Table des matières

Chapitre 1

Systèmes linéaires - Calcul matriciel

On s'intéresse dans ce cours à des problèmes simples : les problèmes linéaires.

Exemple 1.1
1. *Equations différentielles linéaires*

2. *Systèmes : 2 cartes mémoires et 3 disques durs externes coûtent 700 euros, 5 cartes mémoires et 2 diques durs externes coûtent 650 euros. Combien coûte 1 carte mémoire ?*
3. *Systèmes différentiels*

Nous allons dans un premier temps présenter une méthode permettant de résoudre les systèmes linéaires. L'étude de ces systèmes nous conduira à définir de nouveaux objets mathématiques, les matrices. Il faut apprendre à les manipuler tant elles sont utilisées en algèbre linéaire.

Tous les éléments développés dans la suite, tant pour les systèmes linéaires que pour le calcul matriciel, **sont valables lorsque les coefficients et les inconnues sont réels ou complexes**. Nous les considérerons donc comme des éléments de $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Systèmes linéaires

1.1.1 Définitions

Définition 1.2

- *On appelle* **système rectangulaire** *tout* **système** *de m* **équations**

$$\left\{\begin{array}{lcccccccccc} \textit{(Eq. 1)} & : & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \textit{(Eq. i)} & : & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \textit{(Eq. m)} & : & a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1.1}$$

  à n **inconnues** *: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.*

- *Les coefficients b_i sont donnés, ce sont des éléments de K. On les appelle* **coefficients du second membre** *(ou plus rapidement* **second membre***).*
- *Lorsque* **le second membre est nul***, les m équations sont linéaires par rapport aux n inconnues, d'où la terminologie "système linéaire". Dans ce cas, le système linéaire est dit* **homogène**.
- *Les coefficients a_{ij} sont des éléments de K, ils sont donnés et appelés* **coefficients du système linéaire**.

Définition 1.3 *Lorsque le nombre d'équations m* **est égal** *au nombre d'inconnues n, on dit que le système est* **carré** *et qu'il est d'***ordre** *n (cas le plus fréquemment rencontré dans les applications).*

Les coefficients $a_{ij},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$, et $b_i,\ 1 \le i \le n$, étant donnés, la question est de savoir si le système associé admet des solutions et dans l'affirmative, comment déterminer les éléments de K $x_i,\ 1 \le i \le n$, solution(s) de (1.1).

Afin de dégager les principes généraux relatifs à l'analyse et la résolution des systèmes linéaires, nous allons examiner les exemples simples ci-dessous.

Exemple 1.4 *On considère les systèmes à coefficients réels suivants.*

- *D'abord à une équation et deux inconnues :*

$$2x_1 + 3x_2 = \alpha. \tag{1.2}$$

dont l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{3}{2}\, x_2 + \frac{\alpha}{2}, x_2 \right), x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

- *puis à deux équations et deux inconnues :*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & = & \alpha, \\ -2x_1 & + & x_2 & = & \beta, \end{array} \right. \tag{1.3}$$

dont l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{8}\, \alpha + (-\frac{3}{8})\, \beta, \frac{1}{4}\, \alpha + \frac{1}{4}\, \beta \right) \right\}$.

- *et enfin à trois équations et deux inconnues :*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & = & \alpha, \\ -2x_1 & + & x_2 & = & \beta, \\ x_1 & + & x_2 & = & \gamma, \end{array} \right. \tag{1.4}$$

dont l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{8}\, \alpha + (-\frac{3}{8})\, \beta, \frac{1}{4}\, \alpha + \frac{1}{4}\, \beta \right) \right\}$ *si* $\frac{3}{8}\, \alpha - \frac{1}{8}\, \beta = \gamma$ *ou* $\mathcal{S} = \emptyset$ *si* $\frac{3}{8}\, \alpha - \frac{1}{8}\, \beta \neq \gamma$.

Définition 1.5 *Lorsqu'un système admet une infinité de solutions, certaines inconnues, appelées* **inconnues de base**, *s'expriment en fonction des autres, appelées* **inconnues libres**.

