Cours de remise à niveau Maths 2ème année

Applications linéaires

C. Maugis-Rabusseau
GMM Bureau 116
cathy.maugis@insa-toulouse.fr

Plan

Sommaire

Définitions

Dans toute cette section, E et F désignent des espaces vectoriels sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f une application de E vers F.

Définition

On dit que f est **linéaire** si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K, \; f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y).$$

Exemple

L'application identité et l'application nulle sont linéaires.

Définitions

Remarque

Si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.
La contraposée est très fréquemment utilisée en pratique :

$$\text{si } f(0_E) \neq 0_F \text{ alors } f \text{ n'est pas linéaire.}$$

Définition

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
Dans le cas particulier où $E = F$, les applications linéaires de E vers E sont appelées **endomorphismes.** Dans ce cas, $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
Les applications linéaires de E vers K sont appelées **formes linéaires**.
Dans ce cas, $\mathcal{L}(E, K)$ est noté E^*, on l'appelle **espace dual de** E.

Théorème

Théorème

$\mathcal{L}(E, F)$ muni de l'addition et de la loi externe définies pour les applications est un espace vectoriel sur K.

Exemples

1. Soit $\psi : K[x] \longrightarrow K[x]$ telle que $\forall P \in K[x], \psi(P) = P'$.
   Alors $\psi \in \mathcal{L}(K[x])$.

2. Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{C}^0([a,b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1([a,b]) \\ u & \longmapsto & v \end{array}$ telle que

   $$\forall u \in \mathcal{C}^0([a,b]), \forall\ x \in [a,b],\ f(u)(x) = v(x) = \int_a^x u(t)dt.$$

   Alors $f \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0([a,b]), \mathcal{C}^1([a,b]))$.

3. Soit E un espace vectoriel sur K, $\alpha \in K$ et $f : E \longrightarrow E$ telle que

   $$\forall x \in E, f(x) = \alpha x.$$

   Alors $f \in \mathcal{L}(E)$.

Exemples

4. Soit $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des espaces vectoriels sur K.
   Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, l'application

$$p_i : \begin{array}{rcl} E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

   est un élément de $\mathcal{L}(E, E_i)$ et s'appelle la $i^{\text{ème}}$ projection.

5. Soit Tr : $\mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$ l'application qui à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ associe sa trace Tr(A). Alors $Tr \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(K), K)$.

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x - y, 3y + 1, x + y)$. Alors $f \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

7. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = (x - y, 3y, x + y)$. Alors $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Noyau et Image

Soit E et F deux espaces vectoriels sur K et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition

- On appelle **noyau** de f et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}) \subset E.$$

  $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des antécédents par f du vecteur nul de F.

- On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F | \exists x \in E\ ,\ y = f(x)\} = \{f(x) | x \in E\} = f(E) \subset F.$$

Appl. linéaire et s.e.v

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, A un s.e.v de E et B un s.e.v de F.
Alors $f(A)$ est un s.e.v de F et $f^{-1}(B)$ est un s.e.v de E.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Surjective-Injective

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est surjective $\iff \operatorname{Im}(f) = F$.
2. f est injective $\iff \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exemple

Étudiez le noyau et l'image des applications ψ et φ (Ex 1 et 7).

Bijective

Proposition

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si f est bijective alors f^{-1} est linéaire.

Définition

Les applications linéaires bijectives sont appelées des **isomorphismes**.
Dans le cas où $E = F$, on les appelle des **automorphismes**.

Injective-Surjective-Dimension

Théorème

Soit E et F deux espaces vectoriels sur K et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f injective $\Longrightarrow$ l'image d'une famille libre de E est libre dans F.
   f injective et E et F de dimension finie $\Longrightarrow$ $\dim(E) \leq \dim(F)$.
2. f surjective $\Longrightarrow$ l'image d'une partie génératrice de E est une partie génératrice de F.
   f surjective et E est de dimension finie $\Longrightarrow$ F est de dimension finie et $\dim(E) \geq \dim(F)$.
3. f bijective $\Longrightarrow$ l'image d'une base de E est une base de F.
   f bijective et E est de dimension finie $\Longrightarrow$ F est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

Exemple

1. L'application φ (Ex 7) peut-elle être bijective ?
2. Si $\dim(E) = \dim(F)$ et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f est-elle bijective ?

