Courant électrique et Résistances

PRÉREQUIS

- Loi d'Ohm
- Champ électrique
- Principe fondamental de la dynamique

1 Courant électrique

Si l'on plonge un métal dans un **champ électrique**, les **charges libres** qui s'y trouvent vont amorcer un mouvement du fait de la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$.
Ce **mouvement général** de charge est appelé "**courant électrique**".
Une situation gravitationnelle équivalente correspondrait à une conduite horizontale, remplie d'eau, qui serait soudainement penchée (une différence de potentielle est appliquée entre chaque extrémités). L'eau se mettrait à couler vers le bas.

1.1 Densité de courant

Tout comme la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ rend compte d'un transport de masse, on peut construire un vecteur qui rend compte de la quantité de charge qui se déplace $q\vec{v}$.
Lorsqu'un système contient beaucoup de charges en mouvement [1] dans un volume, on introduit le vecteur densité de courant. On appelle **densité de courant** ou **courant volumique** la grandeur :

$$\vec{j} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{V}\sum_i q_i\vec{v}_i$$

Pour un système qui contient un grand nombre de charges, toutes de même valeur q (par exemple des électrons), cette densité devient :

$$\vec{j} = q\frac{1}{V}\sum_i \vec{v}_i$$

Si on introduit la vitesse moyenne des porteurs de charge [2] : $\vec{v}_d \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum \vec{v}_i$, on obtient alors une réécriture pratique du vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = \frac{N}{V}q\vec{v}_d$$

si le volume V que l'on considère est très petit, on reconnaît $\rho = \frac{N}{V}$

Définition 1.1 — Densité de courant.
La définition opérationnelle de la densité de courant en électricité est :

$$\boxed{\vec{j} \overset{\text{def}}{=} \rho\vec{v}_d}$$

où $\rho = \frac{N}{V}$ est la densité de charge libres.

1. On ne s'intéresse donc qu'aux charges mobiles
2. Aussi appelée "vitesse de dérive", d'où l'indice v_d

1.2 Courant électrique

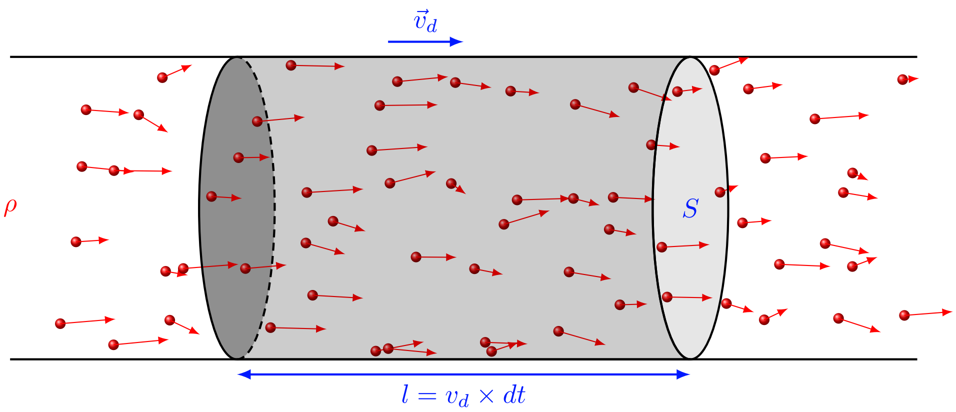
Dans le cas d'un cours d'eau, un courant, ou un débit, correspond à la quantité de liquide qui traverse une section du cours d'eau pendant une durée fixée. De la même façon, un courant électrique correspond au nombre de charge en train de passer à travers une section de fil pendant une durée fixée.
On obtient l'**intensité du courant** à travers une surface en calculant le **flux** de $\vec{j}$ à travers une surface (section) :

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int dI$$
$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Si on prend un cas simple, une vitesse de dérive $\vec{v}_d$ homogène et perpendiculaire à S, on obtient :

$$I = \rho v_d \times S$$
$$I \times dt = \rho v_d S \times dt \qquad \text{(On multiplie par } dt \text{ de part et d'autre de l'égalité)}$$

Or $S \times v_d dt$ est le volume qui contient le nombre de charge qui sont passées à travers la surface S (voir ci-dessous)



Le nombre de particules mobiles, de vitesse moyenne v_d qui passe à travers la surface S pendant dt est égal au nombre de particule qui se trouvent dans un cylindre de base S et de hauteur $v_d \times dt$, ici : $dq = \rho \times (S \times v_d \times dt)$.

$$I \times dt = \rho v_d S dt$$
$$I \times dt = dq$$
$$I = \frac{dq}{dt}$$

C'est ce résultat que l'on utilisera le plus souvent pour définition du courant.

Définition 1.2 — Courant électrique.
Le courant qui traverse une surface S est :

$$\boxed{I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dQ}{dt}}$$

Son unité est le $C.s^{-1}$ aussi connu sous le nom de "Ampère".

