c])$ et $f \in \mathcal{I}([c,b])$.
De plus, on a :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Par application itérée de la propriété précédente, on la généralise immédiatement comme suit.

Corollaire 4.1. *Soit* $f \in \mathcal{B}([a,b])$ *et* $p \in \mathcal{P}_{a,b}$ *;* $f \in \mathcal{I}([a,b])$ *si et seulement si* $f|_{]x_{i-1},x_i[\cap \mathcal{D}_f} \in \mathcal{I}([x_{i-1},x_i])$ $i = 1,\cdots,n$ *et dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx.$$

On en déduit la consistance de la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier donnée plus haut.

Corollaire 4.2. *Toute fonction en escalier* f *sur* $[a,b]$ *est intégrable et son intégrale est donnée par*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

où $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ *et* $f(x) = c_i$ *pour tout* $x \in \left]x_{i-1}, x_i\right[$.

4.2. Opérations sur les intégrales.

Proposition 4.1. *L'opérateur* $\int .\ dx$ *est un opérateur linéaire. Autrement dit, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Si* f *et* g *sont dans* $\mathcal{I}([a,b])$*, alors* $f+g \in \mathcal{I}([a,b])$ *et*
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$
2. *Si* $f \in \mathcal{I}([a,b])$ *et* λ *est une constante, alors* $\lambda f \in \mathcal{I}([a,b])$ *et*
$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx.$$

Attention : L'intégrale d'un produit de fonctions n'est pas égal au produit des intégrales !...

4.3. Inégalités sur les intégrales.

Proposition 4.2. *On a la propriété suivante : Soit $f \in \mathcal{I}([a,b])$. Si $f \geq 0$, alors*

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0.$$

Par conséquent, pour f et g dans $\mathcal{I}([a,b])$, si $f \geq g$ alors :

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx.$$

Proposition 4.3. *Si $f \in \mathcal{I}([a,b])$ alors $|f| \in \mathcal{I}([a,b])$ et on a l'inégalité dite triangulaire :*

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

5. Primitives

Soient I un intervalle fermé borné et $f \in \mathcal{C}^0(I)$.

5.1. Primitive et intégrale.

La primitive d'une fonction f est une fonction F telle que si on la dérive on obtient f :

$$F'(x) = f(x)$$

L'intégrale d'une fonction f s'exprime à l'aide d'une de ses primitives F :

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

La quantité $F(b) - F(a)$ est l'**accroissement** de F entre a et b.

Il est aussi noté des deux façons suivantes :

$$[F]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Une fonction continue f sur un intervalle fermé borné admet toujours une primitive. En effet on a le

Théorème 4.2. *Pour tout $a \in I$, la fonction G définie par*

$$G(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et vérifie :

$$G'(x) = f(x),\ \forall x \in I$$

Autrement dit, G est une primitive de f sur I.

Notez que la variable d'integration est un variable muette.

5.2. Primitives usuelles. Les primitives des fonctions usuelles ci-dessous doivent être connues. (k désigne une constante quelconque dans $\mathbb{R}$).

$\displaystyle\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$ si $m \neq -1$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln\lvert x\rvert + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int \ln x dx = x\ln(x) - x + k$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + k$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + k$
$\int \mathrm{ch}(x)dx = \mathrm{sh}(x)dx + k$	$\int \mathrm{sh}(x)dx = \mathrm{ch}(x)dx + k$
$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \mathrm{Arctan} x + k$	

Celles ci-dessous sont également très classiques.

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int (1+\tan^2(x))dx = \tan(x) + k \qquad \int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\frac{1}{\tan(x)} + k$$

$$\int \frac{1}{ch^2(x)}dx = \mathrm{t}h(x) + k \qquad \int \frac{1}{sh^2(x)}dx = -\frac{1}{\mathrm{t}h(x)} + k$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Argsh} x + k \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Argch} x + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin} x + k \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arccos} x + k$$

6. Pour aller plus loin : Conditions suffisantes d'intégrabilité ; Inégalite de Cauchy-Schwarz

6.1. Conditions suffisantes d'intégrabilité. Nous présentons ci-dessous les caractéristiques de quelques classes de fonctions intégrables.

THÉORÈME 4.3. *Si* $f \in \mathcal{B}([a, b])$ *est monotone (croissante ou décroissante) sur* $]a, b[$*, alors* $f \in \mathcal{I}([a, b])$*.*

Le théorème précédent, avec la relation de Chasles, permet de prouver que la quasi-totalité des fonctions bornées qu'on rencontre en pratique sont intégrables.

COROLLAIRE 4.3. *Soit* $f \in \mathcal{B}([a, b])$*. S'il existe* $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ *telle que*

$$f \text{ est monotone sur }]x_{i-1}, x_i[\text{ pour } i = 1, \cdots, n,$$

alors $f \in \mathcal{I}([a, b])$*.*

Et on a le théorème fondamental suivant.