Exemple 1.6 *Le système (1.2) admet une infinité de solutions. Elles sont déterminées en fonction par exemple de x_2 qui reste quelconque. Dans ces conditions, x_1 est une inconnue de base et x_2 est une inconnue libre.*

Définition 1.7 *Lorsqu'un système carré admet* **une unique solution quelque soit le second membre**, *on dit que le système est* **inversible** *ou* **de Cramer**.

Exemple 1.8 *Le système (1.3) possède une unique solution, il s'agit d'un système inversible.*

Définition 1.9 *On appelle* **condition de compatibilité**, *toute équation que doit vérifier le second membre du système pour que le système admettent une solution. Lorsque cette équation n'est pas vérifiée, le système n'a pas de solution. On dit alors que c'est* **un système impossible** *ou ayant des équations* **incompatibles.**

Exemple 1.10 *La condition de compatibilité du sytème (1.4) est*

$$\frac{3}{8}\,\alpha - \frac{1}{8}\,\beta = \ \gamma. \tag{1.5}$$

Lorsque cette condition est vérifiée, le système admet une unique solution. Il n'est cependant pas inversible car pour un second membre ne vérifiant pas la condition (1.5), il n'admet aucune solution.

Plus généralement, l'étude et la résolution des systèmes linéaires repose sur l'algorithme d'élimination de Gauss.

1.1.2 Algorithme d'élimination de Gauss

L'objectif est de définir un algorithme permettant de calculer de manière "efficace" la/les solution(s) du système linéaire. La notion d'efficacité est liée au nombre d'opérations élémentaires $(+, -, \times, /)$ nécessaires à l'exécution de l'algorithme. On parle alors de "coût" de l'algorithme. L'algorithme d'élimination de Gauss est un algorithme efficace dans le sens où son coût (dépendant bien sûr de m et n) est quasi-optimal. Nous décrivons ci-après cet algorithme mais sans pour autant évaluer son coût.

Principe de l'algorithme de Gauss

C'est un procédé systématique qui permet d'éliminer l'inconnue x_1 de $(m - 1)$ équations du système (1.1), puis l'inconnue x_2 de $(m - 2)$ équations restantes, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un système équivalent dont la résolution ou l'analyse est plus simple.

Les règles de calcul algébrique élémentaire permettent de vérifier directement que les opérations suivantes préservent la (ou les) solution(s) du système (1.1) :

1. Permuter la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ équation

$$\left\{\begin{array}{c}(\text{Eq. } 1)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } i)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } j)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } m)\end{array}\right\} \quad \text{est équivalent à} \quad \left\{\begin{array}{c}(\text{Eq. } 1)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } j)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } i)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } m)\end{array}\right\}.$$

2. Ajouter à une équation α fois une autre équation

$$\left\{\begin{array}{c}(\text{Eq. } 1)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } i)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } j)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } m)\end{array}\right\} \quad \text{est équivalent à} \quad \left\{\begin{array}{c}(\text{Eq. } 1)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } i)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } j) + \alpha(\text{Eq. } i)\\ \vdots\\ (\text{Eq. } m)\end{array}\right\}.$$

Définition 1.11 *Un système linéaire carré est dit* **triangulaire** *s'il s'écrit sous la forme suivante :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
t_{11}x_1 & + & t_{12}x_2 & + & \cdots & + & t_{1i}x_i & + & \cdots & + & t_{1n}x_n & = & c_1\\
 & & t_{22}x_2 & + & \cdots & + & t_{2i}x_i & + & \cdots & + & t_{2n}x_n & = & c_2\\
 & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
 & & & & & & t_{ii}x_i & + & \cdots & + & t_{in}x_n & = & c_i\\
 & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots\\
 & & & & & & & & & & t_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}\right.$$

On obtient alors immédiatement le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Le système triangulaire précédent est inversible si et seulement si* **aucun des coefficients diagonaux** t_{ii} *;* $i = 1, \ldots, n$, **n'est nul**.
La solution d'un système triangulaire inversible s'obtient alors de propche en proche, en commençant par x_n.

