Résolution d'équations non linéaires : point fixe, Newton

1ère partie : Cas scalaire

Exposé par Jérôme MONNIER, Professeur à l'INSA de Toulouse, Département de Génie Mathématique et Modélisation.

Plan :

- Position du problème : résolution numérique d'une équation non linéaire, cas scalaire
- Méthode de dichotomie
- Méthode de point fixe
- Méthode de Newton
- Méthode de la sécante

Position du problème

$F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, F *non-linéaire* (ex. $\sin(x), \sqrt{x}$).

NB. F linéaire : $F(x) = a \cdot x$ (ou $ax + b$ pour F affine).

> Objectif. Résoudre l'équation (non linéaire) : $F(x) = 0$.

$\rightarrow$ Construction d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers *une* solution du problème.

Exemple : $\sqrt{2}$= ? Calculatrice : algorithme itératif pour résoudre $x^2 - a = 0$!

1ère méthode : *localiser* une solution "pas à pas" : **dichotomie**.

> *Proposition*. $F : [a, b] \to R$, continue sur $[a, b]$. On suppose que $F(a)F(b) < 0$, alors $\exists x^* \in]a, b[$ tel que $F(x^*) = 0$. De plus x^* est unique si F est de plus monotone (soit croissant, soit décroissante).

Exercice. Donner trois exemples illustrant ces propos.

Méthode de la dichotomie

Hyp. : $F : [a,b] \to R$ *strictement croissante et continue sur* $[a,b]$ *et tq :* $F(a)F(b) < 0$.

On note : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c = \frac{a_0+b_0}{2}$.

$\Rightarrow$ Si $F(a_0)F(c) < 0$ alors $x^* \in [a_0, c]$. On pose alors $a_1 = a_0$ et$b_1 = c$ et on itère.

$\Rightarrow$ Sinon, on a $x^* \in [c, b_0]$ et on pose $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$.

Dans les deux cas, on obtient $x^* \in [a_1, b_1]$.

> *Algorithme.* Soient a_n, b_n tq $x^* \in [a_n, b_n]$. On pose $c = \frac{a_n+b_n}{2}$.
> Si $f(a_n)f(c) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c$,
> sinon, on pose $a_{n+1} = c$ et $b_{n+1} = b_n$.

On montre par récurrence :

- $(a_n)_{n\in N}$ *est croissante,* $(b_n)_{n\in N}$ *est décroissante,*
- $|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $x^* \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$.

Les suites $(a_n)_{n\in N}$ et $(b_n)_{n\in N}$ sont adjacentes ; elles convergent vers x^*.

De plus : $\boxed{|a_n - x^*| \le \frac{b-a}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}}$.

Méthode de point fixe

On a :

$$\boxed{F(x) = 0 \Leftrightarrow x = G(x, \lambda) \text{ avec } G(x, \lambda) = x + \lambda F(x) \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}^*}$$

Theorème du point fixe. Soit F une application de I dans $\mathbb{R}$ tq :
- $F(I) \subset I$,
- $\exists k \in [0, 1[$ tq F k-contractante :

$$\forall (x, y) \in I^2, \ |F(x) - (y)| \leq k|x - y|$$

alors F admet un unique point fixe $l \in I$ tq : $F(l) = l$.
De plus,
$x_0 \in I; \quad x_{n+1} = F(x_n), n \in \mathbb{N}$, converge vers l.

D'où **l'algorithme de point fixe :**

$$\boxed{x_0 \text{ donné} \,;\ x_{n+1} = x_n + \lambda F(x_n) \ , n \geq 0}$$

Méthode de point fixe (suite)

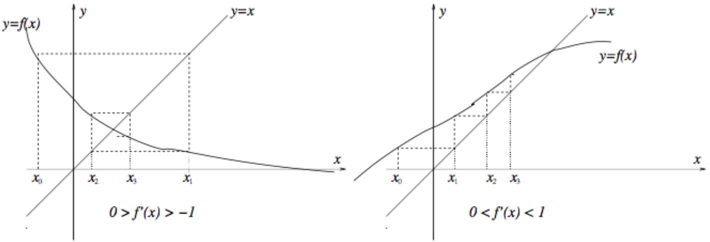


FIGURE 3.4 – Premiers itérés d'une méthode de point fixe.

Vitesse de convergence. λ choisi tq $G(x,\lambda)$ strictement contractante. On mq :

$$\boxed{|x_n - x^*| \leq \frac{k(\lambda)^n}{(1-k(\lambda))}|x_1 - x^*|}$$

$\rightarrow$ vitesse de CV d'ordre 1.

NB. Variante possible de l'algo. : $x_{n+1} = x_n + \lambda_n F(x_n)$ avec $|1+\lambda_n F'(x_n)| \leq k < 1, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Méthode de Newton

Principe : résoudre l'équation *linéarisée*.

- D.L. de Taylor à l'ordre 1 au point x_n

$$F(x_n + h) = F(x_n) + h\, F'(x_n) + h\, \varepsilon(h)$$

  et on néglige le reste
- On cherche l"'incrément" h tq : $F(x_n + h) = 0$.

$\Rightarrow$ A chaque itération, on résout : $F(x_n) + hF'(x_n) = 0$.
En posant $x_{n+1} = x_n + h$, cela donne l'algorithme de Newton :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \text{ , } n \geq 0; x_0 \text{ donné}}$$

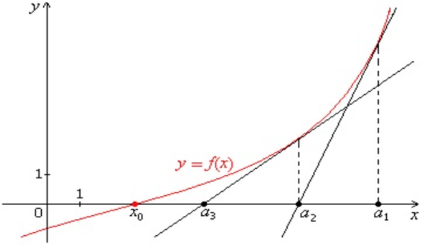
pour $F'(x_n) \neq 0$.
$\oplus$: Convergence rapide (si CV !...)
$\ominus$: Convergence locale ... $\rightarrow$ bien choisir le point initial x_0

Méthode de Newton : interprétation graphique

L'itéré de Newton se ré-écrit ainsi :

$$F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

i.e. x_{n+1} est le point d'intersection entre l'axe des y et la droite
$y = F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n)$
(=tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_n) .



Méthode de Newton : convergence

Théorème.
Hyp. : F de classe C^2 et x^* racine simple de $F(x) = 0$
($\Rightarrow F(x^*) = 0$ et $F'(x^*) \neq 0$).
Alors l'algorithme de Newton converge localement, à l'ordre 2.

CV locale : $\exists \eta > 0$ tq si $|x^* - x_0| < \eta$ la suite $(x_n)_n$ converge vers x^*.

Vitesse de CV d'ordre 2 : $\exists C > 0$ tq :

$$\boxed{|x_n - x^*| \leq C|x_{n-1} - x^*|^2}$$

$\Rightarrow$ *En pratique*, à chaque itération le nombre de digits exact est doublé ; $|x_{n-1} - x^*| = 10^{-p} \Rightarrow |x_n - x^*| \approx 10^{-2p}$.

Variante de Newton : méthode de la sécante

Le calcul de $F'(x_n)$ ($DF(x_n)$ dans le cas de systèmes) peut être délicat à mener...
Alternative simple : *approcher la dérivée* par une différence divisée.

$\rightarrow$ Algorithme de la sécante :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - F(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} \text{ , } n \geq 0; x_0 \text{ donné}}$$

Idem Newton : CV locale uniquement.

Vitesse de CV plus faible que celle de Newton.
(ordre $= (1+\sqrt{5})/2 > 1$).