THÉORÈME 4.4. *Toute fonction* f *continue sur un segment* $[a, b]$ *est intégrable sur* $[a, b]$*.*

La relation de Chasles permet alors d'étendre immédiatement le théorème précédent aux fonctions continues par morceaux.

La propriété suivante des intégrales de fonctions continues est souvent utile.

PROPOSITION 4.4. *Soit* f *continue sur* $[a, b]$*. Si*

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \text{ et } \int_a^b f(x)\, dx = 0$$

alors

$$f(x) = 0, \ \forall x \in [a, b].$$

6.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cette inégalité intervient de façon essentielle dans de nombreuses questions théoriques et pratiques.

PROPOSITION 4.5. *Si f et g sont dans $\mathcal{I}([a,b])$, alors fg, f^2 et g^2 sont dans $\mathcal{I}([a,b])$ et on a*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right| \le \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\ dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\ dx}}$$

7. Pour aller plus loin : quelques propriétés fondamentales de l'intégrale

7.1. Le premier théorème de la moyenne et ses variantes. Le premier théorème de la moyenne sous sa forme la plus générale s'énonce comme suit.

THÉORÈME 4.5. *Si f et g sont dans $\mathcal{I}([a,b])$, g* **étant de plus positive** *($g \ge 0$ sur $[a,b]$), alors il existe K*

$$m = \inf_{x\in[a,b]\cap\mathcal{D}_f} f(x) \le K \le M = \sup_{x\in[a,b]\cap\mathcal{D}_f} f(x)$$

tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = K\int_a^b g(x)\ dx.$$

Le corollaire suivant décrit quelques cas particuliers importants.

COROLLAIRE 4.4. *Sous les conditions du théorème précédent (notamment g positive),*

(1) si $g = 1$, alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = K(b-a)\ ;$$

(2) si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\ dx$$

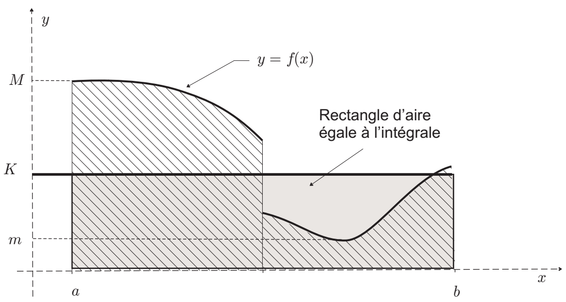
et, en particulier si $g = 1$,

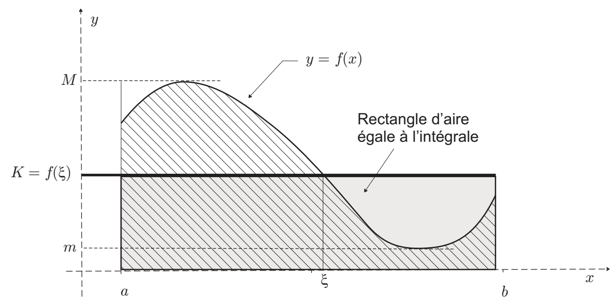
$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(\xi).$$

REMARQUE 4.2. *Si $g = 1$ et $f \geq 0$, le 1er théorème de la moyenne exprime qu'il existe un rectangle de base $b - a$ et de hauteur K*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} \leq K \leq M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

dont l'aire est égale à $\int_a^b f(x)dx$. Ce nombre K est égal à une valeur prise par f dans l'intervalle $[a, b]$ lorsque f est continu sur $[a, b]$ par le théorème de Weierstrass (voir figure ci-dessous).





7.2. Intégration par parties.

THÉORÈME 4.6. *Soient u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. On a :*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = -\int_a^b u'(x)v(x)\ dx + [uv]_a^b$$

Avec $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. $[uv]_a^b$ désigne l'accroissement de la fonction uv entre a et b.

EXERCICE 4.1. *En effectuant une intégration par parties astucieuse, calculer : $\displaystyle\int_a^b \ln x\ dx$.*

7.3. Changement de variable.

THÉORÈME 4.7. *Soit $f \in \mathcal{I}([c, d])$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone (ie strictement croissante ou décroissante) sur $[a, b]$. On a alors :*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\ dy$$

Notons que l'on a : $y = \varphi(x)$ d'ou $y'(x) \equiv \dfrac{dy}{dx}(x) = \varphi'(x)$, soit : $dy = \varphi'(x)dx$.