L'algorithme de Gauss permettant de résoudre un systéme linéaire (carré) est basé sur le théorème 1.1 et se décompose en deux phases : une première **phase de triangulation** (ou phase de descente) du système et une seconde **phase de remontée**.

Nous allons décrire l'algorithme sur un exemple, celui du système carré suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcrcrcr}
\text{(Eq. 1)} & : & 2x_1 & & & + & 3x_3 & + & (-5)x_4 & = & 11 \\
\text{(Eq. 2)} & : & (-6)x_1 & & & + & (-10)x_3 & + & 17x_4 & = & -35 \\
\text{(Eq. 3)} & : & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & (-13)x_4 & = & 17 \\
\text{(Eq. 4)} & : & 10x_1 & + & 16x_2 & + & 22x_3 & + & (-38)x_4 & = & 36
\end{array}\right. . \tag{1.6}$$

Ce système a été choisi de façon à ce que les calculs s'effectuent en nombres entiers. La phase de triangulation est décrite dans le paragraphe A, la phase de remontée dans le paragraphe B.

A. Triangularisation du systéme (cas carré)

On cherche donc à résoudre le système linéaire (1.6).

Chaque élimination se fait au moyen d'un coefficient, appelé **pivot choisi non nul** et qui va jouer un rôle fondamental. Ce coefficient est sélectionné en choisissant sa colonne, qui correspond à l'inconnue à éliminer, et sa ligne qui correspond à l'équation où il se trouve. Une fois la ligne de pivot choisie, elle est gardée et **n'est plus modifiable** par le procédé d'élimination.

Etape 1 Elimination de x_1.

- Choix de la colonne de **pivot** : celle qui correspond à la variable à éliminer, ici x_1.
- Choix de la ligne de **pivot** : c'est la première des équations parmi les équations (Eq. 1), (Eq. 2), (Eq. 3) et (Eq. 4) pour laquelle le coefficient de x_1 est non nul. Ici, ce sera l'équation (Eq. 1). C'est le coefficient 2 qui est pris ici comme **pivot**.
- L'équation (Eq. 1), contenant le pivot, sera gardée et plus jamais modifiée. Les autres équations seront remplacées de façon à éliminer x_1

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcrcrcr}
\text{(Eq. 1)} & : & \boxed{2}x_1 & & & + & 3x_3 & + & (-5)x_4 & = & 11 \\
\text{(Eq. 2)} - \frac{(-6)}{\boxed{2}}\text{(Eq. 1)} & : & & & & & (-1)x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\
\text{(Eq. 3)} - \frac{(4)}{\boxed{2}}\text{(Eq. 1)} & : & & & 4x_2 & + & x_3 & + & (-3)x_4 & = & -5 \\
\text{(Eq. 4)} - \frac{(10)}{\boxed{2}}\text{(Eq. 1)} & : & & & 16x_2 & + & 7x_3 & + & (-13)x_4 & = & -19
\end{array}\right.$$

Etape 2 Elimination de x_2.

Si on veut appliquer de nouveau le procédé de l'étape 1 pour éliminer l'inconnue x_2 des équations (Eq. 2), (Eq. 3) et (Eq. 4) du système obtenu après l'élimination de x_1, le coefficient qui est en position de pivot est nul. On commence alors par choisir une ligne de pivot pour laquelle le pivot serait non nul. Si on n'y arrive pas, le système sera non inversible comme on le verra par la suite.

- Choix de la colonne de pivot : celle qui correspond à la variable à éliminer, cette fois x_2.
- Choix de la ligne de pivot : on choisit **parmi les équations qui ne contiennent pas déjà un pivot** celle où le coefficient de x_2 est non nul. Ici, c'est l'équation (Eq. 3). On permute alors l'équation (Eq. 2) et l'équation (Eq. 3) pour amener le coefficient 4 en position de pivot, c'est-à-dire pour que l'équation contenant le pivot soit la première après l'équation contenant un pivot qui a été gardée

$$\left\{\begin{array}{lclcccccccl}
\text{(Eq. 1)} & : & \boxed{2}x_1 & & & + & 3x_3 & + & (-5)x_4 & = & 11 \\
\text{(Eq. 2)} & : & & & 4x_2 & + & x_3 & + & (-3)x_4 & = & -5 \\
\text{(Eq. 3)} & : & & & & & (-1)x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\
\text{(Eq. 4)} & : & & & 16x_2 & + & 7x_3 & + & (-13)x_4 & = & -19
\end{array}\right.$$

