Cours de remise à niveau Maths 2ème année

Equivalents et développements limités

C. Maugis-Rabusseau
GMM Bureau 116
cathy.maugis@insa-toulouse.fr

Plan

1. **Comparaison de fonctions**
   - Négligeable
   - Equivalents
     - Premières propriétés
     - Opérations sur les équivalents
     - Equivalents des fonctions usuelles en 0
     - Application aux calculs de limites
2. **Formules de Taylor**
   - Formule de Taylor-Lagrange
   - Formule de Taylor-Young
   - Formule de Taylor avec reste intégral
3. **Développements limités**
   - Définitions
   - Opérations sur les développements limités
   - Développements asymptotiques
   - Applications

Voisinages

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition

- On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage** du point $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\ell > 0$ tel que $]a-\ell, a+\ell[\subset V$.
  L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.
- On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ ($V \in \mathcal{V}(+\infty)$) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset V$.
- On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ ($V \in \mathcal{V}(-\infty)$) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset V$.

Les fonctions considérées sont définies dans un voisinage de a (ou de a^+ ou de a^-), sauf peut-être en a ($\mathcal{H}_a$).
On s'intéresse à leur comportement au voisinage de a.

Plan

Négligeable

Définition

Soit f et g deux fonctions satisfaisant $(\mathcal{H}_a)$.
On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a.
On dit que f est **négligeable devant** g en a s'il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f = \underset{a}{o}(g)$ ou $f(x) = \underset{x \to a}{o}\big(g(x)\big)$.

Négligeable

Proposition

Soit f et g deux fonctions satisfaisant $(\mathcal{H}_a)$.
On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a.

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Attention, cette notion est locale. On compare f et g au voisinage de a.
Ne pas oublier de préciser a !

Exemples

1. $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.
2. $x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(x^\beta\right)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.
3. $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$ si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Propriétés

Proposition

Soit f, g, h, φ et ψ des fonctions satisfaisant $(\mathcal{H}_a)$.
On suppose que g, h et ψ ne s'annulent pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $f = \underset{a}{o}(h)$ et si $g = \underset{a}{o}(h)$ alors $\lambda f + g = \underset{a}{o}(h)$.
2. Si $f = \underset{a}{o}(g)$ alors $f\,h = \underset{a}{o}(g\,h)$.
3. Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $\varphi = \underset{a}{o}(\psi)$ alors $f\varphi = \underset{a}{o}(g\psi)$.

Croissances comparées

Proposition

Soit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

1. $\ln(x)^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha)$.
2. $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\alpha x})$.
3. $|\ln(x)|^\beta = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.

Corollaire

Pour tout $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$,

1. pour tout x dans un voisinage de $+\infty$, $\ln(x)^\beta \leq x^\alpha$,
2. pour tout x dans un voisinage de $+\infty$, $x^\beta \leq e^{\alpha x}$,
3. pour tout x dans un voisinage de 0^+, $|\ln(x)|^\beta \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Equivalents

Définition

Soit f et g deux fonctions satisfaisant $(\mathcal{H}_a)$.
On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a,
noté $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$,
s'il existe une fonction ε et $V \in \mathcal{V}(a)$ tels que

$$\forall x \in V, f(x) = g(x)[1 + \varepsilon(x)] \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)).$$

Caractérisation

Proposition

On a la caractérisation suivante :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple

Donnez un équivalent de $x^3 + x$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Relation d'équivalence

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de a, sauf peut-être en a, et ne s'annulant pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a.

Remarque

Puisque $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence, on dira que f et g sont équivalentes au voisinage de a.

Propriétés

Proposition

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \iff \lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim_{x\to a} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et vaut ℓ.
3. $f \underset{a}{\sim} g \implies f$ et g sont du même signe au voisinage de a.

Exemple

1. Déterminez un équivalent de $x^2 + \cos(x)^2$ au voisinage de 0.
2. Déterminez un équivalent de $x^2 + \sin(x)^2$ au voisinage de 0.
3. Déterminez un équivalent de $e^{2x} - \sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Propriétés

Proposition

Soit f, g vérifiant $(\mathcal{H}_a)$ et telles que $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$. Alors,

$$f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

1. Soit f une fonction polynômiale de la forme

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n, \text{ avec } p \leq n,\ a_p \neq 0,\ a_n \neq 0.$$

   Alors,

$$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n \text{ et } f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p.$$

2. Soit pour tout réel x, $g(x) = e^x + x^3$.
   Donnez un équivalent de g au voisinage de 0 et de $\pm\infty$.

3. Soit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \ln(x) + \sqrt{x}$.
   Donnez un équivalent de h au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.

