Exercice de révision

Estimation d'intégrale

Ce que doit faire votre application

On cherche à évaluer l'intégrale d'une fonction $f(x)$. entre deux bornes a et b comprises dans son domaine de définition : $I_{ab} = \int_a^b f(x)dx$. On rappelle que l'intégrale d'une fonction correspond à la surface comprise sous la courbe $f(x)$.

Dans le cas de ce sujet, la fonction $f(x)$ sera une fonction continue par morceaux ayant la représentation de la Figure n°1. Sur cette figure apparait en grisé la surface et donc la valeur de l'intégrale à estimer.

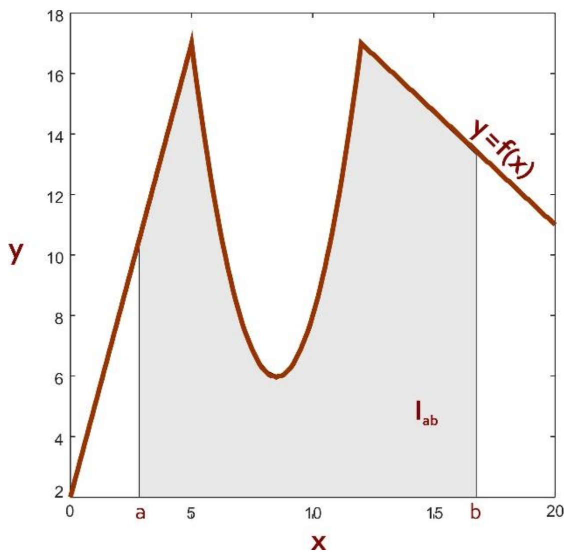

Figure n°1 : Visualisation de la fonction et de son intégrale à estimer

La fonction $f(x)$ est définie par le jeu d'équations suivant :

$$\forall\, x \in [0, +\infty[\qquad f(x): \begin{cases} y = 3x + 2 & si\ x < 5 \\ y = 0.9\,x^2 - 15.3\,x + 71 & si\ \ 5 \leq x < 12 \\ y = -0{,}75\,x + 26 & si\ x \geq 12 \end{cases}$$

Etape n°1 (fonction) :

Créez la fonction qui permet de calculer l'image de la fonction $f(x)$ pour un x donné.

On appellera cette fonction obligatoirement `Fonction_F` pourra être dans le même fichier. Pour cette fonction on supposera que x appartient bien à l'ensemble de définition, aucune vérification ne sera donc faite.

Etape n° 2 (Saisie Filtrée) :

Dans un premier temps le script doit demander à l'utilisateur de saisir les valeurs des bornes a et b.

La saisie de a se fera tant que la valeur donnée n'appartient pas à l'intervalle $[0\ 5]$.

La saisie de b se fera tant que la valeur donnée n'appartient pas à l'intervalle $]a\ \infty[$.

Etape n° 3 (Surface élémentaire) :

Pour approximer cette intégrale, on se propose de s'inspirer de la méthode des trapèzes.

Pour cela on découpe l'intervalle $[a\ b]$ de l'axe X en k bandes de largeur $\Delta = \frac{b-a}{k}$ (voir Figure n°2)

- Chacun de ses bandes possède une surface élémentaire que nous noterons S_Δ
- La surface approchée d'une bande S_Δ est la surface du triangle $T_\Delta(\alpha)$ et du rectangle $R_\Delta(\alpha)$.
- De toute évidence plus Δ est grand plus l'approximation est mauvaise si la fonction n'est pas une simple droite
- La surface du triangle vaut $T_\Delta(\alpha) = \frac{(f(\alpha+\Delta)-f(\alpha))\times\Delta}{2}$
- La surface du rectangle vaut (si !si ! je vous la donne !!!) $R_\Delta(\alpha) = f(\alpha)\ \times\Delta$
- Ces surfaces peuvent être négatives, par exemple si $f(\alpha)$ est en dessous de 0

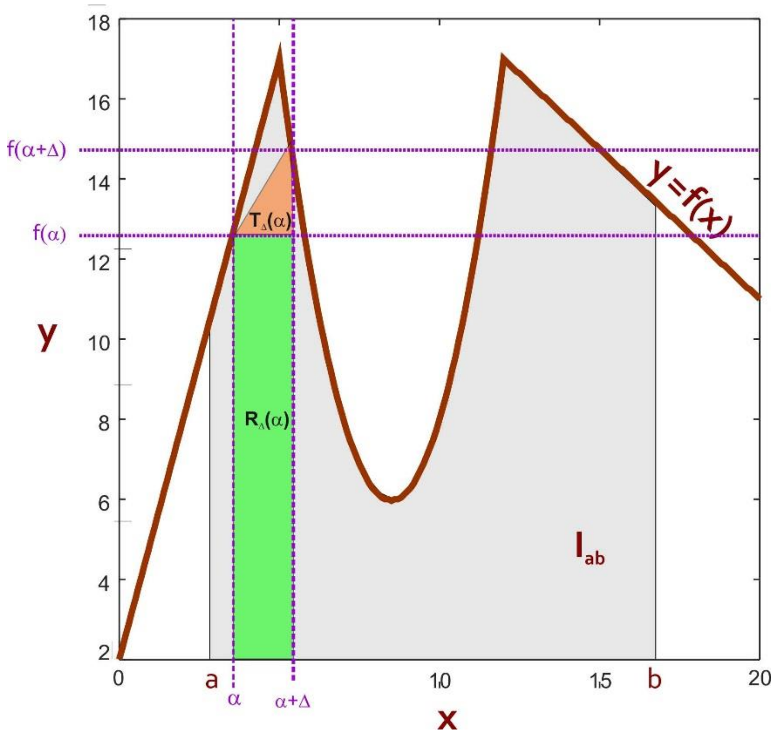

Figure n°2 : visualisation d'une surface élémentaire

Ecrire la fonction `Surf_Elt` pour calculer $S_\Delta(\alpha)$ d'une bande de largeur Δ au point α.

Etape n° 4 (Estimation de la Surface) :

Complétez le script pour estimer l'intégrale. Pour cela on demandera à l'utilisateur de saisir le nombre k de divisions souhaitées entre a et b. On devra faire appel évidement à la fonction `Surf_Elt` pour calculer chacune des surfaces élémentaires que l'on cumulera pour approximer l'intégrale.

Soignez l'affichage du résultat…

Cette étape est facilement vérifiable puisque la fonction est une droite sur le premier intervalle. La surface est donc un triangle. Par exemple entre 0 et 1 le triangle a une surface de 3.5

Etape n° 5 (Estimation avec une précision donnée) :

On veut connaître la surface avec une précision donnée ε (par exemple, une précision de 10^{-5}).

Ajoutez au script précédent les lignes de code permettant de trouver cette valeur. Pour cela, il s'agit de partir avec une valeur donnée (par exemple k =100) et de faire un premier calcul. Par la suite on fera varier k pour recalculer la surface que l'on notera S_k. On considérera que la surface est calculée à la précision demandée lorsque $|S_{k+1} - S_k| < \varepsilon$