- On élimine alors x_2 des équations (Eq. 3) et (Eq. 4)

$$\left\{\begin{array}{clcccccccc}
\text{(Eq. 1)} & : & \boxed{2}x_1 & & & + & 3x_3 & + & (-5)x_4 & = & 11 \\
\text{(Eq. 2)} & : & & \boxed{4}x_2 & + & x_3 & + & (-3)x_4 & = & -5 \\
\text{(Eq. 3)} - \frac{(0)}{\boxed{4}}\text{(Eq. 2)} & : & & & & (-1)x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\
\text{(Eq. 4)} - \frac{(16)}{\boxed{4}}\text{(Eq. 2)} & : & & & & 3x_3 & + & (-1)x_4 & = & -1
\end{array}\right.$$

Remarquons qu'une équation indépendante de l'inconnue à éliminer n'est pas affectée par le processus d'élimination de cette inconnue comme on pouvait s'y attendre.

Etape 3 Elimination de x_3.

On continue sur le même principe pour éliminer x_3 des équations indépendantes des variables déjà éliminées.

- Choix de la colonne de pivot : celle qui correspond à la variable à éliminer, cette fois x_3.
- Choix de la ligne de pivot : on choisit **parmi les équations qui ne contiennent pas déjà un pivot** celle où le coefficient de x_3 est non nul. Ici, c'est l'équation (Eq. 3) puisque $-1 \neq 0$.

– On élimine x_3 de l'équation (Eq. 4)

$$\left\{\begin{array}{rcccccccc}
\text{(Eq. 1)} & : & \boxed{2}x_1 & & + & 3x_3 & + & (-5)x_4 & = & 11 \\
\text{(Eq. 2)} & : & & \boxed{4}x_2 & + & x_3 & + & (-3)x_4 & = & -5 \\
\text{(Eq. 3)} & : & & & & \boxed{(-1)}x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\
\text{(Eq. 4)} - \frac{(3)}{\boxed{(-1)}}\text{(Eq. 3)} & : & & & & & & 5x_4 & = & -5
\end{array}\right. \tag{1.7}$$

B. Phase de remontée

La résolution du système triangulaire est obtenue par le procédé récursif suivant (**remontée**) :

$$x_n = c_n/t_{nn}$$
$$\left\{\begin{array}{l} i = n-1,\ n-2, \ldots, 1 \\ x_i = (c_i - t_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - t_{in}x_n)/t_{nn} \end{array}\right.$$

Nous allons appliquer ce procédé pour terminer la résolution du système (1.6). Le coefficient 5 de x_4 dans la dernière équation **joue lui aussi un rôle de pivot** dans la remontée. Nous l'encadrons aussi pour bien marquer cet aspect :

Calcul de x_4

$$\begin{array}{rcl}
\boxed{5}x_4 & = & -5 \\
x_4 & = & \frac{(-5)}{\boxed{5}} = -1
\end{array}$$

Calcul de x_3

$$\begin{array}{rcccl}
\boxed{(-1)}x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\
x_3 & + & \frac{(2)}{\boxed{(-1)}}x_4 & = & \frac{(-2)}{\boxed{(-1)}} \\
x_3 & & & = & 2-2=0
\end{array}$$

Calcul de x_2

$$\begin{array}{rcccccl}
\boxed{4}x_2 & + & x_3 & + & (-3)x_4 & = & -5 \\
x_2 & + & \frac{1}{\boxed{4}}x_3 & + & \frac{(-3)}{\boxed{4}}x_4 & = & \frac{(-5)}{\boxed{4}} \\
x_2 & & & & & = & \frac{(-5)}{4} - 0 - \frac{3}{4} = -2
\end{array}$$