EXERCICE 4.2. *Calculer l'intégrale suivante en effectuant un changement de variable :* $\displaystyle\int_a^b \exp(2x)\ dx$

7.4. Parité, périodicité. On a le

COROLLAIRE 4.5. *Soit f intégrable sur l'intervalle centré $[-a,a]$ (i.e. $f \in \mathcal{I}([-a,a])$). On a :*

— *Si f est une fonction paire, alors :*
$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 2\int_{0}^{+a} f(x)dx$$
— *Si f est une fonction impaire, alors :*
$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 0$$

EXERCICE 4.3. *Montrer ce résultat.*

COROLLAIRE 4.6. *Soit f intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et f T-périodique. Alors pour tout (a,b) réels, on a :*
$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

EXERCICE 4.4. *Montrer ce résultat.*

EXERCICE 4.5. *Calculer les intégrales simples suivantes :*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx.$

Chapitre 5

Primitives de fonctions rationnelles

La section précédente fournit les primitives de quelques fonctions usuelles. On y retrouve des fonctions rationnelles (également appelées fractions rationnelles). On va chercher à se ramener à ces situations connues par changement de variable ou intégration par parties.

La première étape consiste à décomposer la fraction rationnelle en *éléments simples*, c'est à dire sous la forme :

$$\boxed{F = E + \frac{P}{Q} \text{ avec } P \text{ et } Q \text{ facteurs irréductibles.}}$$

On n'a alors plus que des polynômes ou des termes de la forme :

$$\frac{1}{(x-a)^n} \quad \text{et} \quad \frac{a\,x+b}{(x^2+p\,x+q)^n}$$

avec $p^2 - 4\,q < 0$.

1. Primitives des termes de la forme $\frac{1}{(x-a)^n}$

Il suffit de poser $u = (x-a)$. On vérifie que :

- si $n = 1$, la primitive est de la forme : $\ln|x-a| + k$,
- sinon , elle est de la forme : $\dfrac{1}{(1-n)\,(x-a)^{n-1}} + k$.

Exercice 5.1. *Soit :* $F(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)\ (x+3)^3}$. *Montrer que l'on a :*

$$\int F(x)dx = \frac{3}{64}\ln(\frac{x-1}{x+3}) + \frac{3}{16\,(x+3)} - \frac{1}{8\,(x+3)^2}$$

Solution : On montre que :

$$F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+3)} + \frac{c}{(x+3)^2} + \frac{d}{(x+3)^3}$$

avec $a = 3/4^3$, $b =$ *etc ; puis on intégre...*

2. Primitives des termes de la forme $\dfrac{a\,x+b}{(x^2+p\,x+q)^n}$

Nous sommes dans le cas où : $(p^2 - 4\,q) < 0$. On commence alors par écrire le trinôme figurant au dénominateur sous la forme suivante :

$$x^2 + p\,x + q = (x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}. \tag{5.1}$$

C'est à dire sous la forme d'un *carré parfait + le terme correctif requis.*

Ensuite en posant $t = \sqrt{\dfrac{4}{4q-p^2}}\,(x + \dfrac{p}{2})$, on obtient :

$$x^2 + p\,x + q = \frac{(4q - p^2)}{4}\,(t^2 + 1) \equiv cste \cdot (t^2 + 1) \tag{5.2}$$

On **a cherché ici à faire ressortir le terme** $(t^2 + 1)$.

Exercice 5.2. *Ecrire l'expression* $(x^2 + x + 3)$ *sous la forme* $\alpha(t^2 + 1)$. *Vous précisez les expressions de* α *et* t.

Exemple 5.1. *Soit :*

$$F_5 = \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+x+1)} + \frac{dx+e}{(x^2+x+1)^2}$$

avec $a = 1$, $b = c = -1$, $d = 0$, $e = -1$.
Ainsi pour la fonction F_5, *on écrit :* $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left((\frac{2}{\sqrt{3}}\,(x+\frac{1}{2}))^2 + 1\right)$.
On posera ici $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\,(x + \frac{1}{2})$. *Cela équivaut à* $x = \frac{t\sqrt{3}-1}{2}$ *et entraine* $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$.
On obtient :

$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}(t^2 + 1)$$

Au-delà, on aura :

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{\sqrt{3}\,(t^2+1)}dt,$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{8\sqrt{3}}{9}\,\frac{1}{(t^2+1)^2}dt.$

On est donc ramené au calcul de primitives de termes de la forme :
$\dfrac{t}{(t^2+1)^n}$ ou $\dfrac{1}{(t^2+1)^n}$.

(1) si $n=1$, une primitive de $\dfrac{t}{(t^2+1)}$ est : $\dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)+k$.

(2) si $n>1$, une primitive de $\dfrac{t}{(t^2+1)^n}$ est : $\dfrac{1}{2\,(1-n)\,(t^2+1)^{n-1}}+k$.

(3) si $n=1$, une primitive de $\dfrac{1}{(t^2+1)}$ est : arctan $(t)+k$.

(4) si $n>1$, une intégration par partie permet de ramener le calcul d'une primitive de $\dfrac{1}{(t^2+1)^n}$ à celle de $\dfrac{1}{(t^2+1)^{n-1}}$.
De proche en proche, on peut calculer toutes ces primitives à partir du cas $n=1$...

