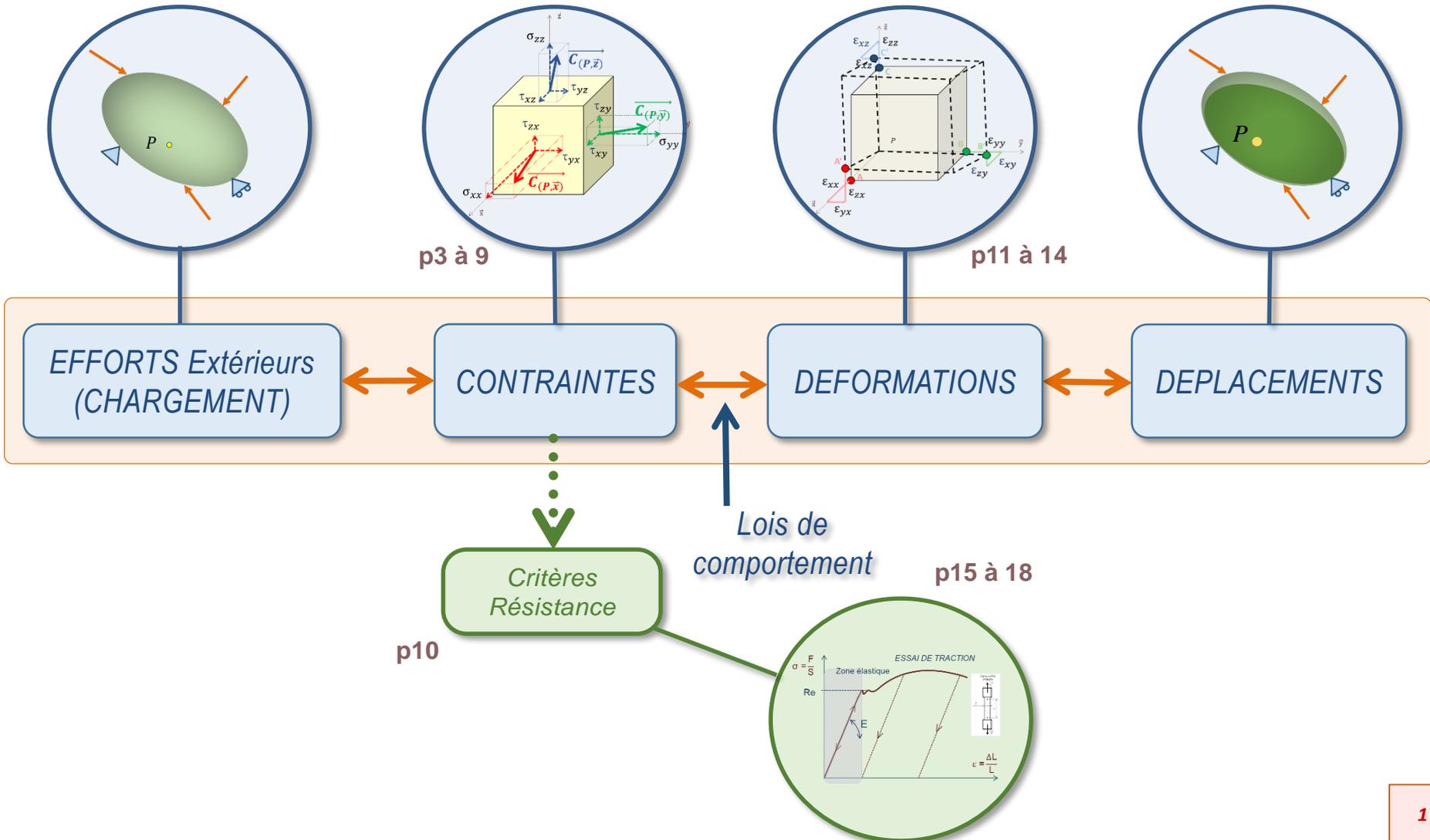


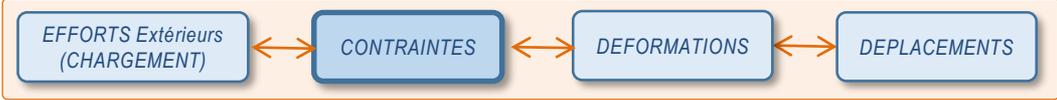


# Grandeurs en élasticité





# Notion de contraintes



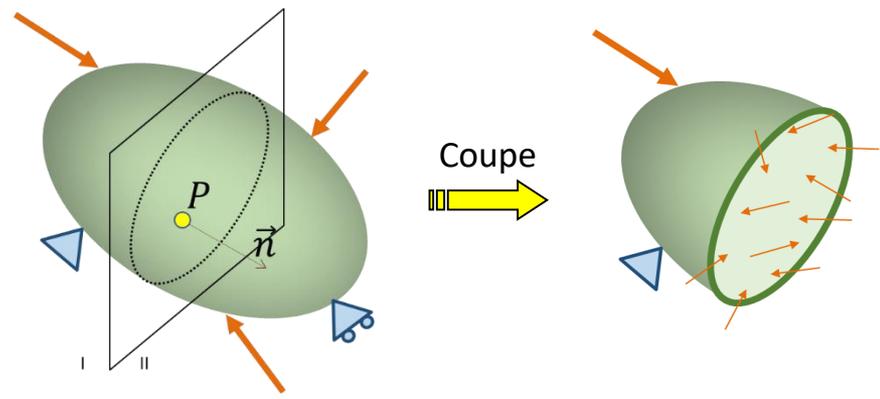
## Vecteur contrainte (rappel de RDM)

### Définition

En tout point P de la structure, on peut définir un plan de coupe en P de normale  $\vec{n}$  sortante.

$$\vec{C}_{(P,\vec{n})} = \frac{d\vec{f}}{ds}$$

$d\vec{f}$  effort appliqué sur l'élément de surface  $ds$ .



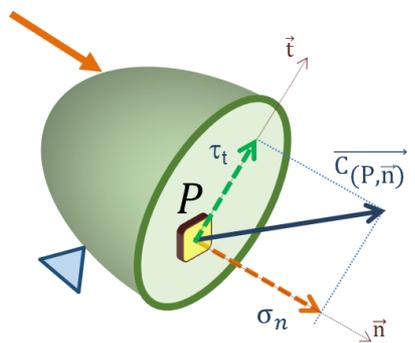
### Composantes du vecteur contrainte

$$\vec{C}_{(P,\vec{n})} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_t \end{bmatrix}_{n,t}$$

Dans la base  $(\vec{n}, \vec{t})$

$$\vec{C}_{(P,\vec{n})} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_t \end{bmatrix}_{n,t}$$

Contrainte normale  
Contrainte tangentielle

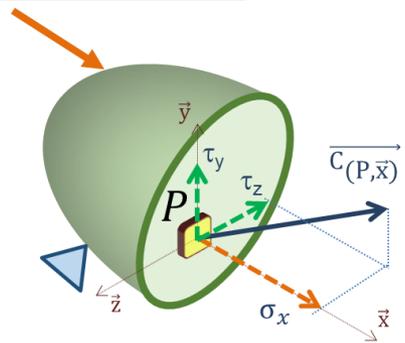


Dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{x} = \vec{n}$$

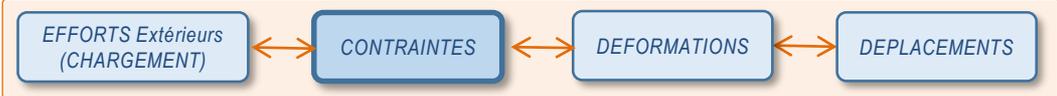
$$\vec{C}_{(P,\vec{n})} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}_{x,y,z}$$

1 composante normale  
2 composantes tangentielles



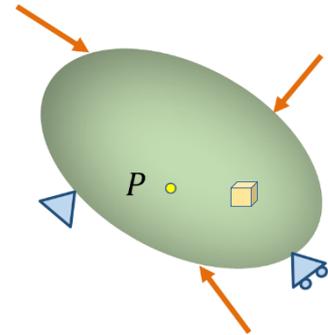


# Notion de contraintes



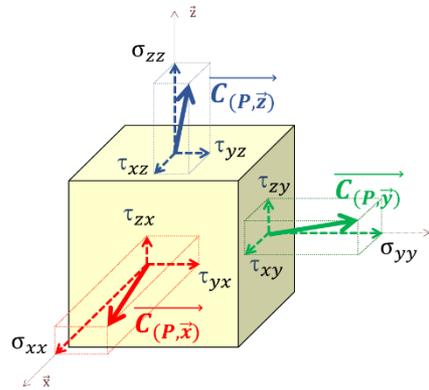
## Matrice des contraintes en un point (caractérisation mathématique)