Calcul de x_1

$$\begin{array}{rcccccl}
\boxed{2}x_1 & + & 3x_3 & + & (-5)x_4 & = & 11 \\
x_1 & + & \frac{3}{\boxed{2}}x_3 & + & \frac{(-5)}{\boxed{2}}x_4 & = & \frac{11}{\boxed{2}} \\
x_1 & & & & & = & \frac{11}{2} - 0 - \frac{5}{2} = 3
\end{array}$$

1.1.3 Extension de l'algorithme de Gauss aux systèmes rectangulaires

On peut utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss pour des systèmes rectangulaires ou pour des système carrés non inversibles. Il faut juste décrire le traitement des cas où, après $(i-1)$ éliminations, on ne trouve aucun coefficient qui puisse servir de pivot (en dehors des $(i-1)$ premières lignes qui contiennent déjà un pivot).

Nous allons dans un premier temps traiter deux exemples puis nous donnerons le résultat dans le cas général.

A. Exemples

Considérons les systèmes

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & (-1)x_4 & & & = & 3 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 10x_5 & = & 2 \\ 12x_1 & + & 5x_2 & + & (-2)x_3 & + & (-8)x_4 & + & (-18)x_5 & = & 7 \\ (-8)x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & + & 21x_4 & + & 54x_5 & = & -20 \end{array}\right. \tag{1.8}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & (-1)x_4 & & & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 10x_5 & = & 54 \\ 12x_1 & + & 5x_2 & + & (-2)x_3 & + & (-8)x_4 & + & (-18)x_5 & = & -114 \\ (-8)x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & + & 21x_4 & + & 54x_5 & = & 13 \end{array}\right. \tag{1.9}$$

qui ne diffèrent que par leur second membre.

Il est clair que les symboles x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 ainsi que le signe " $=$ " n'interviennent pas dans l'algorithme d'élimination et qu'on peut aussi traiter en même temps les deux systèmes en travaillant sur le tableau des coefficients suivant

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 8 & 2 & 54 \\ 12 & 5 & -2 & -8 & -18 & 7 & -114 \\ -8 & 2 & 12 & 21 & 54 & -20 & 13 \end{array}\right).$$

On note en face de chaque ligne le coefficient l_k qui permet d'effectuer l'élimination de l'inconnue x_i de l'équation (Eq. k). L'application de l'algorithme d'élimination donne ainsi le résultat suivant.

Elimination de x_1

$$\begin{array}{c} \text{Ligne de pivot} \\ 0 \\ 12/\boxed{4}=3 \\ (-8)/\boxed{4}=-2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cc} \boxed{4} & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 8 & 2 & 54 \\ 0 & -4 & -8 & -5 & -18 & -2 & -117 \\ 0 & 8 & 16 & 19 & 54 & -14 & 15 \end{array}\right)$$

Elimination de x_2

$$\begin{array}{c} \text{Ligne de pivot} \\ \text{Ligne de pivot} \\ -4/\boxed{2}=-2 \\ 8/\boxed{2}=4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cc} \boxed{4} & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 2 & 8 & 2 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 22 & -22 & -201 \end{array}\right)$$

Elimination de x_3. Aucune des équations 3 et 4 ne dépend de x_3. Il n'y a donc pas lieu d'effectuer cette élimination.

Elimination de x_4

$$\begin{array}{c} \text{Ligne de pivot} \\ \text{Ligne de pivot} \\ \text{Ligne de pivot} \\ 11/\boxed{-1}=-11 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cc} \boxed{4} & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 2 & 8 & 2 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300 \end{array}\right) \tag{1.10}$$

La $4^{\text{ème}}$ ligne ne dépend bien sûr pas de x_1, x_2, x_3 et x_4 puisque le processus d'élimination vise précisément à éliminer ces variables de la dernière équation. En fait, et celà est particulier au système traité, elle ne dépend pas non plus de x_5. En termes de pivot, cela veut dire que ni la ligne 4, ni la colonne 5 ne contiennent de pivot.
La phase de triangularisation terminée, écrivons les deux systèmes linéaires associés au tableau (1.10).