** Pour aller plus loin **.

Calculons la primitive de $\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$ *(cas 4) avec $n=2$).*

Pour commencer on décompose le terme comme suit (astuce) :

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt + \int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Le premier terme du second membre est seulement

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)}\,dt.$$

Le second terme se traite comme suit

$$\int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \int u(t)v'(t)\,dt$$

avec $u(t)=t/2$ et $v'(t)=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}$. Comme $v(t)=\frac{1}{(t^2+1)}$, une intégration par partie donne

$$\int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+1)}\,dt.$$

On a alors

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2\,(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + k.$$

On peut alors calculer :

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctan}\ (\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}) + k,$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)} + \frac{4\,\sqrt{3}}{9}\ \mathrm{arctan}\ (\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}) + k.$

Finalement on obtient une primitive de F_5 *:*

$$\int F_5(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(\frac{x^2}{x^2+x+1}) - \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)} - \frac{7\,\sqrt{3}}{9}\mathrm{arctan}\ (\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}) + k$$

Tous les cas pour lesquels on dispose d'une méthode générale pour calculer une primitive consistent à se ramener par une intégration par partie ou un changement de variable à la primitive d'une fraction rationnelle.

Ceci reste possible pour les fractions en sin *et* cos *et les fractions en* sh *et* ch.

$**$

3. Pour aller plus loin : Polynômes et fractions en sinus et cosinus

4. Polynômes en $\sin x,\ \cos x$

On cherche des primitives de la forme $I_{n,m}(x) = \displaystyle\int \sin^n x\,\cos^m x\,dx$ ou m et n sont des entiers naturels. La méthode dépend de la parité de n et m :

(1) si n **ou** m est impair, lorsque par exemple $n = 2p+1$,

$$\sin^{2p+1} x = (1-\cos^2 x)^p \sin x,$$

et $I_{n,m}(x) = \displaystyle\int (1-\cos^2 x)^p\ \cos^m x\ \sin x\,dx.$

On pose alors :

$$t = \cos x$$

de sorte que $dt = -\sin x\,dx$ et

$$I_{n,m}(x) = -\int (1-t^2)^p\, t^m\, dt.$$

Si $m = 2q+1$, c'est $t = \sin x$ que l'on doit poser.

(2) si n **et** m sont pairs, on peut linéariser l'expression $\sin^{2p} x \cos^{2q} x$.

EXEMPLE 5.1. *Pour le calcul de $I_{2,4}$, on peut procéder de la facon suivante :*

$$\begin{aligned} I_{2,4}(x) &= \int \cos^2 x(\cos x\, \sin x)^2 dx, \\ &= \int \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\ \frac{1}{4}\ \sin^2 2x\, dx, \\ &= \frac{1}{8}\int \cos 2x\ \sin^2 2x\, dx + \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx. \end{aligned}$$

On est ramené au cas précedent pour le calcul de la premiére primitive.

5. Fractions en $\sin x$ et $\cos x$

La régle consiste à regarder quel changement de variable laisse $f(x)\,dx$ invariant.

(1) lorsque $f(x)\,dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto -x$ (c'est-a-dire, $f(-x)\,d(-x) = f(x)\,dx$), on pose $t = \cos x$,

(2) lorsque $f(x)\,dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi - x$ (c'est-a-dire, $f(\pi - x)\,d(\pi - x) = f(x)\,dx$), on pose $t = \sin x$,

(3) lorsque $f(x)\,dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi + x$ (c'est-a-dire, $f(\pi + x)\,d(\pi + x) = f(x)\,dx$ ou encore $f(\pi + x) = f(x)$), on pose $t = \tan x$,

(4) lorsque $f(x)\,dx$ n'est invariant par aucun des changements de variable précédents, on utilise la représentation rationnelle des fonctions trigonométrique :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

A l'aide du changement de variable : $t = tan(x/2)$.

Ce dernier changement de variable fonctionne dans tous les cas, mais ce n'est pas toujours le plus simple. Par exemple, pour le calcul de $I_{2,4}$, on obtient

$$\int \sin^2 x\ \cos^4 x\, dx = \int \frac{8\,t^2\,(1-t^2)^4}{(1+t^2)^7}\, dt.$$

EXEMPLE 5.2. $T_1(x) = \int f(x)dx$ *avec* $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \sin 2x}$. $f(x)dx$ *est invariant par le changement* $x \mapsto -x$ *; on pose* $t = \cos x$*, et donc* $dt = -\sin x dx$*. Nous allons multiplier le numérateur et le dénominateur par* $-\sin x$ *pour obtenir le terme* dt *au numérateur, puis nous débrouiller pour ne faire apparaitre que des* $\cos x$ *:*

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{\sin x + \sin 2x} &= \frac{-\sin x dx}{-\sin^2 x - \sin x(2\sin x\cos x)},\\
&= \frac{-\sin x dx}{-\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x},\\
&= \frac{-\sin x dx}{\cos^2 x - 1 - 2\cos x(1-\cos^2 x)},\\
&= \frac{dt}{t^2 - 1 - 2t(1-t^2)} = \frac{dt}{(t-1)(t+1)(2t+1)},\\
&= \frac{1}{6}\frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\frac{dt}{t+1} - \frac{2}{3}\frac{2dt}{2t+1},
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\sin 2x = 2\cos x \sin x$*, que* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *puis en factorisant* $2t^3 + t^2 - 2t - 1$ *et enfin en décomposant la fraction* $\dfrac{dt}{(t-1)(t+1)(2t+1)}$.