Opérations sur les équivalents

Voici la liste des opérations usuelles "compatibles" avec les équivalents.

Proposition

Toutes les fonctions dans la suite vérifient $(\mathcal{H}_a)$.

1. Produit : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$ alors $f\varphi \underset{a}{\sim} g\psi$.
2. Quotient : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$ alors $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{\psi}$.
3. Composition à droite :
   si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$ alors $f(\varphi(x)) \underset{x \to x_0}{\sim} g(\varphi(x))$.

Exemple

Donnez un équivalent de $\frac{\sqrt{x}-x^2}{1+x}$ au voisinage de $+\infty$.

Attention !

Par contre, les opérations suivantes ne sont pas possibles en général :

- l'addition

$$f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \varphi \underset{a}{\sim} \psi \quad \not\Rightarrow \quad f + \varphi \underset{a}{\sim} g + \psi.$$

- la composition à gauche :

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \not\Rightarrow \quad \varphi(f(x)) \underset{a}{\sim} \varphi(g(x)).$$

Voici des contre-exemples.

Exemple

1. Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto -x^2 - x$.
   Donnez un équivalent de f, de g et de $f + g$ au voisinage de $+\infty$.

2. Soit $f : x \mapsto x^2 + x$, $g : x \mapsto x^2$. A t-on $f \underset{+\infty}{\sim} g$? A t-on $e^f \underset{+\infty}{\sim} e^g$?

Opérations sur les équivalents

Dans les cas particuliers suivants, la composition à gauche est possible.

Proposition

Soit f, g vérifiant $(\mathcal{H}_a)$. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. Alors,

1. Valeur absolue : $|f| \underset{a}{\sim} |g|$.
2. Puissance : pour tout $\alpha > 0$, si g est strictement positive au voisinage de a, on a $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$. En particulier, $\sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{g}$.
3. Logarithme <u>sous conditions</u> :
   1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in [0, +\infty]$ et si $\ell \neq 1$ alors $\ln[f(x)] \underset{x\to a}{\sim} \ln[g(x)]$.
   2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ alors $\ln[f(x)] \underset{x\to a}{\sim} f(x) - 1$.
4. Exponentielle <u>sous conditions</u> :
   si $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = 0$ alors $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$.

Exemple

Exemple

Soit $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$.
Donnez un équivalent de f et de $\ln f$ au voisinage de $+\infty$.

Etude dans $\mathcal{V}(a)$, $a \neq 0$

Remarque

Pour étudier une fonction au voisinage d'un autre point que 0, on peut, grâce à la composition à droite se ramener à une étude en 0 par les changements de variables suivants :

- étudier $x \mapsto f(x)$ au voisinage de $x = a \in \mathbb{R}^*$ revient à étudier $h \mapsto f(a + h)$ au voisinage de $h = 0$ (on a posé $h = x - a$).
- étudier $x \mapsto f(x)$ au voisinage de $x = \pm\infty$ revient à étudier $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de $h = 0$ (on a posé $h = 1/x$).

Equivalents des fonctions usuelles en 0

Ils se déduisent souvent de la proposition suivante.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I, $a \in I$.
Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

Les équivalents en 0 des fonctions usuelles sont :

$$\begin{array}{ll}
\sin(x) \underset{0}{\sim} x & \mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x \\
\tan(x) \underset{0}{\sim} x & \mathrm{th}(x) \underset{0}{\sim} x \\
\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x & e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \\
\mathrm{Arcsin}(x) \underset{0}{\sim} x & \mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x \\
(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x & \text{pour tout } \alpha \neq 0
\end{array}$$

cos, ch

Remarquons que le résultat précédent ne permet pas de donner l'équivalent en 0 de $1 - \cos x$ puisque $\cos'(0) = 0$.
Cependant grâce aux formules trigonométriques et aux équivalents en 0 de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$, on déduit les équivalents suivants :

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 = 2\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Ces résultats se retrouvent facilement à partir des développements limités introduits par la suite.

Remarque

Remarque

Il est recommandé de n'écrire qu'un seul terme dans le membre de droite d'une équivalence.