### Définition



Cube unitaire infiniment petit

L'état de contrainte en un point  $P$  peut être caractérisé par une matrice des contraintes composée de 3 vecteurs



$$[\sigma]_P = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑  
 $\vec{C}(P, \vec{x})$   $\vec{C}(P, \vec{y})$   $\vec{C}(P, \vec{z})$

### Propriétés de la matrice des contraintes

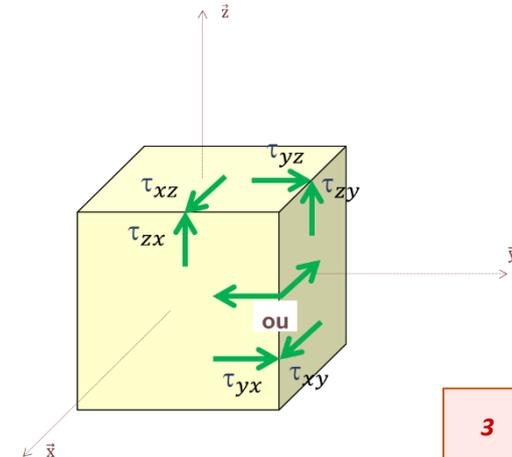
Principe des actions réciproques:  
(Théorème de Cauchy)

Sur facettes opposées : vecteurs contraintes opposés  
 $\vec{C}(P, -\vec{x}) = -\vec{C}(P, \vec{x})$

Equilibre en rotation :

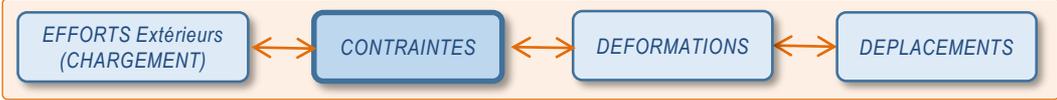
Sur facettes adjacentes : réciprocité des contraintes tangentielles  
 $\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy}$

Matrice symétrique





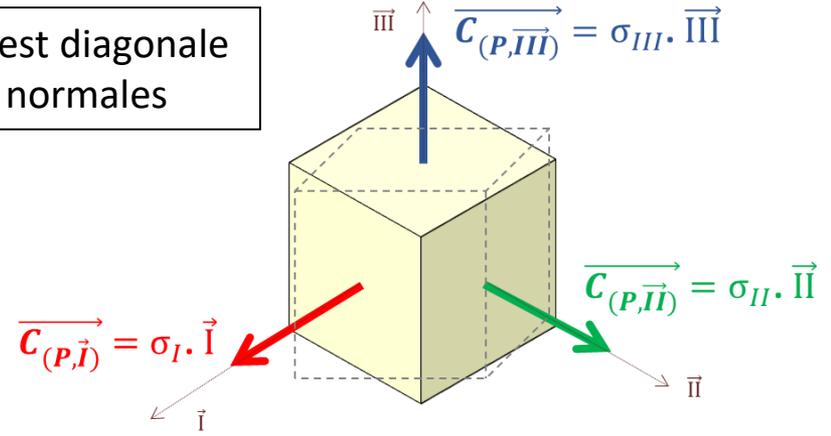
# Notion de contraintes



## Contraintes principales

Il existe une base principale dans la quelle la matrice est diagonale  
 Les seules contraintes non nulles sont les contraintes normales

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{xy} \\ \tau_{xz} & \tau_{xy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{(\vec{I};\vec{II};\vec{III})}$$



### Cas général : diagonalisation de matrice

1- Calcul des valeurs propres : contraintes principales

$$Det\{[\sigma] - \lambda_i \cdot [I]\} = 0 \quad \text{Équation caractéristique} \quad \lambda_I; \lambda_{II}; \lambda_{III} \longrightarrow$$

2- Calcul des vecteurs propres : directions principales

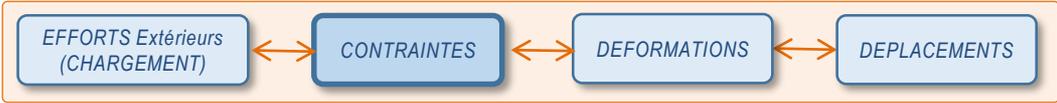
$$\{[\sigma] - \lambda_i \cdot [I]\} \cdot \{x_i\} = \{0\} \quad i = 1, 2, 3 \quad \vec{x}_I; \vec{x}_{II}; \vec{x}_{III} \longrightarrow$$

$\sigma_I = \lambda_I ; \sigma_{II} = \lambda_{II} ; \sigma_{III} = \lambda_{III}$   
Contraintes principales

$\vec{x}_I = \vec{I} ; \vec{x}_{II} = \vec{II} ; \vec{x}_{III} = \vec{III}$   
Directions principales

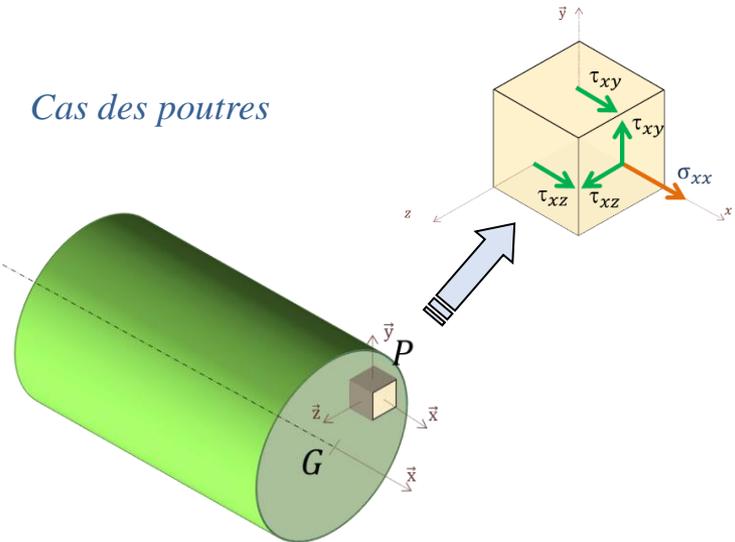


# Notion de contraintes



## Etats de contraintes particuliers

Cas des poutres

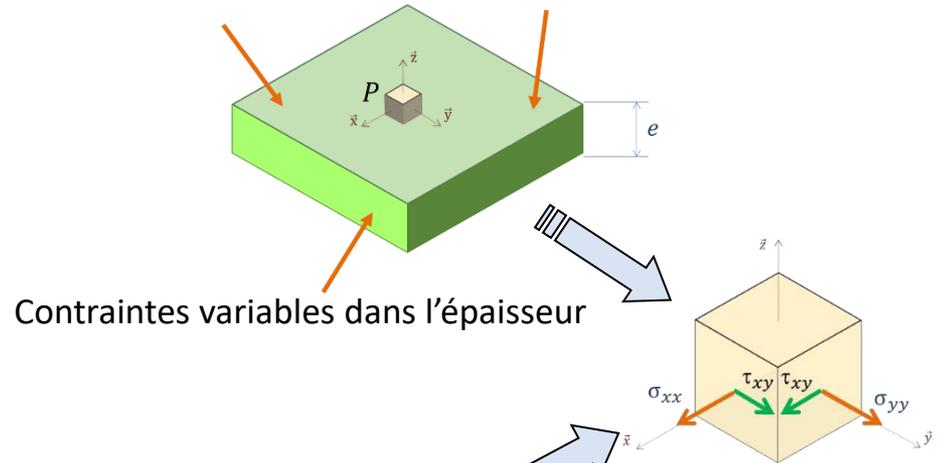


Facette de normale  $\vec{x}$

$$[\sigma]_P = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}; \vec{y}; \vec{z})}$$