Rang de f

Définition

Si $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F, le **rang** de f est l'entier naturel défini par

$$\mathrm{rg}(f) \;=\; \dim(\mathrm{Im} f).$$

Exemple

Calculez le rang de φ (Ex 7).

Remarque

Si E est de dimension finie, si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E et si f est une application linéaire sur E alors la famille $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ qui est donc de dimension finie.

Théorème du rang

Théorème

Soit E et F deux espaces vectoriels sur K, avec E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Corollaire

Soit E et F deux espaces vectoriels sur K, de même dimension finie égale à n, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n$$

Composition

Proposition

Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur K.
On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Dans le cas particulier où $E = F = G$ on définit par récurrence l'endomorphisme f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f^0 = id_E$ et $f^n = f^{n-1} \circ f$.

Sommaire

Soit E et F des espaces vectoriels sur K de dimension finie tels que $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$.
Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \cdots, v_p)$ une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Proposition

Toute application linéaire f de $\mathcal{L}(E, F)$ est caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E.

Définition

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} v_i.$$

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{pn}(K).$$

Exemples

1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = (x - y, 3y, x + y)$.
   Écrivez la matrice de φ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

2. Écrivez, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, la matrice de $\psi : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \psi(P) = P'$.

3. Écrivez, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Écrivez la matrice de la rotation d'angle θ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Propriétés

Proposition

Soit G un espace vectoriel sur K de dimension finie égale à m et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$ une base de G.
Soit a et b deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E, F)$ et c dans $\mathcal{L}(F, G)$.
Soit $A = \text{Mat}(a, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, $B = \text{Mat}(b, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $C = \text{Mat}(c, \mathcal{F}, \mathcal{G})$.

1. $A + B = \text{Mat}(a + b, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.
2. $\forall \lambda \in K,\ \lambda .A = \text{Mat}(\lambda .a, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.
3. $CA = \text{Mat}(c \circ a, \mathcal{E}, \mathcal{G})$.

Propriétés

Théorème

Les bases de E et F étant choisies, à toute matrice A de $\mathcal{M}_{pn}(K)$ il correspond une et une seule application linéaire f de E vers F telle que $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Corollaire

Si E et F sont de dimension finie, respectivement égale à n et p alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = pn$.

Propriétés

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F) = n$.
Soit $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F et $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_n(K)$.

$$A \text{ est inversible} \iff f \text{ est bijective.}$$

Dans ce cas, l'inverse de A est la matrice de f^{-1} par rapport aux bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$.

$$(\mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}))^{-1} = \mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E}).$$

Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par f

Soit $x \in E$ et $y = f(x) \in F$.
$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$
$(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ les coordonnées de y dans la base $\mathcal{F}$.

$$y = f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j).$$

Matriciellement, cette relation se réécrit

$$Y = AX$$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par f

Exemple

Utilisez la matrice de l'application φ de l'exemple 7 pour calculer $\varphi(x, y)$ et $\varphi(5, -3)$.

Changement de base

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$
$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ base de E et $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p)$ base de F.
Notons $A = (a_{ij}) = \text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Soit $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ une nouvelle base de E,
$\mathcal{F}' = (v'_1, v'_2, \cdots, v'_p)$ une nouvelle base de F.
Notons $A' = \text{Mat}(f, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$.

Nous cherchons une éventuelle relation entre les matrices A et A'.

Changement de base dans E

On s'intéresse pour commencer à ce qui se passe dans E.
Soit x un vecteur de E.

- $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ et X la matrice colonne associée à ces coordonnées.
- $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{E}'$ et X' la matrice colonne associée à ces nouvelles coordonnées.

La question est de savoir quel lien existe entre X et X'.