Nous avons ainsi établi que le système (1.8) est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{4}x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & (-1)x_4 & + & 0x_5 & = & 3 \\ 0x_1 & + & \boxed{2}x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 8x_5 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & \boxed{-1}x_4 & + & (-2)x_5 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.11}$$

et que le système (1.9) est lui équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{4}x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & (-1)x_4 & + & 0x_5 & = & 1 \\ 0x_1 & + & \boxed{2}x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 8x_5 & = & 54 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & \boxed{-1}x_4 & + & (-2)x_5 & = & -9 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & -300 \end{array}\right. \tag{1.12}$$

On voit que la dernière équation de (1.12) n'est vérifiée pour aucune valeur de x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5. L'algorithme a permis ainsi de détecter que le système est impossible à résoudre. Il n'admet donc **aucune** solution.

Pour le système (1.8), la situation est différente. Il est équivalent au système (1.11) dans lequel la dernière équation est juste une identité qui est vérifiée quelques soient les valeurs affectées aux inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5. L'algorithme a détecté ainsi qu'il y avait une équation **redondante** que nous pouvons éliminer et ne conserver que les 3 premières équations de (1.11)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{4}x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & (-1)x_4 & + & 0x_5 & = & 3 \\ 0x_1 & + & \boxed{2}x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 8x_5 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & \boxed{-1}x_4 & + & (-2)x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

Clairement, toutes les solutions de (1.8) s'obtiennent en fixant **une valeur arbitraire** pour x_3 et **une autre valeur arbitraire** pour x_5 et en résolvant le système (1.11) d'inconnues x_1, x_2 et x_4

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{4}x_1 & + & 3x_2 & + & (-1)x_4 & = & 3 & - & 2x_3 & - & 0x_5 \\ 0x_1 & + & \boxed{2}x_2 & + & 2x_4 & = & 2 & - & 4x_3 & - & 8x_5 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & \boxed{-1}x_4 & = & 2 & - & 0x_3 & - & (-2)x_5 \end{array}\right.$$

Phase de remontée. La phase de remontée peut être aussi organisée sous forme d'un calcul sur les coefficients du tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} \boxed{4} & 3 & -1 & 3 & - & 2x_3 & - & 0x_5 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 & - & 4x_3 & - & 8x_5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & - & 0x_3 & - & (-2)x_5 \end{array}\right).$$

On indique ci-dessous les différentes étapes, les opérations sont indiquées de façon symbolique en face de chaque ligne

Calcul de x_4

$$\begin{array}{r} \\ \\ (\text{Eq. } 3)/\boxed{-1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccccc} \boxed{4} & 3 & -1 & 3 & + & (-2)x_3 & + & 0x_5 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 & + & (-4)x_3 & + & (-8)x_5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & + & 0x_3 & + & (-2)x_5 \end{array}\right)$$

Calcul de x_2

$$\begin{array}{c} \\ ((\text{Eq. } 2) - 2(\text{Eq. } 3))/\boxed{2} \\ \text{Résolue} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccccc} \boxed{4} & 3 & -1 & 3 & + & (-2)x_3 & + & 0x_5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & + & (-2)x_3 & + & (-2)x_5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & + & 0x_3 & + & (-2)x_5 \end{array}\right)$$

Calcul de x_1

$$\begin{array}{c} ((\text{Eq. } 1) - 3(\text{Eq. } 2) - (-1)(\text{Eq.}3))/\boxed{4} \\ \text{Résolue} \\ \text{Résolue} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & + & x_3 & + & x_5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & + & (-2)x_3 & + & (-2)x_5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & + & 0x_3 & + & (-2)x_5 \end{array}\right)$$

La solution générale du système (1.8) est donc donnée de la façon suivante,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -2 + x_3 + x_5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_5 \\ x_4 = -2 - 2x_5, \end{array}\right. \tag{1.13}$$

en exprimant les **variables de base** x_1, x_2 et x_4 en fonction des valeurs arbitraires prises par les **variables libres** x_3 et x_5.