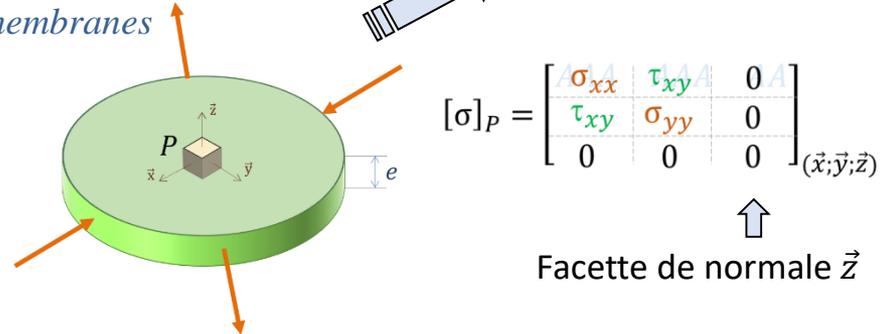
Le vecteur contrainte en RDM suffit à caractériser l'état de contraintes

Cas des plaques en flexion



Contraintes variables dans l'épaisseur

Cas des membranes



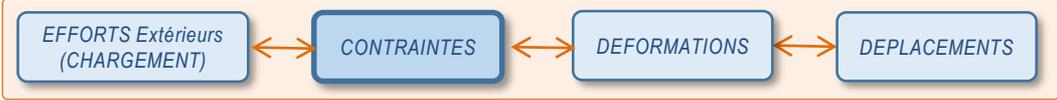
Contraintes constantes dans l'épaisseur

$$[\sigma]_P = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}; \vec{y}; \vec{z})}$$

↑  
Facette de normale  $\vec{z}$



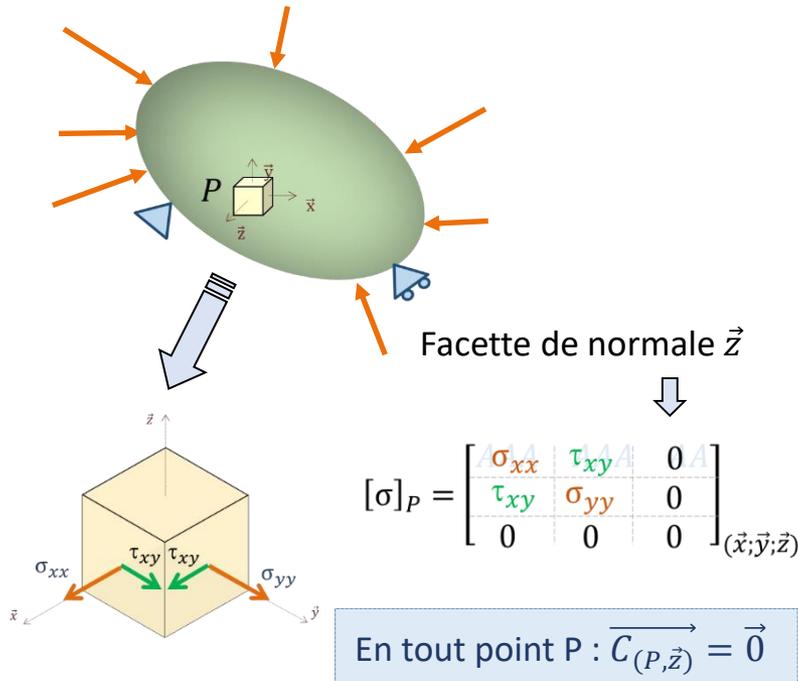
# Notion de contraintes



## Etats de contraintes particuliers et conditions aux limites

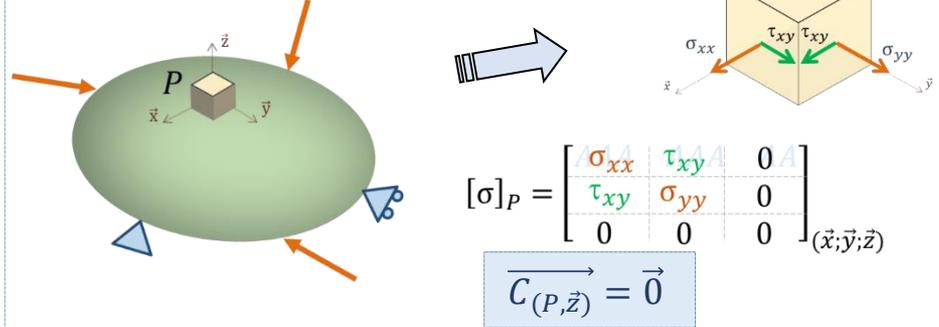
### Problème plan

Par exemple, pièce chargée dans le plan (x,y) et libre suivant z.

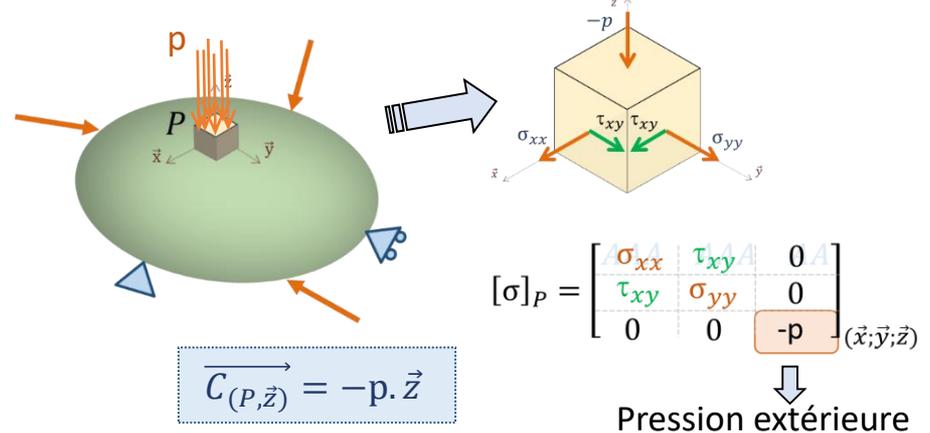


### A la surface d'un solide

#### Surface de normale z libre (sans effort)

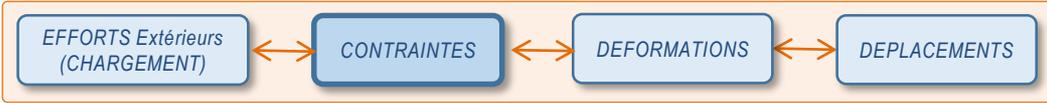


#### Surface de normale z soumise à une pression p

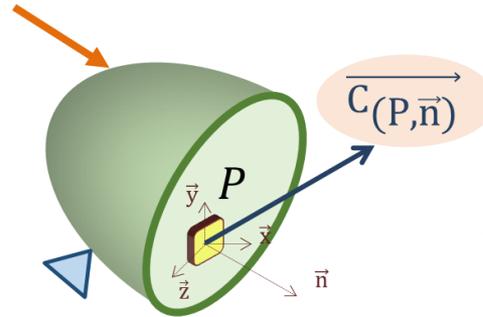
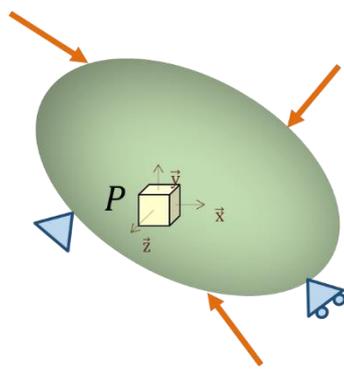




# Notion de contraintes



## Détermination d'un vecteur contrainte



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (\vec{x}; \vec{y}; \vec{z})$$

ETAPE 1 : Calcul du vecteur contrainte  $\overrightarrow{C_{(P, \vec{n})}}$  à partir de la matrice des contraintes

$$\overrightarrow{C_{(P, \vec{n})}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Composantes exprimées dans le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

ETAPE 2 : Calcul de la composante normale  $\sigma_n$

$$\sigma_n = \overrightarrow{C_{(P, \vec{n})}} \cdot \vec{n}$$

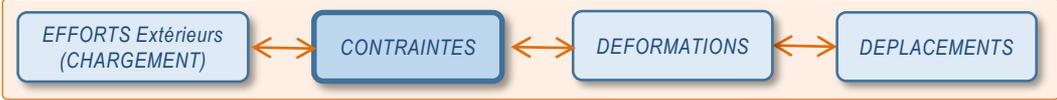
ETAPE 3 : Calcul des composantes tangentielles

$$\overrightarrow{\tau}_n = \overrightarrow{C_{(P, \vec{n})}} - \sigma_n \cdot \vec{n}$$