En effet, on a $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ mais comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x + \pi x^2} = 1$, on peut aussi écrire $\sin(x) \underset{0}{\sim} x + \pi x^2$.

On peut plus généralement ajouter à x toute fonction qui est négligeable devant x en 0.

On voit ainsi que l'on n'apporte aucune information supplémentaire en mettant plusieurs termes. Seul le terme dominant a un sens.

Calculs de limites

Les équivalents sont un outil qui peut être utile pour calculer des limites a priori indéterminées.

Exemple

Calculez la limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans les différents cas suivants.

1. $f(x) = \dfrac{(1+x^2)\tan x}{\sin(2x)}$, $a = 0$.
2. $f : x \mapsto x\left(e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1\right)$, $a = +\infty$.
3. $f : x \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^x$, $a = +\infty$.

Plan

On a vu précédemment que si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point a de I alors on peut écrire pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x), \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0,$$

ce qui revient à approcher f par une fonction affine au voisinage de a. Dans cette partie, nous donnons des théorèmes qui étendent en quelque sorte ce résultat, appelés **"formules de Taylor"** : sous des hypotheses de régularité sur la fonction f, on écrit f, au voisinage d'un point a, sous la forme d'un polynôme en $(x-a)$ plus un reste :

$$f(x) = P_n(x-a) + \text{reste}, P_n \text{ polynôme de degré } \leq n.$$

Les diverses formules diffèrent par la forme du reste. Mais dans tous les cas, l'appellation "reste" a un sens car ce "reste" est négligeable par rapport a $(x-a)^n$ au voisinage de a, c'est-à-dire qu'il tend vers 0 quand $x \to a$ et ce plus vite que $(x-a)^n$.

Formule de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $a, x \in I$, il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Formule de Taylor-Young

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in I$.
Il existe une fonction ε telle que pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad +(x-a)^n \varepsilon(x), \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$; i.e.

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Application aux extrema

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir une condition suffisante d'extremum pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$.

1. Si $f''(a) > 0$ alors f admet un mimimum local strict en a.
2. Si $f''(a) < 0$ alors f admet un maximum local strict en a.

Remarque

La réciproque de ces propriétés est fausse.
La fonction $f : x \mapsto x^4$ admet un miminum global en 0,
$f'(0) = f''(0) = 0$.

Application aux extrema

Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire.
La fonction f peut admettre un maximum (ex : $x \mapsto x^4$ en 0), un mimimum (ex : $x \mapsto -x^4$ en 0), ou ni l'un ni l'autre (ex : $x \mapsto x^3$ en 0).
Pour déterminer le comportement de f au voisinage de a, on écrit son développement de Taylor (s'il existe) jusqu'au premier terme non nul après $f(a)$:

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^(n)(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.
Le signe de $f(x) - f(a)$ est donné par celui de ce terme.
Si n est impair, $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a donc f n'admet pas d'extremum en a ;
si n est pair, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a donc f admet un extremum en a.

Application aux calculs de limites et équivalents

On peut utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir un équivalent lorsque la dérivée s'annule.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I, $a \in I$.
Supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^{(k_0)}(a)$ existe et soit non nul.
On définit $s = \min\{k \in \mathbb{N}^\star, f^{(k)}(a) \neq 0\}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^s$ sur I, alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} \frac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^s.$$

Exemple

On reprend l'exemple des équivalents en 0 de $1 - \cos(x)$ et $\mathrm{ch}(x) - 1$. On peut faire le calcul systématiquement. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \cos(x) \\ f'(x) &= \sin(x),\ f'(0) = 0 \\ f''(x) &= \cos(x),\ f''(0) = 1 \end{aligned}$$

d'où

$$1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$$

donc

$$1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$$

On procède de même pour $\mathrm{ch}(x) - 1$.

Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors,

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f^{(1)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &+ \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx \end{aligned}$$

Plan

Notation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ni vide ni réduit à un point, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

On cherche à comparer f à une fonction polynômiale dans un voisinage de a.

DL_n en a

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre *n* en *a* (DL_n en a)** s'il existe un polynôme à coefficients réels P_n de degré au plus n et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ une fonction tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = P_n(x-a) + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

DL_n en $\pm\infty$

Définition

On définit également la notion de **développement limité à l'ordre *n* en $\pm\infty$**. On suppose que $\pm\infty$ est une borne de I. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$ s'il existe un polynôme à coefficients réels P_n de degré au plus n et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ une fonction tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

Exemple

$f(x) = 2x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$ est un DL_7 de f en 0.
En revanche $f(x) = x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ est un DL_2 de f en 0.

