Module 1
Problème
Enoncé

I) On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et par ϕ_A l'application définie de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même definie par :

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \phi_A(M) = AM - MA$$

I) 1) a) Démontrer que la matrice A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

I) 1) b) Démontrer que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

I) 2) Déterminer la matrice de l'endomorphisme ϕ_A dans la base de $M_2(\mathbb{R})$:

$$B = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

I) 3) a) Déterminer le polynôme caractéristique P_{ϕ_A} de l'endomorphisme ϕ_A

. I) 3) b) Démontrer que l'endomorphisme ϕ_A est diagonalisable. I) 4) Quelle

relation peut-on observer entre les valeurs propres de A et celles de ϕ_A ? II) Soit B une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$, on définit une application ϕ_B de $M_n(\mathbb{C})$ dans lui-même par :
$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \phi_B(M) = BM - MB.$
II) 1) Démontrer que l'application ϕ_B est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.

On désigne par E_{ij} la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en ligne i et colonne j qui est égal à 1.
On désigne par P une matrice inversible telle que la matrice $P^{-1}BP$ soit diagonale et on la pose égale à $Diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

II) 2) Démontrer que les matrices $PE_{ij}P^{-1}$ sont des vecteurs propres de l'endomorphisme ϕ_B.
Quelles sont les valeurs propres associées ? II) 3) En déduire que l'endomorphisme

ϕ_B est diagonalisable.