(en effet :  $\overrightarrow{C_{(P, \vec{n})}} = \sigma_n \cdot \vec{n} + \overrightarrow{\tau}_n$ )

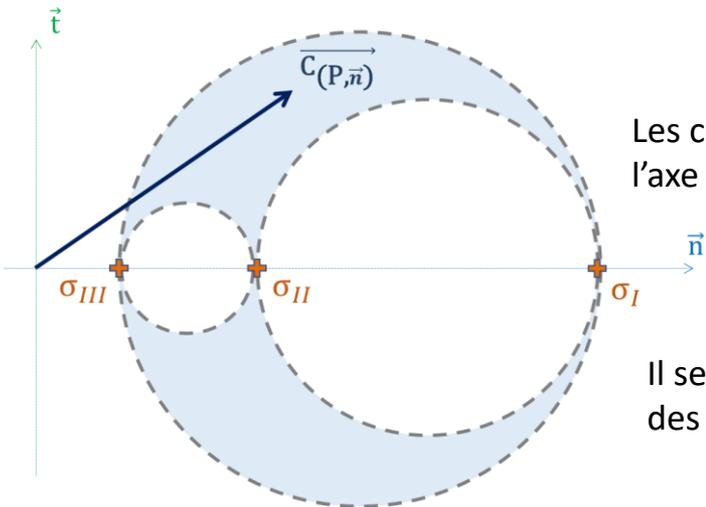


# Notion de contraintes



## Tricercle de Mohr des contraintes (caractérisation graphique)

On montre que l'ensemble des vecteurs contraintes en un point P de normale  $\vec{n}$  est situé dans une zone délimitée par trois cercles dans un repère  $(\sigma, \tau)$

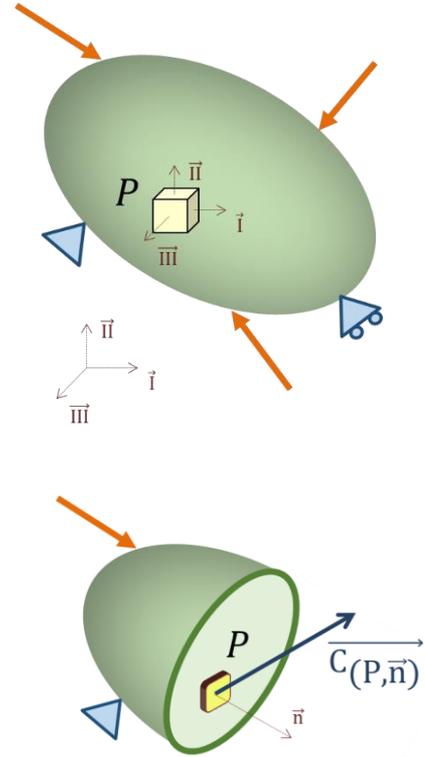


Les cercles sont centrés sur l'axe des abscisses

Il se construit aisément à l'aide des contraintes principales

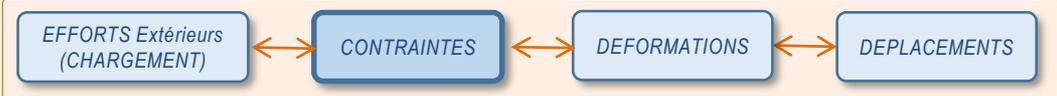
$$[\sigma]_P = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{II}, \vec{III})}$$

Il permet de visualiser l'état de contraintes en fonction de l'orientation de la facette



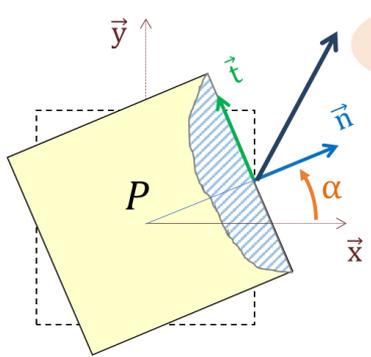


# Notion de contraintes



## Cercle de Mohr des contraintes dans un plan (caractérisation graphique)

*Contraintes normale et tangentielle dans une direction quelconque*

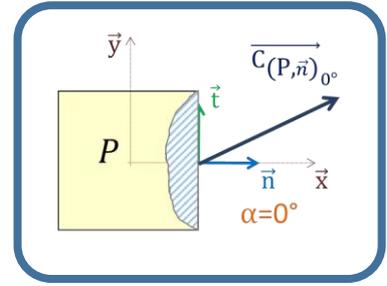
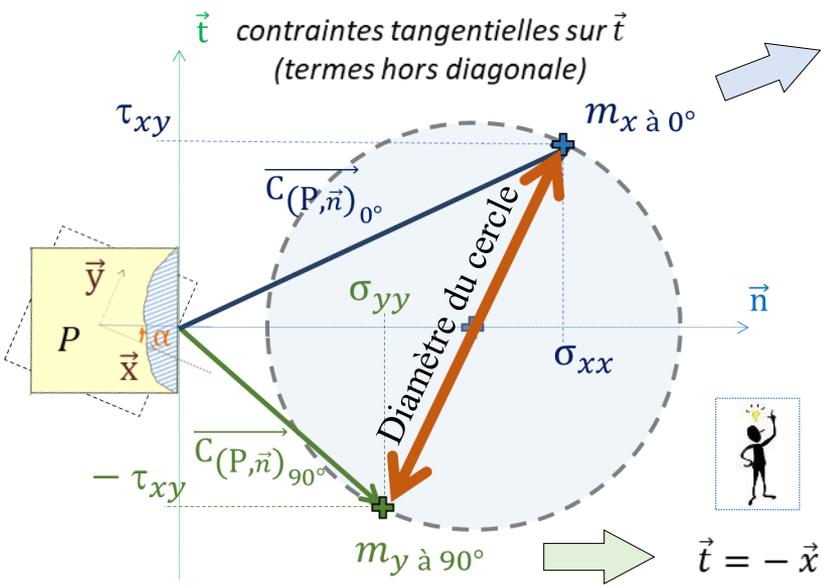
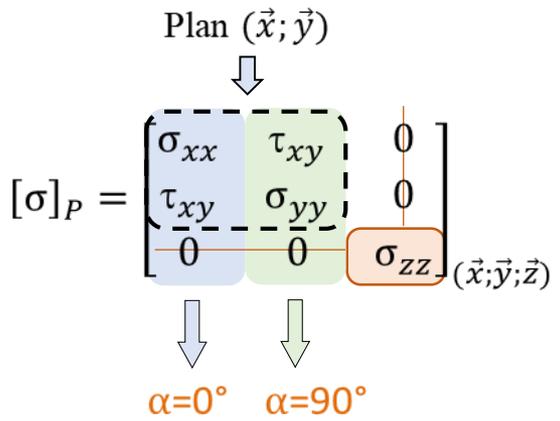


$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \sin(2\alpha) \quad \text{Contrainte normale (suivant } \vec{n})$$

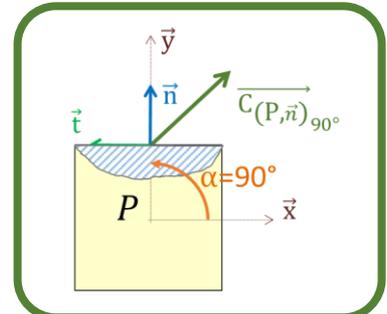
$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\alpha) \quad \text{Contrainte tangentielle (suivant } \vec{t})$$

Equations paramétriques d'un cercle

*Tracé du cercle de Mohr*

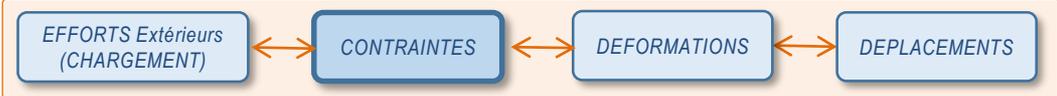


contraintes normales sur  $\vec{n}$   
(termes sur diagonale)

