Potentiel Électrostatique - 2

1 Lien entre potentiel et champ électrostatique

Vous vous rendrez compte rapidement que le **calcul du potentiel** est souvent **plus facile** que celui du **champ** (parce qu'on calcule une intégrale scalaire, plutôt que vectorielle). Comment **déterminer le champ si l'on connait déjà le potentiel** ?
Étant donnée la définition du potentiel, on aurait envie d'écrire :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{\vec{dl}}$$

Malheureusement cette notation est mathématiquement impropre. On peut quand même inverser la relation $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$ en écrivant :

Propriétés 1.1 — Expression de $\vec{E}$ en fonction de V.

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$$

où $\overrightarrow{grad}(V)$ est le "**gradient**" de V. Une autre notation pour le gradient est :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(V)$$

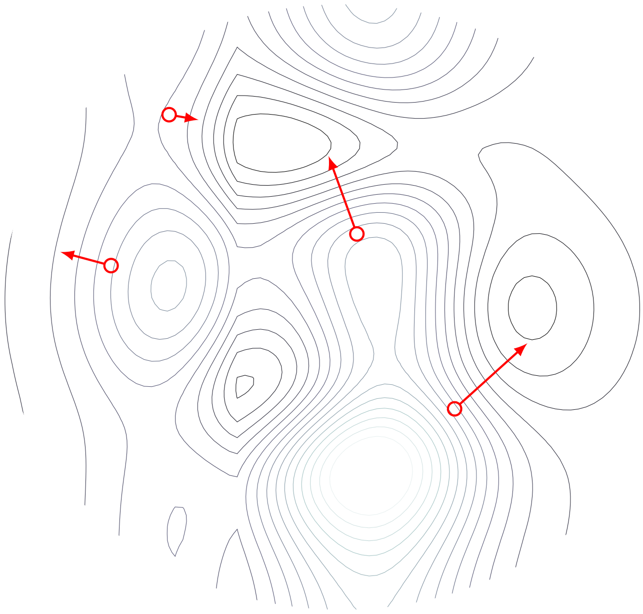
Qu'est-ce que le gradient ? [1]

Définition 1.1 — Gradient.
Le **gradient** est un **opérateur mathématique** qui correspond un peu à une dérivée dans l'espace. C'est un **vecteur**, associé à une **grandeur** scalaire, dont les composantes sur les vecteurs de base sont la dérivée (la pente) par rapport à chaque direction.

Par exemple, si on regarde une carte, et que l'on s'intéresse à la grandeur $A(x, y)$, l'**altitude** en chaque point de la carte (x, y) le gradient de A est tout simplement un vecteur qui indique la direction, le sens et l'intensité de la pente au point (x, y). C'est la direction de la ligne de plus grande pente [2].
Dans ce cas, le gradient de A vaut :

$$\overrightarrow{grad}(A) = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{u}_y$$

1. Pour retenir vite : le gradient d'une grandeur qui varie en 1D (un profil par exemple), c'est sa pente. Le gradient d'une grandeur qui varie en 2D (un carte d'altitude par exemple), c'est sa pente dans les deux directions. Le gradient d'une grandeur qui varie en 3D (un potentiel dans l'espace par exemple), c'est sa pente dans les trois directions.
2. À peu de chose près, ce sont les lignes que suit l'eau qui s'écoule sur cette pente



Les flèches rouges représentent le gradient de l'altitude du sol, pris en différents points d'une carte de niveau. Notez que la longueur du gradient est d'autant plus grande que la pente est forte. Essayez de dessiner le gradient en différents points de cette carte comme exercice.

Point important 1.1 — Détermination du champ à partir du potentiel.
Si l'on connait la valeur du potentiel en tout point de l'espace, on détermine le champ de la façon suivante :

1. On choisit un **système de coordonnées** adaptées (généralement, si on vous avez V en fonction de x, y, z, choisissez les cartésiennes, si c'est r, θ, z, les cylindriques, et si c'est r, θ, ϕ les sphériques).
2. On cherche sur Wikipedia[a] l'**expression du gradient** dans les dites coordonnées.
3. On applique ces formules à V pour déterminer les **composantes** du champ sur les vecteurs de base des coordonnées choisies.

a. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Gradient`

Exercice 1.1 — Calcul d'un champ électrique à partir du potentiel.
Une charge ponctuelle située en O créé le potentiel suivant :

$$V(r) = \frac{kQ}{r}$$

Exprimer le champ électrique en coordonnées sphériques.
En coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix}_{\text{sphériques}}$$

On calcule donc les composantes du champ $\vec{E}$:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$E_r = \frac{kQ}{r^2}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$E_\theta = 0$$

car V ne dépend pas de θ, de même puisque V ne dépend pas de ϕ :

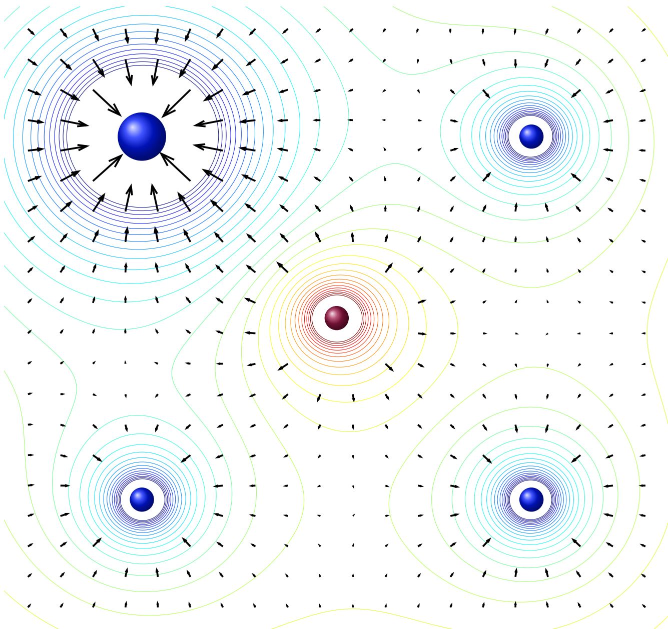
$$E_\phi = 0$$

Au final :

$$\boxed{\vec{E} = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta + E_\phi\vec{u}_\phi}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\vec{u}_r}$$

Ce qui correspond bien à ce que l'on sait du champ créé par une charge ponctuelle.



Lignes de potentiel et champ électrique.

Tout comme les lignes de niveau représentent les lignes d'altitude équivalente, on peut tracer les lignes de potentiel équivalente. On appelle cela une iso-potentielle, une équipotentielle, ou plus simplement ligne de potentiel. Voici les lignes de potentiel créées par 5 charges ponctuelles. Plus le potentiel est grand, plus les isos correspondantes sont rouges et plus il est faible, plus elles sont bleues.

R Remarquez comme le champ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants[3].
Remarquez également que le champ est normal aux équipotentielles.
Enfin, il y a un nombre infini de lignes de champ. Pour des raisons évidentes, on en représente qu'un nombre fini, généralement pour des valeurs de potentiel espacées régulièrement.

3. De manière informelle : du $+$ vers le $-$