Changement de base dans E

$\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\exists (p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj}) \in K^n$ tel que

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i.$$

Soit id_E l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & (E, \mathcal{E}') & \longrightarrow & (E, \mathcal{E}) \\ & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i & \longmapsto & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \\ & e'_j & \longmapsto & e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \end{array}$$

Changement de base dans E

Soit P la matrice de cette application linéaire. Alors P s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$X = PX'.$$

Matrice de passage

P s'appelle la **matrice de passage** de l'ancienne base $\mathcal{E}$ vers la nouvelle base $\mathcal{E}'$, on la note $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$. C'est la matrice de l'application $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{E}') \longrightarrow (E, \mathcal{E})$:

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_E, \mathcal{E}', \mathcal{E}).$$

ATTENTION ! La nouvelle base $\mathcal{E}'$ est la base de l'espace de départ, tandis que l'ancienne base $\mathcal{E}$ est la base de l'ensemble d'arrivée. Pourtant, la matrice est notée $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ et s'appelle la matrice de passage de l'ancienne base $\mathcal{E}$ vers la nouvelle base $\mathcal{E}'$.

Matrice de passage

Proposition

La matrice $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ est inversible et $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}^{-1} = P_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}$.

Exemple

Donnez la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^3$ où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et où $e_1' = (1, 1, 0)$, $e_2' = (0, 0, 1)$ et $e_3' = (1, -1, -2)$. Calculez son inverse.

Formule pour les matrices d'applications linéaires

En notant $A = \text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, $A' = \text{Mat}(f, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$, $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}$ on a

$$A' = Q^{-1}\, A\, P.$$

Cas particulier : si $b \in \mathcal{L}(E)$, $B = \text{Mat}(b, \mathcal{E})$, $B' = \text{Mat}(b, \mathcal{E}')$ et

$P = P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ alors

$$B' = P^{-1}\, B\, P.$$

Exemples

1. Écrivez la matrice de l'application φ de l'exemple 7 relativement aux bases $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ et $\mathcal{F}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, définies par

$$e'_1 = (2,1), \; e'_2 = (3,2)$$

$$\varepsilon'_1 = (1,1,0), \varepsilon'_2 = (0,0,1) \text{ et } \varepsilon'_3 = (1,-1,-2).$$

2. Soit Φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{E}).$$

   Écrivez la matrice de Φ relativement à la base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (2,1)$ et $e'_2 = (3,2)$.

Matrices semblables, matrices équivalentes

Définition

1. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{pn}(K)^2$,

$$A \text{ et } B \text{ sont } \textbf{équivalentes}$$

$$\Leftrightarrow \exists (Q,P) \in GL_p(K) \times GL_n(K),\ B = Q^{-1}\, A\, P.$$

2. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$,

$$A \text{ et } B \text{ sont } \textbf{semblables} \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K),\ B = P^{-1}\, A\, P.$$

Proposition

Ces deux relations sont des relations d'équivalence sur l'ensemble des matrices.

Matrices semblables, matrices équivalentes

Exemple

Avec les notations précédentes,

1. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$ alors A et A' sont équivalentes.
2. Si $b \in \mathcal{L}(E)$, $B = \mathrm{Mat}(b, \mathcal{E})$ et $B' = \mathrm{Mat}(b, \mathcal{E}')$ alors B et B' sont semblables.

Proposition

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$.
Si A et B sont semblables alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Rang d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{pn}(K)$ dont les colonnes sont identifiées à n vecteurs $C_1, C_2, ..., C_n$ de K^p tels que $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, C_j = {}^t(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj})$.

Définition

On appelle **rang de la matrice** A le réel, noté $\mathrm{rg}(A)$, égal à la dimension de $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, ..., C_n)$, c'est-à-dire à la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A.

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, ..., C_n)).$$

Rang d'une matrice

Proposition

Si $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$ alors $\text{rg}(A) \leq \min(p, n)$.

Exemple

Calculez le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rang d'une matrice

Proposition

Deux matrices équivalentes (resp. semblables) ont le même rang.
En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $A = \text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$ et cela ne dépend pas des bases choisies.

Proposition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{pn}(K)$. Si $\text{rg}(A) = r$ alors A est équivalente à

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{pn}(K)$, on a $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$.
Par conséquent, si $L_1, L_2, \cdots L_p$ sont les lignes de A,
$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(L_1, L_2, ..., L_p))$

Caractérisation des matrices inversibles

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1) A est inversible.
2) ${}^tA$ est inversible.
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(K), AB = I_n$.
4) $\exists B' \in \mathcal{M}_n(K), B'A = I_n$.
5) Les colonnes de A sont libres.
6) Les lignes de A sont libres.
7) $\mathrm{rg}(A) = n$
8) $\mathrm{rg}({}^tA) = n$