Corrigé Devoir Maison
(examen 2013-2014)

Exercice 1 :

• (E_1) $y' + y = e^{-x}$.

On résout (E_1) sur $I = \mathbb{R}$.

Equation homogène :

(E_1^h) $y_h' + y_h = 0$.

les solutions s'écrivent $y_h(x) = Ce^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, où $C = c.r.a.$

Solution particulière :

(E_1) est une EDO à coeffs constants dont le 2nd membre s'écrit $e^{\lambda x} P_0(x)$ avec $\begin{cases} \lambda = \frac{-b}{a} = -1, \\ P_0(x) = 1. \end{cases}$

On cherche donc une solution particulière y_0 sous la forme $y_0(x) = e^{\lambda x}(x\, Q_0(x))$ où $\lambda = -1$ et $\deg(Q_0) = 0$, donc $y_0(x) = \alpha x e^{-x}$.

Alors $y_0'(x) = \alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x} = \alpha(1-x)e^{-x}$.

On injecte dans (E) :

$$\alpha(1-x)e^{-x} + \alpha x e^{-x} = e^{-x}.$$

$\Leftrightarrow \alpha e^{-x} = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \alpha = 1$

Donc $\underline{y_0(x) = x e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}}$.

<u>Solution générale</u>:

Les solutions de (E) s'écrivent donc :

$$\boxed{y(x) = (C + x)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ où } C = c.r.a}.$$

• (E_2) $x^2 y' + (1-2x) y = 2x - 1$.

On résout (E_2) sur $I = \mathbb{R}^*$.

<u>Equation homogène</u>:

(E_2^h) $x^2 y_h' + (1-2x) y_h = 0$.

On a $\dfrac{-b(x)}{a(x)} = \dfrac{2x-1}{x^2} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ car $x \neq 0$ $(x \in \mathbb{R}^*)$

Donc $u(x) = 2\ln(|x|) + \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$,

$= \ln(x^2) + \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

D'où $y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\ln(x^2) + \frac{1}{x}}, & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \\ C_2 e^{\ln(x^2) + \frac{1}{x}}, & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y_h(x) = \begin{cases} C_1 x^2 e^{1/x}, & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \\ C_2 x^2 e^{1/x}, & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \end{cases} \text{ où } C_1, C_2 = c.r.a.}$

<u>Solution particulière :</u>

On voit que $y_0(x) = -1$ est solution particulière car $x^2 \times 0 + (1-2x) \times (-1) = 2x - 1$.

<u>Solution générale :</u>

Les solutions de (E_2) s'écrivent donc :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} C_1 x^2 e^{1/x} - 1, & \forall x \in]-\infty, 0[\\ C_2 x^2 e^{1/x} - 1, & \forall x \in]0, +\infty[\end{cases}, \text{ où } C_1, C_2 = \text{c.r.a.}}$$

- (E_3) $y' + 2xy = e^{-x^2}\cos(x)$.

On résout sur $\underline{I = \mathbb{R}}$.

<u>Equation homogène :</u>

(E_h^4) $y_h' + 2xy_h = 0$

Ici, $\frac{-b(x)}{a(x)} = -2x$ donc $u(x) = -x^2$.

Il vient alors $\underline{y_h(x) = Ce^{-x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, où C = cte arbitraire.

<u>Solution particulière :</u>

Variation de la constante : on cherche y_0 sous la forme

$$y_0(x) = C(x)e^{-x^2}.$$

On obtient alors après injection dans (E_4) :

$$C'(x) = \cos(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc $C(x) = \sin(x)$ et donc $\underline{y_0(x) = \sin(x)e^{-x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Solution générale :</u>

Les solutions de (E_4) s'écrivent donc :

$$\boxed{y(x) = (C + \sin(x))e^{-x^2},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{où } C = \text{cte arbitraire.}}$$

(E_4) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x}$.

On résout (E_4) sur $I = \mathbb{R}^*$ (à cause du $\frac{1}{x}$).

Equation homogène :

(E_4^h) $y_h' + \frac{1}{x} y_h = 0$.

Ici, on a $\frac{-b(x)}{a(x)} = \frac{-1}{x} \Rightarrow u(x) = -\ln(|x|) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Donc $y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\ln(1/|x|)}, \forall x \in \mathbb{R}_-^* \\ C_2 e^{\ln(1/|x|)}, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$, où $C_1, C_2 =$ c.r.a.

$$\Rightarrow \boxed{y_h(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_-^* \\ \frac{C_2}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}, \text{ où } C_1, C_2 : \text{c.r.a.}}$$

Solution particulière :

On remarque que $b(x) = f(x)$, donc une solution particulière est : $\boxed{y_0(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^*}$.