En fait, le recours aux symboles " + ", x_3 et x_5 n'est pas obligatoire. Il suffit de remplacer dans la phase de remontée le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} \boxed{4} & 3 & -1 & 3 & - & 2x_3 & - & 0x_5 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 & - & 4x_3 & - & 8x_5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & - & 0x_3 & - & (-2)x_5 \end{array}\right).$$

par le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{4} & 3 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \tag{1.14}$$

que l'on peut interpréter comme la résolution des trois systèmes inversibles suivants, dont seul le second membre est modifié :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{4}x_1 & + & 3x_2 & + & (-1)x_4 & = & 3 \\ 0x_1 & + & \boxed{2}x_2 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & \boxed{-1}x_4 & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{4}x_1 & + & 3x_2 & + & (-1)x_4 & = & -2 \\ 0x_1 & + & \boxed{2}x_2 & + & 2x_4 & = & -4 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & \boxed{-1}x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{4}x_1 & + & 3x_2 & + & (-1)x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & + & \boxed{2}x_2 & + & 2x_4 & = & -8 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & \boxed{-1}x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

B. Formalisme général

Le procédé d'élimination et de résolution précédent est en fait général. A l'aide des coefficients du système (1.1), on forme le tableau suivant

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Eventuellement, si on a le même système avec plusieurs seconds membres distincts, on les ajoute à la suite de la colonne des b_i comme ci-dessus. On effectue alors les éliminations de la façon suivante : après $(i-1)$ éliminations, en opérant de la gauche vers la droite,

- on prend comme **colonne de pivot** la première colonne j, parmi les coefficients du système, c'est-à-dire avant la barre indiquant le second membre, pour laquelle un des coefficients sur les lignes i, $i+1,\ldots$, m est non nul. (Si toutes les lignes i, $i+1,\ldots$, m, avant la barre du second membre, sont nulles, la phase d'élimination est terminée.)
- On permute éventuellement les lignes i et la ligne de ce coefficient pour l'amener en position de pivot et on effectue l'élimination i.

A la fin de l'élimination, on obtient un tableau réduit de la forme suivante

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} \boxed{*} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{array}\right).$$

Les coefficients $\boxed{*}$ sont non nuls et constituent les pivots. Les coefficients $*$ sont quelconques. Si l'un des coefficients $\bullet$ est non nul, le système est impossible. Sinon les équations correspondantes sont éliminées.

Les variables, qui correspondent à des colonnes de pivot, sont des **variables de base**. Les autres sont des **variables libres**.

On change de signe les coefficients des colonnes correspondant à des variables libres et on les met au second membre. En résolvant, autant de systèmes que de variables libres et de "vrais" seconds membres, on obtient la solution du ou des systèmes initiaux.

A partir de cet algorithme, nous en déduisons la caractérisation suivante.

Théorème 1.2 *Le système (1.1) est un système inversible si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

1. *Le système est carré.*
2. *L'algorithme de Gauss permet de l'écrire sous forme d'un système triangulaire inversible.*

Démonstration La démonstration est immédiate en observant que si $m \neq n$ alors l'une des deux conditions suivantes est vérifiée après réduction par l'extension de l'algorithme d'élimination de Gauss :

1. une ligne des coefficients du système est nulle,
2. une variable est libre.

De même, pour un système carré, la réduction donnera un système triangulaire inversible si l'une des deux situations précédentes ne se produit pas. $\diamond$

Les éléments de calcul matriciel, que nous allons introduire dans la suite, vont nous permettre une compréhension plus approfondie et une description plus systèmatique de l'existence et de l'unicité des solutions d'un système linéaire général.

1.2 Introduction au Calcul Matriciel

1.2.1 Lien avec les systèmes linéaires

Comme on peut s'en convaincre au vu des résolutions effectuées ci-dessus, seuls importent pour le traitement du système (1.1)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\text{(Eq. 1)} & : & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Eq. } i\text{)} & : & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\text{(Eq. } m\text{)} & : & a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

le tableau de ses coefficients $a_{ij},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m,$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

et de celui des $b_i,\ 1 \leq i \leq n$, coefficients de son second membre

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ces tableaux de nombres sont appelés **des matrices**. En particulier, la matrice B est une matrice colonne. A présent, notons :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne formée des inconnues du système.