En effet, $x^4 = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$, donc $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

L'ordre d'un DL se lit sur le reste !

Propriétés de régularité

Lorsqu'une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ admet un développement limité en a, alors, selon l'ordre de ce développement limité, on peut déduire des propriétés de régularité de la fonction.

Proposition

1. f admet un DL_0 en a si et seulement si f est continue en a.
2. f admet un DL_1 en a si et seulement si f est dérivable en a

Remarque

De la première propriété, on déduit par exemple que ln n'admet pas de DL en 0, ou encore que $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de DL en 0, et ce à aucun ordre.

Propriétés de régularité

Attention. Ceci ne se généralise pas pour $n \geq 2$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$.

f admet un DL_2 en 0 mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Remarque

Ainsi, dès qu'une fonction f admet un DL_n en a, on peut prolonger f par continuité en a. Dans la suite, on supposera donc que f est définie et continue en a. On supposera également que la fonction ε qui apparaît dans le DL est continue en a, avec $\varepsilon(a) = \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Propriétés

Théorème

Si f admet un DL$_n$ en a alors le couple (P_n, ε) est unique.
P_n s'appelle la **partie principale** de f d'ordre n en a, on la note $P_n(f)$.

Proposition

Soit I un intervalle symétrique par rapport à l'origine, $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet un DL$_n$ en 0, $n \geq 0$.

1. f admet un DL$_p$ en 0, pour tout entier $p < n$.
2. Si f est paire alors $P_n(f)$ n'a que des puissances paires.
3. Si f est impaire alors $P_n(f)$ n'a que des puissances impaires.

Premiers exemples

Soit f une fonction polynômiale de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p, \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \ a_p \neq 0.$$

Alors f admet un DL en 0 à tout ordre. Si $n \geq p$, f est égale à son DL_n

en 0 et

$$\boxed{\text{si } \ n < p, \ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)}$$

Premiers exemples

On a pour tout $x \in]-1,1[$, $\quad 1+x+x^2+\ldots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

avec $\frac{x^{n+1}}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ donc

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

et

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

Condition suffisante d'existence

La formule de Taylor-Young donne une condition suffisante d'existence. Pour les fonctions pour lesquelles les dérivées successives sont simples à calculer, cette formule permet d'obtenir rapidement le DL de la fonction.

Exemple

- La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un DL à tout ordre en 0, et par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)}$$

et

$$\boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n).}$$

Condition suffisante d'existence

Exemple

- Les fonctions cosinus et sinus étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elles admettent un DL à tout ordre en 0 et par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}).}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}).}$$

Condition suffisante d'existence

Exemple

- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus,
  $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ pour tout $x > -1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
  donc par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}(x^n).}$$

Condition suffisante d'existence

Exemple

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, elle admet un DL à tout ordre en 0, et par la formule de Taylor-Young, on a , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots \\ &\quad +\tfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n).\end{aligned}}$$

DL en a et DL en 0

Lorsque l'on veut étudier une fonction f au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut se ramener à étudier une fonction auxiliaire en 0 en faisant le changement de variable suivant :

- Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - a$. Alors h tend vers 0 quand x tend vers a, $f(x) = f(a+h)$ et on étudie $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0.

- Si $a = \pm\infty$, on pose $h = 1/x$. Alors h tend vers 0 quand x tend vers a, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ et on étudie $h \mapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0.

Addition et multiplication par une constante

Théorème

Soit I un intervalle tel que $0 \in I$ ou 0 extrémité de I.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. Soit λ, μ deux réels.
Alors $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en 0 et $P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g)$.

Addition et multiplication par une constante

Exemple

Les fonctions ch et sh étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elles admettent un DL à tout ordre en 0 donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par,

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).}$$

Produit

Théorème

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que f et g admettent un DL_n en 0.
Alors le produit fg admet un DL_n en 0 et $P_n(fg)$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(f) \cdot P_n(g)$.

Exemple

1. Déterminez le DL_2 en 0 de $f : x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$.
2. Déterminez le DL_5 en 0 de $f : x \mapsto [\mathrm{sh}(x) - \sin(x)]\ln(1+x)$.