Par suite,

$$T_1(x) = \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{2}{3}\ln|2t+1| + k,$$

et, en revenant a la variable x *:*

$$T_1(x) = \frac{1}{6}\ln|\cos x - 1| + \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| - \frac{2}{3}\ln|2\cos x + 1| + k.$$

EXEMPLE 5.3. $T_2(x) = \int \dfrac{dx}{2+\sin x}$. *Le quotient* $\dfrac{dx}{2+\sin x}$ *n'étant invariant par aucun des trois changements de variable élémentaires, on pose* $t = \tan\frac{x}{2}$ *donc* $dx = \dfrac{2dt}{(1+t^2)}$ *et* $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= \int \left(\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}\\
&= \int \frac{dt}{t^2+t+1}\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{arctan } t + k\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{arctan }\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) + k
\end{aligned}$$

6. Pour aller plus loin : fonctions hyperboliques sh et ch

Cette fois on s'intéresse aux fonctions du type $f(x) = F(\mathrm{sh}x,\ \mathrm{ch}x)$.

La méthode est la même que pour les fonctions rationnelles trigonométriques.
Pour calculer $\int F(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$, on examine $\int F(\cos x, \sin x)dx$.

— Si $\int F(\cos x, \sin x)dx$ se calcule avec $t = \cos x$ alors $\int F(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$ se calcule avec $t = \mathrm{ch}x$.
— Si $\int F(\cos x, \sin x)dx$ se calcule avec $t = \sin x$ alors $\int F(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$ se calcule avec $t = \mathrm{sh}x$.
— Si $\int F(\cos x, \sin x)dx$ se calcule avec $t = \tan x$ alors $\int F(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$ se calcule avec $t = \mathrm{th}x$.
— Si $\int F(\cos x, \sin x)dx$ se calcule avec $t = \tan(\frac{x}{2})$ alors $\int F(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$ peut se calculer avec $t = \mathrm{th}(\frac{x}{2})$, mais il est préférable d'utiliser le changement $t = e^x$.

Exemple 5.4. $H_1(x) = \int \frac{dx}{\mathrm{sh}x + \mathrm{sh}2x}$. *D'aprés l'étude de* T_1*, il faut poser* $t = \mathrm{ch}x$ *mais, cette fois les formules sont :* $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$, $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x$ *et* $dt = \mathrm{sh}xdx$*. On obtient donc :*

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{\mathrm{sh}x + \mathrm{sh}2x} &= \frac{\mathrm{sh}xdx}{\mathrm{sh}^2x + \mathrm{sh}x(2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x)} \\
&= \frac{\mathrm{sh}xdx}{\mathrm{sh}^2x + 2\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}x} \\
&= \frac{\mathrm{sh}xdx}{\mathrm{ch}^2x - 1 + 2\mathrm{ch}x(\mathrm{ch}^2x - 1)} \\
&= \frac{dt}{t^2 - 1 + 2t(t^2 - 1)} = \frac{dt}{(t-1)(t+1)(2t+1)} \\
&= \frac{1}{6}\frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\frac{dt}{t+1} - \frac{2}{3}\frac{2dt}{2t+1}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{2}{3}\ln|2t+1| + k \\
&= \frac{1}{6}\ln|\mathrm{ch}x - 1| + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{ch}x + 1| - \frac{2}{3}\ln|2\mathrm{ch}x + 1| + k.
\end{aligned}$$

EXEMPLE 5.5. $H_2(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}x + 2\mathrm{sh}x}$. *Pour cette intégrale, on n'observe aucune invariance. Comme on l'a indiqué, il est préférable de poser* $t = e^x$.

$$H_2(x) = \int \frac{dx}{\frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}} = \int \frac{e^x}{\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}}dx.$$

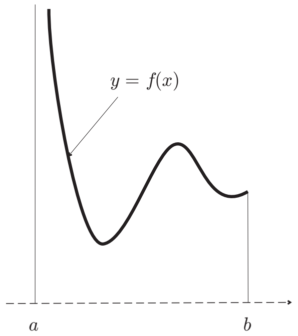
On fait le changement de variable $t = e^x$ *qui entraine* $dt = t\,dx$.