Solution générale :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{x} + 1, \forall x \in \mathbb{R}_-^* \\ \frac{C_2}{x} + 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}, \text{ où } C_1, C_2 = \text{c.r.a.}}$$

Exercice 2 :

• (E_5) $x'' - x = 5t + 2$.

On résout sur $I = \mathbb{R}$.

Equation homogène :

(E_5^h) $x_h'' - x_h = 0$.

Equation caractéristique : $x^2 - 1 = 0$
$\iff x = \pm 1$ ($r_1 = -1$ et $r_2 = 1$).

Donc $\underline{x_h(t) = Ae^{-t} + Be^{t}, \forall t \in \mathbb{R}, \text{ où } A, B = \text{c.r.a.}}$

Solution particulière :

(E_5) est une EDO à coeffs constants dont le 2^{nd} membre est de la forme $e^{\lambda t} P_1(t)$ où $\begin{cases} \lambda = 0, \\ P_1(t) = 5t + 2. \end{cases}$

Et $\begin{cases} \lambda = 0 \neq r_1 \\ \lambda = 0 \neq r_2 \end{cases}$, donc on cherche $y_0(t)$ sous la forme $y_0(t) = e^{\lambda t} Q_1(t)$ où $\deg(Q_1) = 1 = \deg(P_1)$.
$\Rightarrow y_0(t) = at + b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $y_0'(t) = a$ et $y_0''(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

En injectant dans (E_5), on obtient :
$$-(at + b) = 5t + 2.$$

Donc par identification, $\begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \end{cases}$, d'où $\underline{y_0(t) = -5t - 2, \forall t \in \mathbb{R}}$.

Solution générale :

Les solutions de (E_5) s'écrivent donc

$$\boxed{y(t) = Ae^{-t} + Be^{t} - 5t - 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \text{où } A, B = \text{c.r.a.}}$$

• (E_6) $\begin{cases} y'' + 6y' + 5y = e^{-5t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

C'est un problème de Cauchy, dont la solution est unique. Commençons par résoudre l'EDO

$$y'' + 6y' + 5y = e^{-5t}.$$

On la résout sur $I = \mathbb{R}$.

Equation homogène :

(E_6^h) $y_h'' + 6y_h' + 5y_h = 0$

Equation caractéristique : $r^2 + 6r + 5 = 0$

$\iff (r+1)(r+5) = 0$

Donc $r_1 = -1$ et $r_2 = -5$.

D'où $y_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-5t},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \text{où } A, B = \text{c.r.a.}$

Solution particulière :

L'EDO est à coeffs constants et le 2nd membre est de la forme $e^{\lambda t} P_0(t)$ où $\begin{cases} \lambda = -5 = r_2, \\ P_0(t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

On cherche donc y_0 sous la forme :

$$y_0(t) = t\,Q_0(t)\,e^{-5t} \text{ où } \deg(Q_0) = 0,$$

donc $y_0(t) = \alpha t e^{-5t}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a ainsi $\begin{cases} y_0'(t) = \alpha e^{-5t} - 5\alpha t e^{-5t} = \alpha(1-5t)e^{-5t} \\ y_0''(t) = -5\alpha e^{-5t} - 5\alpha(1-5t)e^{-5t} = \alpha(-10+25t)e^{-5t} \end{cases}$

En injectant dans l'EDO, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(-10+25t)e^{-5t} + 6\alpha(1-5t)e^{-5t} + 5\alpha t e^{-5t} = e^{-5t}$$

$$\iff \quad -4\alpha e^{-5t} = e^{-5t}$$

Par identification, on obtient : $\alpha = \frac{-1}{4}$.

Donc $\underline{y_0(t) = \frac{-1}{4} t e^{-5t}, \forall t \in \mathbb{R}}$.

<u>Solution générale</u> :

Les solutions de l'EDO s'écrivent donc :

$$\underline{y(t) = A e^{-t} + B e^{-5t} - \frac{1}{4} t e^{-5t}, \forall t \in \mathbb{R}, \text{ où } A, B = c.r.a.}$$

<u>Conditions initiales</u> :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 5B - \frac{1}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} B = -A \\ -4B = \frac{+5}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{+5}{16} \\ B = \frac{-5}{16} \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy (E_6) est donc :

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{16}e^{-t} - \frac{5}{16}e^{-5t} - \frac{1}{4}te^{-5t},\ \forall t \in \mathbb{R}.}$$

• (E_7) $x^2y'' + xy' - 4y = 1$.

On résout sur $I = \mathbb{R}^*$.

<u>Equation homogène :</u>

(E_7^h) $x^2y_h'' + xy_h' - 4y_h = 0$.

Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_h^1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

(car les coeffs sont polynomiaux de degré ≤ 2)

Alors $\begin{cases} (y_h^1)'(x) = 2\alpha x + \beta, \\ (y_h^1)''(x) = 2\alpha. \end{cases}$

D'où en injectant dans (E_7^h) :

$$x^2(2\alpha) + x(2\alpha x + \beta) - 4(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\beta x - 4\gamma = 0$$

Par identification : $\beta = \gamma = 0$ mais α peut prendre n'importe quelle valeur. Donc par exemple, $\alpha = 1$ donne x^2 solution de (E_7^h).

Donc $\underline{y_h^1(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^*.}$

Appliquons maintenant la méthode de la variation de la constante pour trouver une seconde solution y_h^2 <u>indépendante</u> de y_h^1. On cherche donc y_h^2 sous la forme :

$$y_h^2(x) = C(x)\,y_h^1(x) = C(x)\,x^2.$$

Alors $\begin{cases} (y_h^2)'(x) = C'(x)x^2 + 2C(x)x, \\ (y_h^2)''(x) = C''(x)x^2 + 4C'(x)x + 2C(x). \end{cases}$

En injectant dans (E_7^1), on obtient :

$$x^2\left[C''(x)x^2 + 4C'(x)x + 2C(x)\right] + x\left[C'(x)x^2 + 2C(x)x\right] - 4C(x)x^2 = 0.$$

$$\iff C''(x)x^4 + 5C'(x)x^3 = 0$$

$$\iff$$

$$\iff \begin{cases} xD'(x) + 5D(x) = 0 \\ C'(x) = D(x) \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Pour l'EDO "$xD' + 5D = 0$", on a $\frac{-b(x)}{a(x)} = \frac{-5}{x}$ donc $u(x) = -5\ln(|x|) = \ln\left(\frac{1}{x^5}\right)$, donc $D(x) = \frac{\alpha}{x^5}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Donc $C'(x) = \frac{\alpha}{x^5} \Longrightarrow C(x) = \frac{-\alpha}{4x^4} + \beta$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Une seule solution suffit, on prend donc $C(x) = \frac{1}{x^4}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Donc $\underline{y_h^2(x) = \frac{1}{x^2},\ \forall x \in \mathbb{R}^*}$.

Les solutions de (E_7^h) s'écrivent donc :

$$\boxed{y_h(x) = \begin{cases} A_1 x^2 + \dfrac{B_1}{x^2}, & \forall x \in]-\infty, 0[, \\ A_2 x^2 + \dfrac{B_2}{x^2}, & \forall x \in]0, +\infty[. \end{cases} \quad \text{où } A_1, A_2, B_1, B_2 \text{ sont des c.r.a.}}$$

__Solution particulière :__

On voit que $y_0(x) = -\frac{1}{4}$ est solution évidente.

__Solutions générales :__

Les solutions de (E_7) s'écrivent donc :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} A_1 x^2 + \dfrac{B_1}{x^2} - \dfrac{1}{4}, & \forall x \in \mathbb{R}_-^* \\ A_2 x^2 + \dfrac{B_2}{x^2} - \dfrac{1}{4}, & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}, \text{ où } A_1, A_2, B_1, B_2 = \text{c.r.a.}}$$

Exercice 3 :

$$(E_8)\begin{cases} x'(t) = -5x(t) - 2y(t) + 3 \\ y'(t) = 4x(t) - 11y(t) - 1 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$(E_8) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) + F \text{ avec } \begin{cases} X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & -11 \end{pmatrix} \\ F = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Système homogène :

(E_8^h) $X_h'(t) = A X_h(t)$

Diagonalisons (si possible) la matrice A.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 \\ 4 & -11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16\lambda + 63.$

$\Delta = 256 - 252 = 4 = 2^2 > 0$, donc $\begin{cases} \lambda_1 = -9, \\ \lambda_2 = -7. \end{cases}$

On a 2 vp distinctes, donc A est diagonalisable.

Base de E_{-9} :

$A + 9I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, on voit que $C_1 + 2C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

donc on a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_{-9}$.

<u>Base de E_{-7} :</u>

$A + 7I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, on voit que $C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

donc on a $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-7}$.

<u>Bilan</u> : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $X_h(t) = d_1 v_1 e^{-9t} + d_2 v_2 e^{-7t}$, où $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{X_h(t) = \begin{pmatrix} d_1 e^{-9t} + d_2 e^{-7t} \\ 2d_1 e^{-9t} + d_2 e^{-7t} \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ où } d_1, d_2 \in \mathbb{R}.}$$

<u>Solution particulière :</u>

Le second membre F est constant, donc une solution particulière est :

$$X_0 = -A^{-1}F.$$

Or $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{63} \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Donc $A^{-1}F = \dfrac{-1}{63} \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{63} \begin{pmatrix} -35 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +5/9 \\ +1/9 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}}$$

Solution générale :

