INSA Toulouse, Cycle Préparatoire.
Formation Continue et Ecole d'Architecture.
Mathématiques. Analyse #2.

Feuille TD #3

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y) \ , \quad h(x,y) = f(x^2+y^2) \ , \quad k(x,y) = f(xy)$$

Exercice 2 Soient f définie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = (ln(x), 2x-y) \ \ ; \ g(u,v) = 3u - \frac{1}{v}$$

On considère : $F(x,y) = g \circ f(x,y)$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur un ensemble que vous déterminerez.
2. Donner l'expression du gradient de F sur cet ensemble.

Exercice 3 *(4 points en examen)*
Calculer les jacobiennes ou gradients, selon, des fonctions suivantes sur leur domaine de définition que vous préciserez.

1. $f(x,y) = (x^3y, y^2\exp(-xy))$
2. $g(x,y,z) = \dfrac{xz}{(x^2+y^2)}$

Exercice 4 *Laplacien (4 points en examen)*
Soit $f(x,y) = \ln((x^2-y^2)^k)$, k un entier naturel strictement positif.

1. Déterminer l'ensemble Ω sur lequel f est de classe C^2.
2. Calculer $\Delta f(x,y)$ sur Ω .
3. Existe-il une valeur de k telle que : $\Delta f(x,y) = 0 \ \forall (x,y)\Omega$?

Exercice 5 *Dérivation de fonctions composées (3 points en examen)*
Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1.
Soit $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$.
Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exercice 6 *Extrema (5 points en examen)*
Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1\,, \quad \forall x \in \Omega =]-\pi, \pi[\times\mathbb{R}.$$

1. Justifier brièvement que la fonction f est de classe C^2 sur Ω.
2. Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point (x,y) de Ω.
3. Déterminer les éventuels extrema locaux de f sur Ω, et préciser leur nature (minimum ou maximum).
4. Ce ou ces extrema locaux sont-ils globaux sur Ω ?

Exercice 7 *Dérivée directionnelle (4 points en examen)*
Soit $f(x,y) = x^2(y+1)$. Calculer de deux manières différentes la dérivée directionnelle de f au point $a = (2,1)$ suivant la direction $d = (1,1)$.