$$\begin{aligned} H_2(x) &= \int \frac{dx}{\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\frac{t - \frac{\sqrt{3}}{3}}{t + \frac{\sqrt{3}}{3}}| + k \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\frac{e^x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{e^x + \frac{\sqrt{3}}{3}}| + k \end{aligned}$$

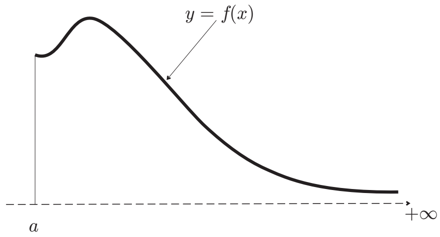
Chapitre 6

Intégrales généralisées

Nous allons maintenant étendre la notion d'intégrale lorsque *l'intervalle d'intégration est non borné* ou lorsque la *fonction n'est pas bornée*, cf figure.



Fonction non bornée en a



Intervalle d'intégration non borné

On parle dans ce cas d'intégrales généralisées ou encore d'intégrales impropres.

NB. Ce chapitre vous est déconseillési vous avez encore de sérieuses difficultés avec les chapitres précédents. Autrement dit, si vous pensé être dans ce cas, je vous invite à passer (provisoirement) votre chemin.

1. Définitions et propriétés immédiates

1.1. Intégrales en dehors du cadre des intégrales simples. On veut définir l'intégrale d'une fonction f, définie sauf au plus en un nombre fini de points d'un intervalle I, dans les cas suivants :

1) **l'intervalle d'intégration I est non borné** : $]-\infty, +\infty[$ ou une demi-droite,

2) la fonction f **ne reste pas bornée** lorsque $x \to a$, $a \in I$. a peut être à l'intérieur de I ou être une extrémité de I.

Grâce à la relation de Chasles, on peut se ramener à l'une des deux situations suivantes :

1) l'intervalle I est de la forme $[a, +\infty[$ (ou $I =]-\infty, a]$) lorsque l'intervalle d'intégration est non borné ;
2) $I =]a, b]$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \to a$. (Ou encore : $I = [a, b[$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \to b$).

Les secondes instances de la situation 1 et de la situation 2, se traitent exactement comme les premières. C'est pourquoi, nous examinerons celles-ci et laisserons au lecteur le soin de faire les adaptations immédiates pour les cas $I =]-\infty, a]$ et $I = [a, b[$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \to b$. La figure suivante donne ainsi les deux cas génériques qui ne rentrent pas dans le cadre des intégrales simples vues à la section précédente

1.2. Définition des intégrales généralisées.

Nous commençons par le cas où on veut intégrer une fonction f sur l'intervalle $]a, b]$, qui n'est pas bornée lorsque $x \to a$.

Cas 1 : f non bornée lorsque $x \to a$.

On pourra le faire si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) la fonction f est intégrable sur $[x, b]$ pour tout x, $a < x < b$ (i.e. il s'agit d'une intégrale simple $\forall x$) ;

(2) la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^b f(t)\ dt$$

admet une **limite finie** ℓ lorsque $x \to a$. (On a $x \in]a, b]$).

On dit alors que **l'intégrale est convergente**. La limite ℓ est la valeur de cette intégrale :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\ dt}$$

L'intégrale est dite divergente si $\int_x^b f(t)\ dt$ ne tend pas vers une limite finie lorsque $x \to a$.

Exemple 6.1.
a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ *diverge. (Notez le problème en* 0*).*
b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ *converge. (Notez qu'il s'agit bien d'une intégrale généralisée).*
c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t} dt$ *est une intégrale simple et non pas généralisée. (Et nous savons en calculer sa valeur).*

Cas 2 : Intégrale de f sur un intervalle non borné $[a, +\infty[$

Examinons maintenant le cas où on veut intégrer une fonction f sur l'intervalle non borné $[a, +\infty[$.

Là aussi, on pourra le faire si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) la fonction f est **intégrable** sur $[a, x]$ pour tout $x > a$;

(2) la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

admet une **limite finie** ℓ lorsque $x \to +\infty$.

De la même façon que pour le premier cas, on dit alors que **l'intégrale est convergente**. La limite ℓ est la valeur de l'intégrale de f entre a et $+\infty$:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt.}$$

On dit qu'elle est divergente si $\int_a^x f(t)\ dt$ ne tend pas vers une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

Remarque 6.1. *Par commodité, on utilise souvent la notation*

$$\int_a^b f(x)\ dx \text{ ou } \int_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

pour désigner une intégrale généralisée que l'on veut étudier (voire calculer ! ?) même si on ne sait a-priori pas si elle est convergente ou non.

Exemple 6.2.
a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *converge.*

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ *diverge.*

Condition nécessaire de convergence. Comme première application du critère de Cauchy, Nous avons la proposition suivante qui donne une **condition nécessaire de convergence** de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ lorsque la fonction f tend vers une limite ℓ lorsque $x \to +\infty$.