Quotient

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que f et g admettent un DL_n en 0.
La fonction f/g admet-elle un DL en 0 et à quel ordre ?

Quotient - Premier cas $g(0) \neq 0$

On peut alors écrire $P_n(g) = g(0)(1 + Q)$ où Q est un polynôme de degré $\leq n$ qui vérifie $Q(0) = 0$. Ainsi, $g(x) = g(0)\left(1 + Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)\right)$. Comme g ne s'annule pas en 0, $1/g$ est définie dans un voisinage de 0 et

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(0)\left(1 + Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)\right)} \\
&= \frac{1}{g(0)} \frac{1}{1+u}, \text{ avec } u = Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \\
&= \frac{1}{g(0)} \left(1 - u + u^2 + \ldots + (-1)^n u^n + \underset{u \to 0}{o}(u^n)\right)
\end{aligned}
$$

On remplace ensuite u par $Q(x)$ dans cette expression, et on tronque à l'ordre n en x. On obtient ainsi un DL_n de $1/g$ en 0, et du quotient f/g par produit.

Quotient - Premier cas $g(0) \neq 0$

Exemple

Déterminez le DL_5 de tan en 0.

Quotient - Second cas : $g(0) = 0$

La procédure est toujours la même. Prenons un exemple.

Exemple : Déterminons le DL_3 de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ en 0.

Retenez que pour obtenir le DL en a d'un quotient, on cherche toujours à se ramener à une fonction du type $x \mapsto 1/(1+u(x))$, avec $u(a) = 0$.

Composition

Théorème

Soit I et J deux intervalles tels que $0 \in I$, $0 \in J$.
Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $\underline{f(0) = 0}$ et que f et g admettent un DL_n en 0.
Alors la composée $g \circ f$ admet un DL_n en 0 et $P_n(g \circ f)$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(g) \circ P_n(f)$.

Remarque

Si $f(0) = a$ alors pour obtenir le DL_n en 0 de $g \circ f$, il faut composer le DL_n de g en a avec le DL_n de f en 0.

Exemple

1. Déterminez le DL_4 en 0 de $x \mapsto e^{\sin x}$.
2. Déterminez le DL_4 en 0 de $x \mapsto e^{\cos x}$.

Théorème

Soit I un intervalle tel que $0 \in I$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que f admet un DL$_n$ en 0 du type

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right).$$

Alors toute primitive F de f sur I admet un DL$_{n+1}$ en 0 de la forme

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{n+1}\right).$$

N'oubliez pas d'ajouter la constante d'intégration, qui par continuité de la fonction en 0 est nécessairement $F(0)$.

Exemple

- La fonction $F : x \mapsto \ln(1+x)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F'(x) = \frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Donc en intégrant ce DL, on obtient

$$\ln(1+x) \quad = \quad \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).}$$

Intégration

Exemple

- La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

Donc en intégrant ce DL, on obtient

$$\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}).}$$

Dérivation

En général, il est interdit de dériver un DL.
Il se peut que f admette un DL_n en a mais que f' n'admette pas de DL_{n-1} en a.
Soit par exemple la fonction

$$f : x \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0,\ 0 \text{ si } x = 0.$$

On a $f(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, donc f admet un DL_1 en 0. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = 1 + 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. La dérivée f' n'admet donc pas de limite en 0, d'où f' n'admet pas de DL_0 en 0.

Dérivation

Cependant, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $n \geq 1$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et d'après la formule de Taylor-Young, f' admet un DL_{n-1} en a de la forme

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \ldots + \frac{(f')^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &\quad + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n-1}\right) \\ &= \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n\right)' + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on peut donc dériver le DL_n de f pour obtenir le DL_{n-1} de f' en a. Cette remarque n'est intéressante que si le DL_n de f en a n'a pas été obtenu à l'aide de la formule de Taylor-Young, c'est-à-dire en calculant les dérivées successives de f (qui sont aussi celles de f') en a.

Développements asymptotiques

Toutes les fonctions n'admettent pas de développement limité en tout point. On cherche donc à étendre la gamme des fonctions auxquelles on cherche à comparer une fonction donnée. L'idée est toujours de se ramener à des fonctions dont le comportement est bien connu. Les familles de fonctions les plus utilisées sont $(x \mapsto (x-a)^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(x \mapsto (x-a)^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, $(x \mapsto x^\alpha |\ln x|^\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$ ou encore $(x \mapsto x^\alpha e^{\beta x})_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$.