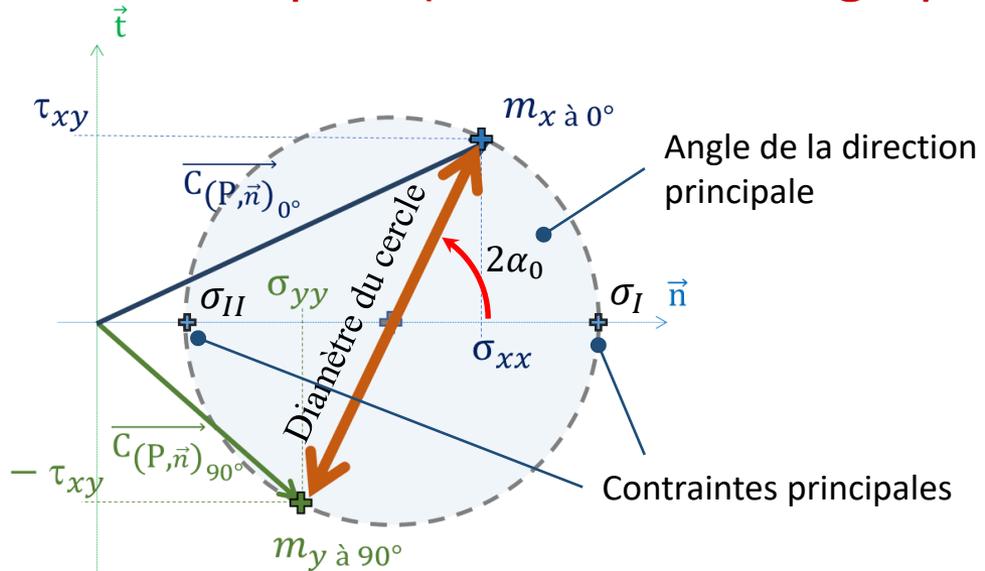
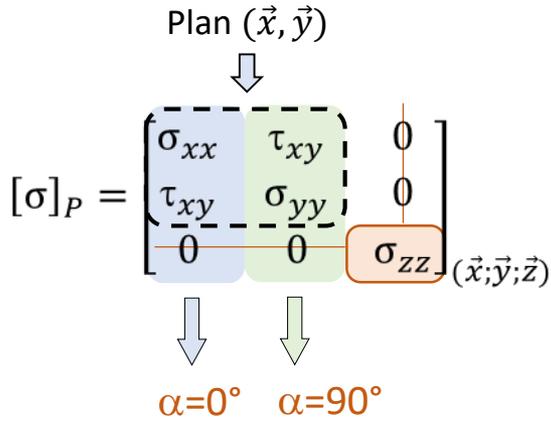




# Notion de contraintes



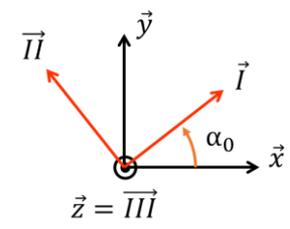
## Cercle de Mohr des contraintes dans un plan (caractérisation graphique)



Contraintes principales

$$\sigma_I = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

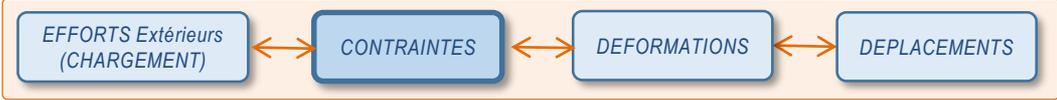
$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}$$



$$\sigma_{III} = \sigma_{zz} \qquad \alpha_0 = (\vec{x}, \vec{l}) \qquad \tan(\alpha_0) = \frac{\sigma_I - \sigma_{xx}}{\tau_{xy}} \qquad \text{ou} \qquad \tan(2\alpha_0) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

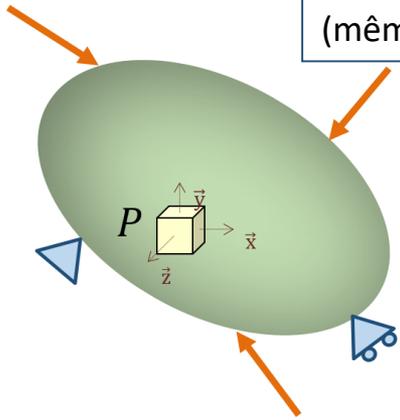


# Critères de résistance



## Principe critère limite élastique

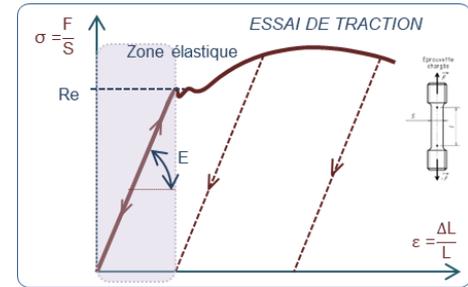
La contrainte équivalente permet de se ramener à l'essai de référence du matériau (même danger de plastification que l'éprouvette de référence soumis à un essai de traction)



$$[\sigma]_P = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{II}, \vec{III})}$$

$$\sigma_{equi} \leq \frac{R_e}{C_s}$$

← Comparaison Essai de référence →



## Contraintes équivalentes : cas général

$$\sigma_{Tresca} = \max[|\sigma_I - \sigma_{II}|; |\sigma_{II} - \sigma_{III}|; |\sigma_I - \sigma_{III}|]$$

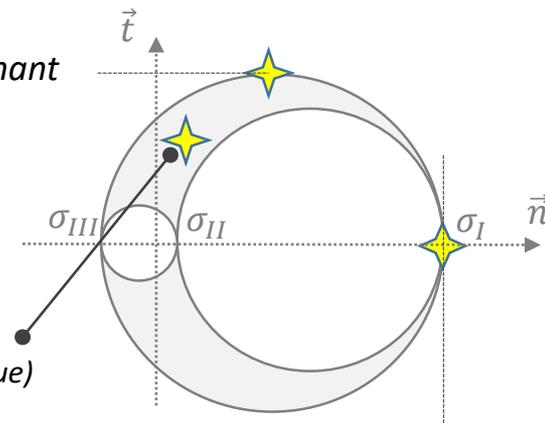
$$\sigma_{Von-Mises} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]}$$

$$\sigma_{Tresca} = \max[|\sigma_I|; |\sigma_{II}|; |\sigma_{III}|]$$

$\tau_{max}$  dimensionnant

$\tau_{moy}$  dimensionnant ( $\tau_{oct}$  dans le plan octaédrique)

$\sigma_{max}$  dimensionnant



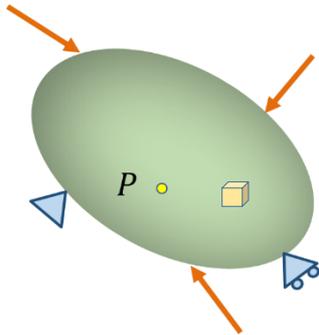


# Notion de déformations



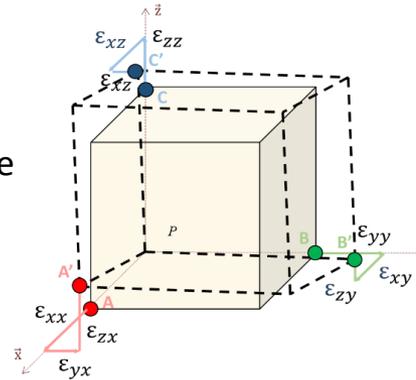
## Matrice des déformations en un point (caractérisation mathématique)

### Définition



Cube unitaire infiniment petit

L'état de déformation en un point  $P$  peut être caractérisé par 3 vecteurs :



Cube unitaire

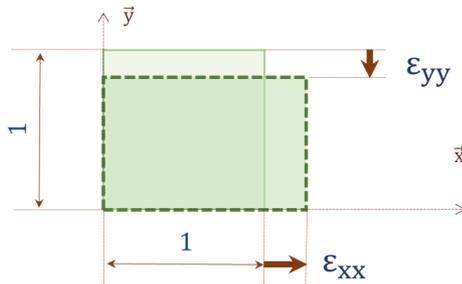
Matrice des déformations carrée, symétrique, d'ordre 3

$$[\varepsilon]_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑  
 $\xrightarrow{D(P, \vec{x})} \xrightarrow{D(P, \vec{y})} \xrightarrow{D(P, \vec{z})}$   
A → A' B → B' C → C'