PROPOSITION 6.1. *Si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, alors*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ est divergente.}$$

REMARQUE 6.2. *Cela est bien une condition nécessaire et* **non suffisante***.*

Exemple : l'intégrale de Riemann suivante diverge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2[\sqrt{t}]_1^{+\infty} \to +\infty$$

Une erreur à ne pas commettre : affirmer que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$*, alors l'intégrale est convergente.*

Sans plus d'information, l'intégrale peut bien être convergente ou divergente...

2. Les intégrales (généralisées) de Riemann

Les intégrales généralisées présentées dans ce paragraphe sont bien plus que des exemples : elles **constituent des intégrales de référence** qui permettent d'étudier la convergence d'un grand nombre d'intégrales généralisées à l'aide de critères qui seront prśentés dans la suite. Elles sont appelées intégrales de Riemann.

On a le **résultat fondamental** suivant.

PROPOSITION 6.2.

(1) Pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ est convergente si } \alpha < 1 \text{ et divergente si } \alpha \geq 1.$$

(NB. Le cas limite $\alpha = 1$ correspond au ln, qui diverge en 0).

(2) Pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ convergente si } \alpha > 1 \text{ et divergente si } \alpha \leq 1.$$

(NB. Le cas limite $\alpha = 1$ correspond au ln, qui diverge en $+\infty$).

DÉMONSTRATION. ** Pour aller plus loin ** La démonstration est immédiate ; on calcule l'intégrale et on passeàla limite. Pour tout $0 < x < a$ (resp. $x > a$), la fonction $t \to 1/t^\alpha$ est continue sur $[x, a]$ (resp. $[a, x]$). Elle est donc intégrable et le calcul de son intégrale se ramène à la détermination d'une de ses primitives :

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1/t^{\alpha-1}), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln t, & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On a alors

$$\int_x^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(a^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(a/x), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\lim_{x\to 0} \int_x^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha \geq 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} a^{1-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Le cas de la seconde intégrale généralisée s'obtient de la même façon à partir de la primitive $t \to F(t)$ ci-dessus. □

2.1. Propriétés immédiates. Les propriétés données par les propositions suivantes sont des conséquences directes des propriétés des intégrales simples.

On a d'abord la proposition suivante qui montre que la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ en a ou celle de $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ne dépend ni de b pour la première ni de a pour la seconde et que la relation de Chasles s'étend aux intégrales généralisées.

Proposition 6.3. *(Relation de Chasles). Pour tout c tel que $a < c < b$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\, dx$, avec f non bornée lorsque $x \to a$, est convergente si et seulement si $\int_a^c f(x)\, dx$ est convergente et*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

On a de même, pour tout c tel que $c > a$, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente si et seulement si $\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx.$$

La proposition suivante étend aux intégrales généralisées les propriétés de linéarité de l'intégrale simple.

Proposition 6.4. *(Linéarité). Soient f et g telles que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ sont convergentes, alors pour tout λ et tout μ deux constantes réelles, l'intégrale généralisée de $(\lambda f + \mu g)$ converge et :*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

On a un résultat analogue pour une intégrale généralisée entre a et $+\infty$.

3. Pour aller plus loin : Le critère de Cauchy

L'application du critère de Cauchy donne un outil d'une remarquable efficacité pour étudier les intégrales généralisées.

3.1. Le critère de Cauchy.

Le théorème suivant donne l'énoncé du **critère de Cauchy**.

Théorème 6.1. *Soit $f \in \mathcal{I}([x, b])$ pour tout $a < x < b$, non bornée lorsque $x \to a$. (Noter que si on enlève la condition non bornée lorsque $x \to a$, on sera dans le cadre des*

intégrales simples.)
Alors, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ *converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : (a < x,\ x' < b,\ |x - x'| \leq \eta) \implies \left| \int_x^{x'} f(t)\ dt \right| \leq \varepsilon.$$

Une autre façon d'énoncer ce critère est : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ *converge si et seulement si*

$$\lim_{x,x' \to a} \int_x^{x'} f(t)\ dt = 0.$$

Il faut, cependant, veuiller à faire tendre x *et* x' *vers* a *de façon indépendante, i.e., sans les lier par une relation. Cependant, si* $\lim_{x,x'\to a} \int_x^{x'} f(t)\ dt$ *ne tend pas vers* 0 *lorsque* x *et* x' *tendent vers* a*, même en restant liés par une relation, alors l'intégrale généralisée n'est pas convergente).*