Développements limités généralisés

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité généralisé à l'ordre n en a (DLG$_n$ en a)** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \mapsto (x-a)^p f(x)$ admette un DL$_{n+p}$ en a :

$$\begin{aligned}(x-a)^p f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_p(x-a)^p \\ &\quad + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \ldots + a_{n+p}(x-a)^{n+p} + \underset{x\to a}{o}((x-a)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a_0}{(x-a)^p} + \frac{a_1}{(x-a)^{p-1}} + \ldots \\ &\quad + a_p + a_{p+1}(x-a) + \ldots + a_{n+p}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)\end{aligned}$$

Développements limités généralisés

Définition

On définit également la notion de **développement limité généralisé à l'ordre n en** $\pm\infty$. On dit que f admet un DLG$_n$ en $\pm\infty$ s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^p}$ admette un DL$_{n+p}$ en $\pm\infty$. On obtient alors

$$f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p + \frac{a_{p+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{x^n} + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

Exemple

Soit $f : x \mapsto xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$. Donnez un DLG$_2$ en $\pm\infty$ de f.

Développements asymptotiques

Dans ce cas, il faut préciser la famille de fonctions selon laquelle on désire écrire le développement, ainsi que la précision souhaitée comme dans l'exemple suivant.

Exemple

Déterminez le développement asymptotique de $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ selon la famille $(x \mapsto x^{\alpha}|\ln x|^{\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$ à la précision $1/x^4$ en $+\infty$.

En passant à l'écriture exponentielle, on a $(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right)$. Tout d'abord,

$$\ln(1+x) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

car $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où

$$\frac{1}{x^2}\ln(1+x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. On peut donc utiliser le DL_2 d'exp en 0.

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x^2}} &= 1 + \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4}\right)^2 \\ &\quad + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right) \\ &= 1 + \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{\ln^2 x}{2x^4} - \frac{1}{2x^4} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right).\end{aligned}$$

Étudions l'existence de la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+\sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x}$.

$$\sin x - \tan x = \left[x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right] - \left[x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right] = -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

et $\ln(1+\sin x) = \ln\left(1 + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, donc

$$\ln(1+\sin x) - \tan x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1+\sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{-x^3/2} = \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x}$ n'existe pas, mais $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+\sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} = -\infty$.

Remarque

Comme on ne peut en général pas additionner les équivalents, pour obtenir l'équivalent d'une somme, il suffit d'écrire le DL.
Un équivalent de la somme est alors le premier terme non nul du DL.

Etude des branches infinies de fonctions

Dans la suite, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathcal{D}_f\}.$$

Définition

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche infinie** lorsque l'une des deux coordonnées x ou $y = f(x)$ tend vers $\pm\infty$.

On cherche souvent à déterminer plus précisément l'allure de ces branches infinies. Peut-on en particulier dire si $\mathcal{C}_f$ "ressemble" à une autre courbe plus simple ?
Pour cela, définissons la notion de courbes asymptotes.

Définition

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a fini ou $\pm\infty$.
On dit que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont **asymptotes** (ou que $\mathcal{C}_f$ admet $\mathcal{C}_g$ pour asymptote) au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = 0$.

Lorsque l'on sait que deux courbes sont asymptotes au voisinage de a (fini ou $\pm\infty$), on se demande souvent quelle est leur position relative au voisinage de a. Pour cela, il suffit d'étudier le signe de $f - g$ au voisinage de a.

Définition

1. Si $f(x) - g(x) \geq 0$ au voisinage de a, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$ en a.
2. Si $f(x) - g(x) \leq 0$ au voisinage de a, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de $\mathcal{C}_g$ en a.

Etude des branches infinies de fonctions

Remarque

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de a.
2. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et si f admet une DLG en $\pm\infty$ alors

$$f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p + \frac{a_{p+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{x^n} + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$$

donc si $g(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p$ et si $a_{p+1} \neq 0$ alors $f(x) - g(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_{p+1}}{x}$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_{p+1}}{x} = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet $\mathcal{C}_g$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$ et la postion relative est donnée par le signe de $\frac{a_{p+1}}{x}$.

Exemple

Déterminez, si elles existent, l'équation des courbes asymptotes de

$$f : x \mapsto x e^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

au voisinage de $\pm\infty$ et leur position relative à la courbe de f.