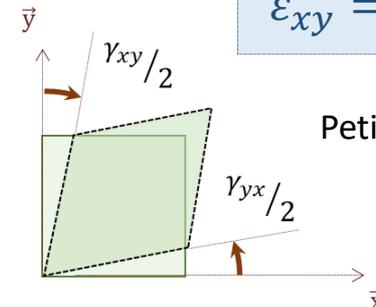
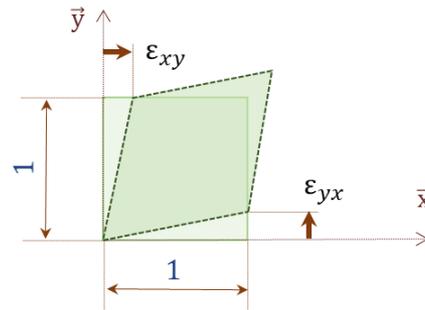
### Déformations longitudinales

Termes sur diagonale



### Déformations transversales / Demi-distorsions

Termes hors diagonale



$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Petites déformations



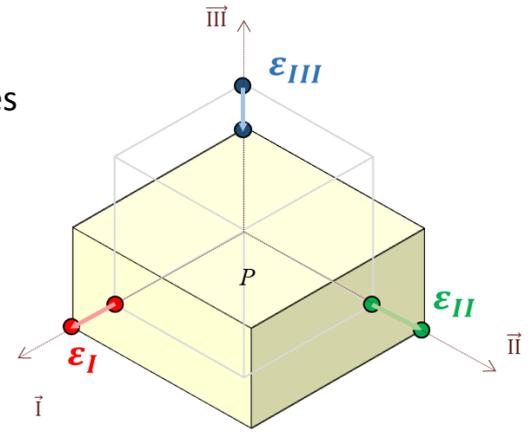
# Notion de déformations



## Déformations principales

Il existe une base principale dans laquelle toutes les déformations sont longitudinales

$$[\varepsilon]_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}; \vec{y}; \vec{z})} \implies [\varepsilon]_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}_{(\vec{I}; \vec{II}; \vec{III})}$$



Disparition des distorsions

### Cas général : diagonalisation de matrice

Calcul des valeurs propres  $\implies$

$$\varepsilon_I ; \varepsilon_{II} ; \varepsilon_{III} \quad \text{Déformations principales}$$

Calcul des vecteurs propres  $\implies$

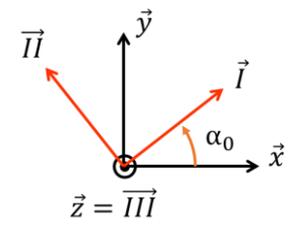
$$\vec{I} ; \vec{II} ; \vec{III} \quad \text{Directions principales}$$

### Cas particulier : une direction principale connue

$$[\varepsilon]_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}; \vec{y}; \vec{z})}$$

$$\varepsilon_I = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$$



$$\varepsilon_{III} = \varepsilon_{zz} \quad \alpha_0 = (\vec{x}, \vec{I}) \quad \tan(\alpha_0) = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}$$

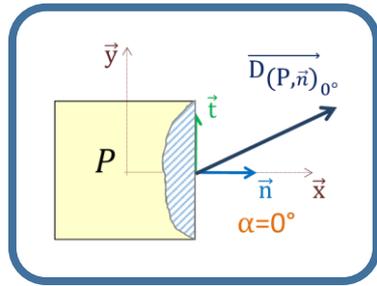
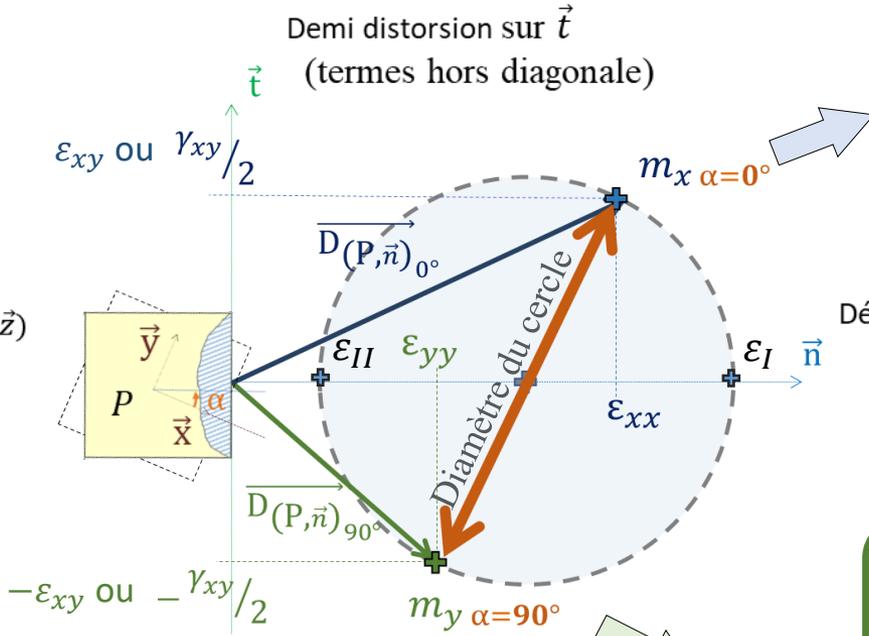
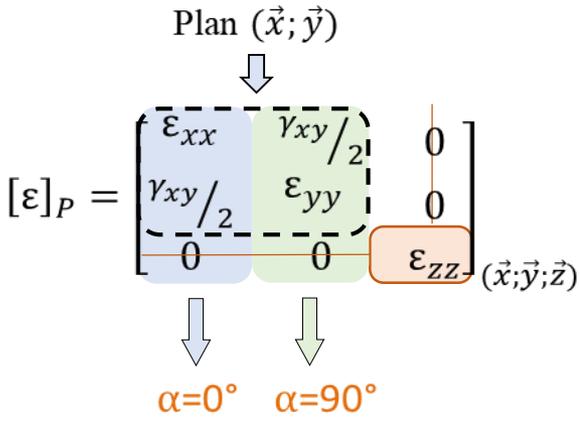


# Notion de déformations

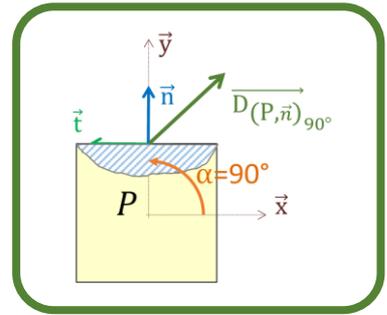


## Cercle de Mohr des déformations (caractérisation graphique)

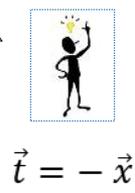
Tracé du cercle de Mohr



Déformation longitudinale sur  $\vec{n}$  (termes sur diagonale)

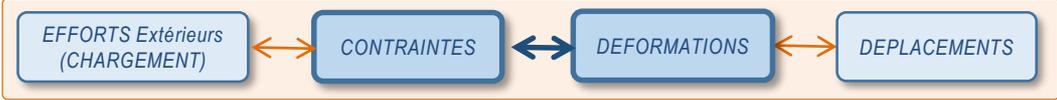


Propriétés identiques au cercle de Mohr des contraintes



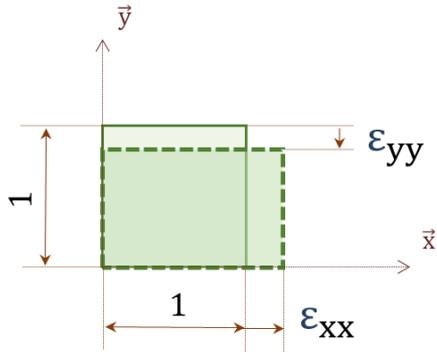
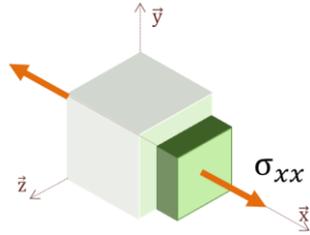


# Lois de comportement



## Cas simples

*Essai de traction uniaxial*



$$\sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx} \quad \text{Loi de Hooke}$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu \cdot \epsilon_{xx} \quad \text{Loi de Poisson}$$