On a de même. Soit $f \in \mathcal{I}([a,x])$ *pour tout* $x > a$*. Alors, l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > a : (x,\ x' > A) \implies \left| \int_x^{x'} f(t)\ dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ici aussi, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *converge si et seulement si*

$$\lim_{x,x' \to +\infty} \int_x^{x'} f(t)\ dt = 0$$

avec les mêmes précautions quand on fait tendre x *et* x' *vers* $+\infty$*.*

Démonstration. La démonstration est immédiate à partir du critère de Cauchy appliqué à la convergence de la fonction

$$F(x) = \int_x^b f(t)\ dt$$

lorsque $x \to a$ ou de celle de

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

lorsque $x \to +\infty$. $\square$

4. Intégrales de fonctions positives

Le théorème suivant donne des critères permettant d'assurer que **l'intégrale généralisée d'une fonction positive** converge ou diverge. On suppose que toutes les fonctions considérées vérifient les conditions permettant de considérer une intégrale généralisée sur l'intervalle apparaissant dans l'énoncé. A noter que si la fonction est de signe constant mais négative, il suffit de considérer $(-f)$ pour entrer le cadre présent.

Pour commencer on a le théorème suivant (* Pour aller plus loin *) :

THÉORÈME 6.2. *Soit* $f \geq 0$ *sur* $\mathcal{D}_f \cap [a, +\infty[$ *(resp. sur* $\mathcal{D}_f \cap]a, b]$*).*
L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *(resp.* $\int_a^b f(x)\ dx$*) est convergente si et seulement si il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \leq M,\ \forall x \in [a, +\infty]$
(resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\ dt \leq M,\ \forall x \in]a, b]$ *).*

De ce théorème découle les résultats suivants (comparaison de fonctions positives).

COROLLAIRE 6.1. *Soient* f **et** g **deux fonctions positives** *vérifiant :*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap [a, +\infty[\,,\ (resp. \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap]a, b])$$

— *Si* $\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ *est convergente (resp.*$\int_a^b g(x)\ dx$ *est convergente),*
alors $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *est convergente (resp.*$\int_a^b f(x)\ dx$ *est convergente).*

— *Si* $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *est divergente (resp.*$\int_a^b f(x)\ dx$ *est divergente),*
alors $\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ *est divergente (resp.*$\int_a^b g(x)\ dx$ *est divergente).*

COROLLAIRE 6.2. *Soient* f **et** g **deux fonctions positives** *pour tout* $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap [a, +\infty[$, *(resp.* $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap]a, b]$*).*

- Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ *alors*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ et } \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ sont de même nature}$$

i.e. sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

- Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *alors :*

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ et} \int_a^b g(x)\, dx \text{ sont de même nature.}$$

EXERCICE 6.1. *Déterminer la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x\sqrt{x}} dx$$

POUR ALLER PLUS LOIN

EXEMPLE 6.3. *Un exemple pas facile : la convergence des intégrales généralisées*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln x} dx \text{ avec } a > e$$

selon les valeurs de α.

Pour $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} 1/x^\alpha \ln x = +\infty$. *L'intégrale généralisée est donc divergente pour* $\alpha < 0$.

L'inégalité suivante

$$\frac{1}{x^\alpha \ln x} < \frac{1}{x^\alpha}$$

permet d'utiliser les intégrales de Riemann. Il s'ensuit que l'intégrale généralisée précédente est convergente pour $\alpha > 1$.

On ne peut rien dire encore pour $0 \leq \alpha \leq 1$. *Traitons d'abord le cas* $\alpha = 1$. *On a pour* $c > a$

$$\int_a^c \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln x)]_{x=a}^{x=c} = \ln c - \ln a \ ;$$

ceci montre que $\int_a^c \frac{1}{x\ln x}dx$ *ne reste pas borné lorsque* $c \to +\infty$. *L'intégrale est donc divergente. On utilise maintenant le fait que* $1/x^\alpha \ln x > 1/x \ln x$ *pour* $0 \leq \alpha < 1$ *et* $x \geq a$ *pour en déduire que l'intégrale est divergente pour* $\alpha < 1$. *L'introduction du terme* $\ln x$ *ne change rien : la convergence des intégrales précédentes est la même que celle des intégrales de Riemann.*

5. Convergence absolue

L'importance des critères de convergence sur les intégrales de fonctions positives vient en grande partie du critère suivant.

THÉORÈME 6.3. *Si l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$ *(resp.* $\int_a^b |f(x)|\ dx$*) est convergente, alors* $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *(resp.* $\int_a^b f(x)\ dx$*) est convergente. On dit alors que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *(resp.* $\int_a^b f(x)\ dx$*) est* ***absolument convergente****.*
Autrement formulé,

$$\boxed{\textit{absolument convergente} \Longrightarrow \textit{convergente}}$$

Attention : la réciproque est fausse.
En effet, une intégrale généralisée peut être convergente sans être absolument convergente. Par exemple, on peut montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ alors que } \int_0^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}| dx = +\infty$$

Le théorème de comparaison pour fonctions positives est l'outil fondamental pour étudier la convergence absolue. Aussi, si f n'est pas de signe constant, il est toujours intéressant de commencer par étudier la convergence absolue...