Exercice 1.1 — Vitesse de dérive dans un fil de cuivre.
On fait circuler un courant de $10A$ dans un fil de cuivre de section $S = 0.05\ cm^2$. Sachant que chaque atome de cuivre libère un électron mobile, en déduire la densité de porteurs de charge et la vitesse de dérive des électrons.
Connaissant la masse volumique du cuivre ($\rho_m = 8900kg.m^{-3}$) et la masse molaire du cuivre ($M = 63.5g/mol$), on détermine la densité d'atomes n :

$$\begin{aligned}
n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{dN}{dV} \\
n &= \frac{N}{V} \qquad \text{(On suppose que la densité d'atomes est homogène)} \\
n &= \frac{m}{M}\frac{N_a}{V} \\
n &= \frac{\rho_m V}{M}\frac{N_a}{V} \\
n &= \frac{\rho_m N_a}{M} \\
n &= 8 \times 10^{28} \text{ atomes par } m^3
\end{aligned}$$

La densité de charge mobile est donc :

$$\rho = n \times (-e)$$

et la vitesse de dérive est :

$$\begin{aligned}
v_d &= \frac{I}{\rho S} \\
v_d &= 148\ \mu m/s
\end{aligned}$$

Cette vitesse est faible, et c'est normal, on rappelle qu'il s'agit d'une vitesse moyenne, et non de vitesse de chaque électron en particulier.

2 Conductivité/Résistivité

2.1 Modèle de collision

Pourquoi la vitesse moyenne des électrons dans un conducteur est-elle si **faible** ? Cela est dû au fait que les électrons sont en permanence ralentis par les **chocs** thermiques avec le milieu dans lequel ils circulent.
On peut modéliser cet effet par l'équivalent d'un frottement fluide, appliqué aux électrons. Le Principe Fondamental de la Dynamique, appliqué à une charge dans un conducteur donne :

$$m\vec{a} = q\vec{E} - \alpha\vec{v}$$

Très vite le régime permanent est atteint, la vitesse devient constante : $\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m}$ La densité de courant vaut alors :

$$\begin{aligned}
\vec{j} &\stackrel{\text{def}}{=} \rho\vec{v}_d \\
\vec{j} &= \frac{nq^2}{\alpha}\vec{E} \\
\vec{j} &= \gamma\vec{E}
\end{aligned}$$

On note γ la **conductivité** du matériau, par définition, la lien entre la densité de courant et le champ électrique :

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{j}{E}$$
$$\gamma = \frac{nq^2}{\alpha}$$

Notons qu'ici, la conductivité γ est inversement proportionnelle au coefficient de frottement α.
Plus les chocs des électrons dans le matériau sont important/fréquents, plus la **conductivité** est faible et plus la **résistivité** est grande.

2.2 Conductivité et Résistivité

Définition 2.1 — Conductivité.
La **densité de courant** est **proportionnelle** au **champ électrique** et on appelle **conductivité** la constante de proportionnalité :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

L'inverse de la conductivité est appelée "résistivité" et est noté souvent ρ (ne pas confondre avec la densité de charge ! !).

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\gamma}$$

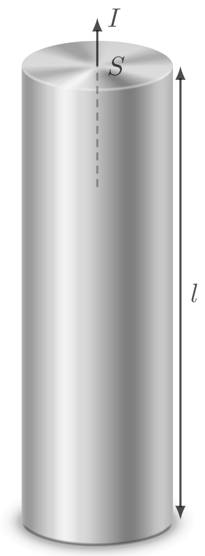
Tout comme la conductivité, c'est une grandeur **intensive** (c'est à dire que c'est une **caractéristique** du matériau, et la géométrie n'y change rien). Son unité est le $\Omega \cdot m$

R On remarquera que plus un milieu est conducteur, plus un même champ électrique mènera à un fort courant.
Il y a un lien très fort entre la loi d'Ohm ($U = RI$) et la loi $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Cette dernière est en fait la **forme locale** de la loi d'Ohm. Ceci signifie qu'il s'agit de l'expression de la loi d'Ohm dans un tout petit volume. Il faudrait sans doute mieux voir la loi d'Ohm comme la **forme globale** (intégrée sur un grand volume) de la loi $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

L'ordre de grandeur de la résistivité pour des matériaux courant est la suivante (données pour un matériau à $25°C$) :

Matériau	Résistivité ($\Omega \cdot m$)
Aluminium	10^{-8}
Silicium pur	10^{3}
Caoutchouc	10^{13}
Mica	10^{18}

3 Résistance



Si on s'intéresse au courant traversant un morceau de fil métallique, où règne un champ électrique imposé par une différence de potentiel $|\Delta V|$, on aura :

$$I = j \times S$$
$$I = \gamma E \times S$$
$$I = \gamma \frac{|\Delta V|}{l} \times S$$

Le courant et la tension sont proportionnels, on note ici

$$R = \frac{l}{\gamma S}$$
$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Définition 3.1 — Résistance.
Et de façon plus générale encore, on appelle résistance la constante de proportionnalité entre tension et courant [a] :

$$\boxed{R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\Delta V|}{I}}$$

C'est presque la fameuse loi d'Ohm $U = RI$
Pour un fil, la résistance vaut :

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S}}$$

a. Attention, tension et courant ne seront pas toujours proportionnels, c'est seulement dans les cas où c'est effectivement le cas que l'on peut parler de résistance

R La résistivité d'un matériau dépend particulièrement de la **température**. Pour les **métaux**, la **résistivité augmente** avec la température. Pour les **semi-conducteurs**, c'est l'inverse, à mesure que la température augmente, de plus en plus d'électrons deviennent libres et peuvent participer à la conduction.