Lois de comportement

CONTRAINTES

$$[\sigma]_P = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

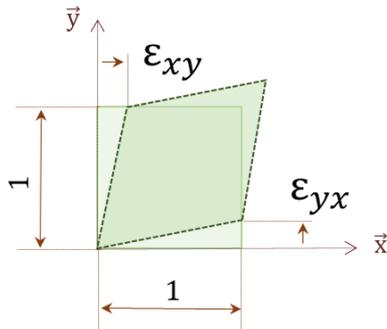
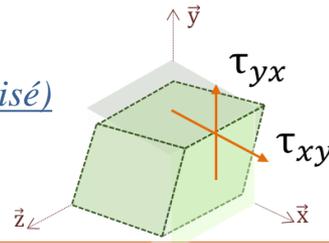
$\rightarrow$

DEFORMATIONS

$$[\epsilon]_P = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \epsilon_{yy} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \epsilon_{zz} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} \end{cases}$$

*Essai de cisaillement (non-normalisé)*



$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \text{Loi de Coulomb}$$

On démontre :  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

Lois de comportement

CONTRAINTES

$$[\sigma]_P = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

DEFORMATIONS

$$[\epsilon]_P = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

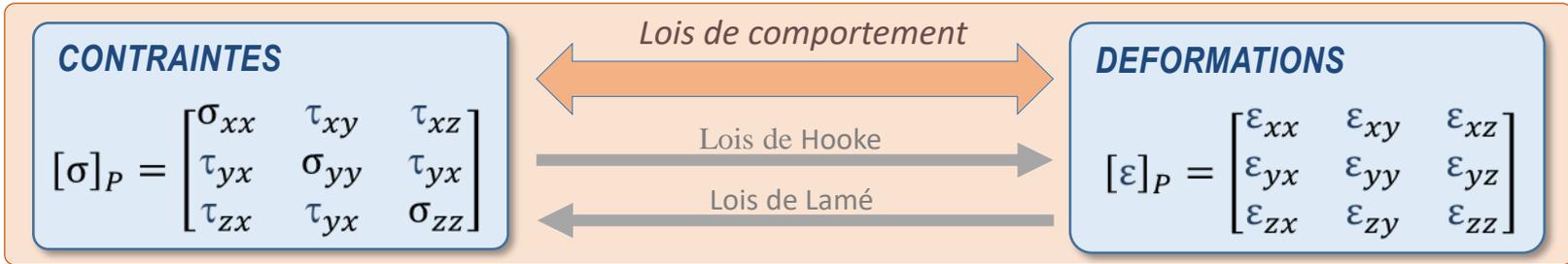
$$\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2 \cdot G} = \tau_{xy} \cdot \frac{1 + \nu}{E}$$



# Lois de comportement



## Cas général



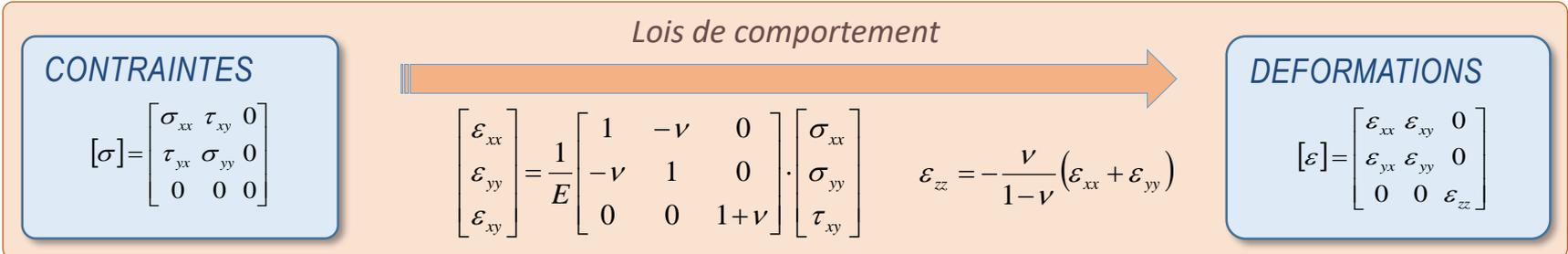
**Lois de Hooke généralisées**

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

**Lois de Lamé**

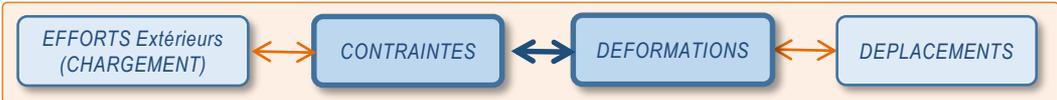
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix}$$

## Cas des contraintes planes





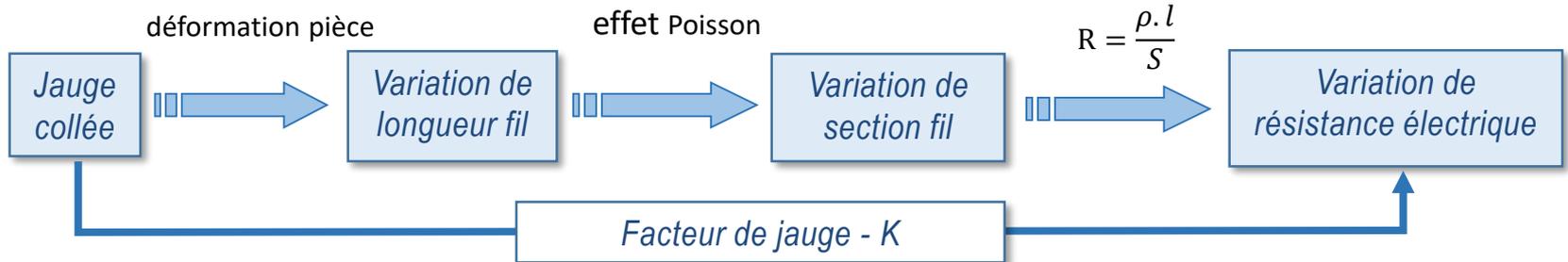
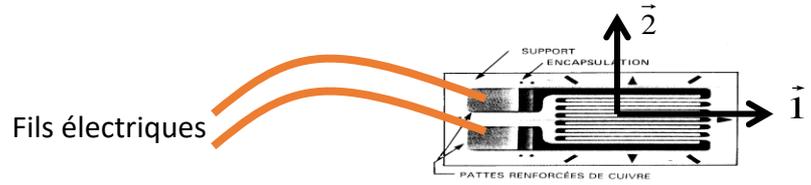
# Extensométrie



## Principe

### Jauge de déformation

On mesure une déformation longitudinale



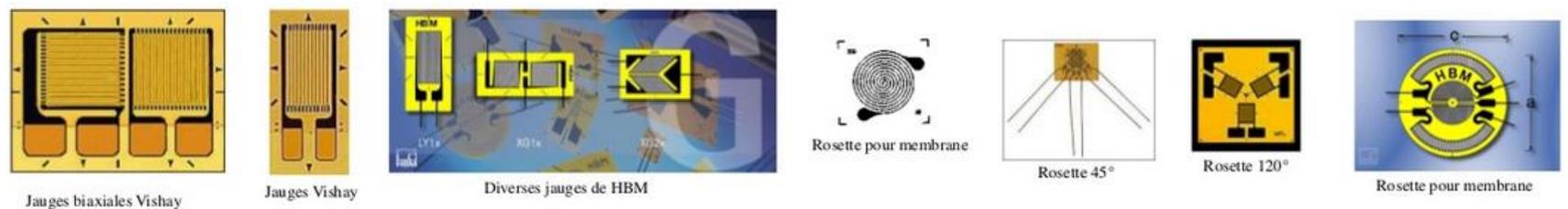
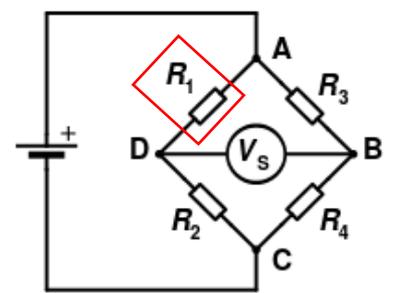
### Conditionneur