On obtient donc :

$$X(t) = \begin{pmatrix} d_1 e^{-9t} + d_2 e^{-7t} + \frac{5}{9} \\ 2d_1 e^{-9t} + d_2 e^{-7t} + \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soit $\boxed{\begin{cases} x(t) = d_1 e^{-9t} + d_2 e^{-7t} + \frac{5}{9} \\ y(t) = 2d_1 e^{-9t} + d_2 e^{-7t} + \frac{1}{9} \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}, \text{ où } d_1, d_2 = c.r.a.}$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 + \frac{5}{9} = 1 \\ 2d_1 + d_2 + \frac{1}{9} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = \frac{4}{9} \\ 2d_1 + d_2 = \frac{-10}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = \frac{-14}{9} \\ d_2 = 2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{\begin{cases} x(t) = \frac{-14}{9} e^{-9t} + 2e^{-7t} + \frac{5}{9} \\ y(t) = \frac{-28}{9} e^{-9t} + 2e^{-7t} + \frac{1}{9} \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}.}$

Exercice 4 :

1ère méthode : (on résout sur $I=\mathbb{R}$)

En posant $z(x)=y'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, on obtient que :

$$y'''(x)-y'(x)=0 \iff \begin{cases} z''(x)-z(x)=0, \\ z(x)=y'(x). \end{cases}$$

Or $z''(x)-z(x)=0 \iff z(x)=Ae^{-x}+Be^{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $A,B=$ c.r.a.

car l'équation caractéristique $x^2-1=0$ a pour solutions $\begin{cases} x_1=-1, \\ x_2=1. \end{cases}$

Donc $y'''(x)-y'(x)=0 \iff y'(x)=Ae^{-x}+Be^{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\iff y(x)=-Ae^{-x}+Be^{x}+C, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Les solutions de l'EDO s'écrivent donc :

$$\underline{y(x)=Ae^{-x}+Be^{x}+C, \forall x\in\mathbb{R}, \text{ où } A,B,C=\text{c.r.a.}}$$

Mais $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=2 \end{cases}$, donc $\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A+B=0 \\ A+B=2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{y(x)=e^{-x}+e^{x}-1, \forall x\in\mathbb{R}.}$

$2^{ème}$ méthode :

On pose $Y(x)=\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$, on a alors :

$$y'''(x)-y'(x)=0 \iff Y'(x)=AY(x) \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisons (si possible) la matrice A.

• $P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[\lambda^2-1]=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$

Les vps de A sont donc -1, 0 et 1, toutes simples, donc A diagonalisable.

• Base de E_{-1} :

$A+I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que $C_1-C_2+C_3=0_{\mathbb{R}^3}$, donc $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\in E_{-1}$.

• Base de E_0 :

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que $C_1=0_{\mathbb{R}^3}$, donc $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\in E_0$.

• Base de E_1 :

$A-I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on voit que $C_1+C_2+C_3=0_{\mathbb{R}^3}$, donc $v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\in E_1$.

Bilan : $Y(x)=\alpha_1 v_1 e^{-x}+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3 e^{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, où $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ = c.r.a.

$$\Rightarrow Y(x)=\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-x}+\alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Donc $\underline{y(x)=\alpha_1 e^{-x}+\alpha_2+\alpha_3 e^{x}, \forall x\in\mathbb{R}, \text{ où } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 = \text{c.r.a.}}$

Or $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1 \\ -\alpha_1+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=-1 \\ \alpha_3=1 \end{cases}$

On retrouve bien : $\boxed{y(x)=e^{-x}+e^{x}-1, \forall x\in\mathbb{R}.}$

Exercice 5 :

1) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$z(t) = \frac{1}{y(t)}$ donc $z'(t) = \frac{-y'(t)}{y^2(t)}$.

Or $y'(t) = a y(t) - b y^2(t)$.

Donc $z'(t) = \frac{-a y(t) + b y^2(t)}{y^2(t)} = \frac{-a}{y(t)} + b = -a z(t) + b$.

On vient de montrer que z est solution de :

$$\boxed{z'(t) = -a z(t) + b}, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

2) Equation homogène :

$z_h' = -a z_h$

Les solutions sont $z_h(t) = C e^{-at}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, où $C = c.r.a.$

Solution particulière :

On voit que $z_0(t) = \frac{b}{a}$ est solution particulière.

Donc $\boxed{z(t) = C e^{-at} + \frac{b}{a}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \text{ où } C = c.r.a.}$

Or $y(t) = \frac{1}{z(t)}$ donc $\boxed{y(t) = \frac{1}{C e^{-at} + \frac{b}{a}}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \text{ où } C = c.r.a}$

3) $\lim_{t \to +\infty} C e^{-at} = 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{a}{b}}$.

4) a et b peuvent respectivement représenter le taux de naissance et le taux de mortalité de nos chères tortues.