Variation de résistance très faible ⇒ Mesure par Pont de Wheatstone

### Effets parasites

- longueur des fils
- température
- hystérésis
- erreur de linéarité

$$V_s = \frac{V_e}{4} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_4}{R_4} - \frac{\Delta R_3}{R_3} \right)$$



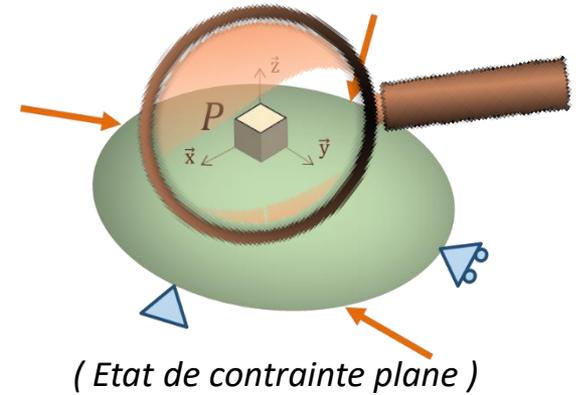
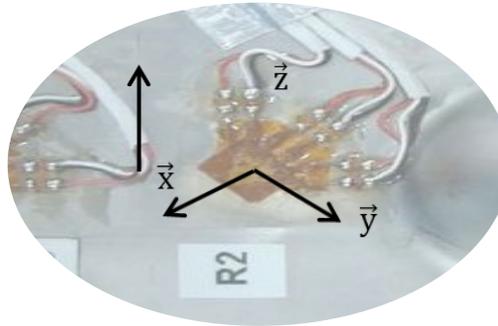
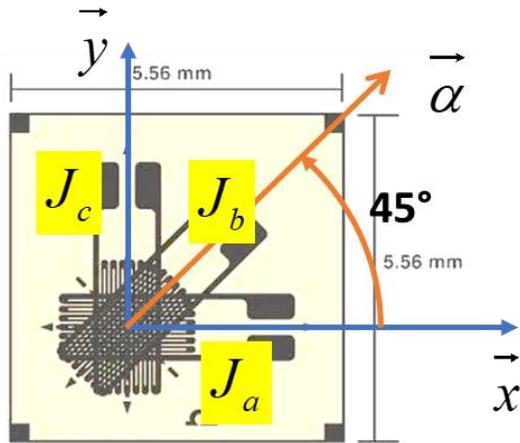


# Extensométrie



## Démarche (exemple de rosette à 45°)

3 jauges ( $J_a - J_b - J_c$ ) disposées suivant 3 directions du plan



$$[\varepsilon] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1,2,3 \end{matrix} & \end{matrix}$$

- Mesure directe
- Mesure indirecte
- Calculé (loi de comportement)

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = [\alpha] \cdot [\varepsilon] \cdot [\alpha]$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(2\alpha) + \varepsilon_{xy} \sin(2\alpha)$$

En s'appuyant sur la relation page 9 pour les contraintes

$$J_b = \varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy}$$

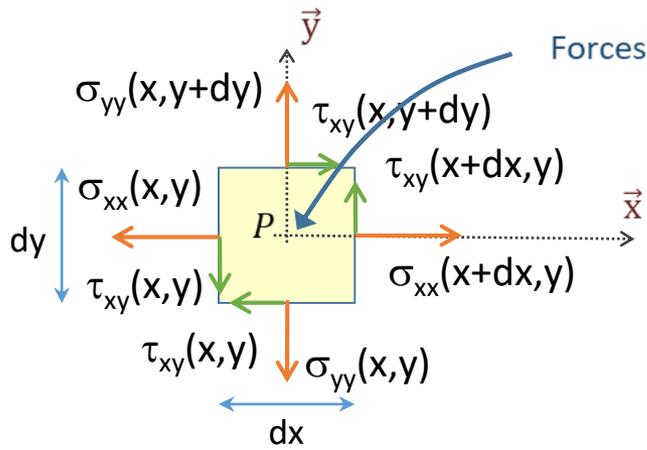
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= J_a \\ \varepsilon_{yy} &= J_c \\ \varepsilon_{xy} &= J_b - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \end{aligned}$$



# Equations d'équilibre



## Dans le plan



Forces volumiques :  $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$

Equilibre /  $\vec{x}$

$$[\sigma_{xx}(x + dx, y) - \sigma_{xx}(x, y)].dy + [\tau_{xy}(x, y + dy) - \tau_{xy}(x, y)].dx + f_x = 0$$

Equilibre /  $\vec{y}$

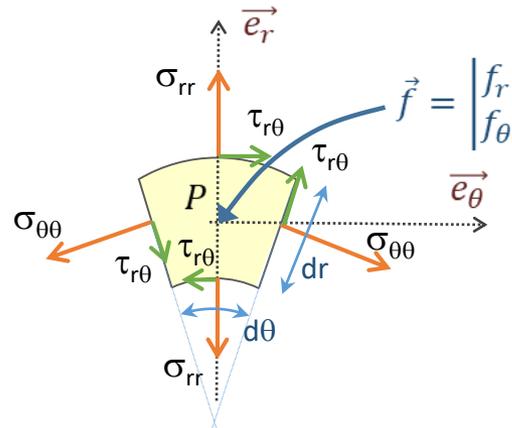
$$[\tau_{xy}(x + dx, y) - \tau_{xy}(x, y)].dy + [\sigma_{yy}(x, y + dy) - \sigma_{yy}(x, y)].dx + f_y = 0$$

Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

### En coordonnées cylindriques



Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0$$



# Linéarisation des dépl<sup>t</sup>



Linéarisation du champ de déplacement

$$\vec{du}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{u}) \wedge d\vec{P} + [\varepsilon_{xy}] \cdot d\vec{P}$$

Déplacement de corps solide ↑ ↑ Déformation

Hypothèses

- petits déplacements
- petites déformations

$$[\varepsilon]_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Partie symétrique de la matrice jacobienne

Sur les directions principales

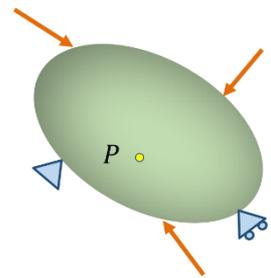
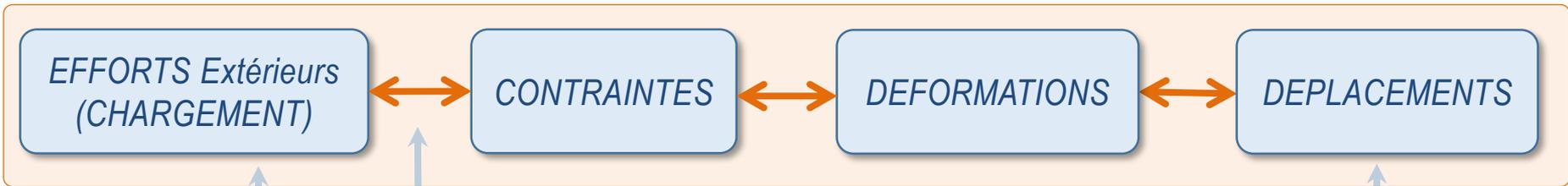
$$[\varepsilon]_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_I}{\partial x_I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_{II}}{\partial x_{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_{III}}{\partial x_{III}} \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{II}, \vec{III})}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$



# Résolution d'un problème d'élasticité

## Méthode des déplacements (Méthode de Navier)



Recherche d'un champ de déplacement  $\vec{u}_{(P)}$  statiquement et cinématiquement admissible

Etape 2 : Equations d'équilibre en fonction de  $\vec{u}_{(P)}$   
(Equations de Navier)

$$\frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}[\overrightarrow{\text{div}}(\vec{u})] - \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})] + \vec{f} = \vec{0}$$

Etape 1 : Conditions au limites en terme de déplacements

- Symétries
- Liaisons (déplacement nul)

Etape 3 : Matrice des déformations  $[\varepsilon]_P$  en fonction de  $\vec{u}_{(P)}$  (page 20)

Etape 5 : Conditions au limites en terme d'efforts (page 6)

Etape 4 : Matrice des contraintes  $[\sigma]_P$  en fonction de  $\vec{u}_{(P)}$  (page 16)



# Résolution d'un problème d'élasticité

## Méthode des forces (Méthode de Beltrami)