Nous définissons le produit de la matrice A des coefficients du système (1.1) et de la matrice colonne X comme la matrice colonne contenant les différentes équations de (1.1), c'est-à-dire que l'on a :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Alors, le problème initial posé sous la forme du système (1.1) peut se reformuler ainsi : étant donnée la matrice A, étant donné B, calculer X solution de :

$$AX = B. \tag{1.16}$$

Cette équation matricielle n'est qu'une généralisation d'une équation du type $ax = b$ où a, b sont des réels donnés et x est l'inconnue à déterminer.

Définition 1.12 *Lorsque le système est carré ($n = m$) et inversible (unique solution quelque soit le second membre), les solutions $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ s'écrivent matriciellement en fonction des $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, on dit alors que la matrice A du système est* **inversible**. *On note A^{-1} la matrice telle que $X = A^{-1}B$. Cette matrice A^{-1} s'appelle* **la matrice inverse** *de A.*

Exemple 1.13 *La matrice du système (1.3) que nous rappelons ici*

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & = & \alpha, \\ -2x_1 & + & x_2 & = & \beta, \end{cases}$$

est $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de son second membre est $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

La matrice de l'unique solution est donnée quels que soient α et β par $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\ \alpha + (-\frac{3}{8})\ \beta \\ \frac{1}{4}\ \alpha + \frac{1}{4}\ \beta \end{pmatrix}$.

La matrice A est donc inversible et son inverse est donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ puisque $A^{-1}B = X$.

La notion de matrice est centrale dans plusieurs domaines des sciences, de la technologie et même des sciences économiques. Elles possèdent des règles de calcul qui leur sont propres et que nous verrons dans les paragraphes suivants. En particulier, la définition du produit "matrice - matrice colonne" donnée ci-dessus, se généralise pour définir un produit "matrice - matrice".

1.2.2 Définition des matrices

Définition 1.14 *Une* <u>*matrice*</u> *à éléments dans $K(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est un tableau rectangulaire rempli d'éléments de K.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i\in\{1,2,\dots,p\},j\in\{1,2,\dots,n\}}.$$

Les a_{ij} sont des éléments de K, i est l'indice de ligne et j est l'indice de colonne.
$\mathcal{M}_{pn}(K)$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients dans K.

<u>Cas particuliers</u>

1. Si $n = 1$ on parle de <u>matrice colonne</u>. Par exemple

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{41}(K).$$

2. Si $p = 1$ on parle de <u>matrice ligne</u>.
3. Lorsque $p = n$ on parle de <u>matrices carrées</u> et on note $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Soit A une matrice carrée. On note a_{ij} ses coefficients.

Si $\forall i > j, \quad a_{ij} = 0$ alors A est <u>triangulaire supérieure</u>. Par exemple, $E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\forall i < j, \quad a_{ij} = 0$ alors A est <u>triangulaire inférieure</u>. Par exemple, $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Si $\forall i \neq j, \quad a_{ij} = 0$ alors A est diagonale. Par exemple $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On note aussi $D = \mathrm{Diag}(0, 1, 2)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice identité d'ordre n.

Définition 1.15 *On appelle transposée de A, la matrice notée ${}^tA$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.*

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.16 *Si* $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{32}(K)$ *alors* ${}^t\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Définition 1.17 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Notons a_{ij} ses coefficients. On appelle trace de A et on note $Tr\ A$ l'élément de K défini par $Tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Exemple 1.18 *Pour les matrices E, F, D et I_n définies plus haut, nous avons :*

$$Tr\ E = 4 + 1 + 0 = 5, \quad Tr\ F = 2 + 1 + 2 = 5, \quad Tr\ D = 0 + 1 + 2 = 3, \quad Tr\ I_n = n.$$

1.2.3 Opérations sur les matrices

1. Addition : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{pn}(K)$. Notons a_{ij} les coefficients de A et b_{ij} ceux de B. On appelle **somme** des matrices A et B la matrice S de $\mathcal{M}_{pn}(K)$ dont les coefficients s_{ij} sont définis pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$ par

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{et on note alors} \quad S = A + B.$$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} + b_{p1} & \cdots & a_{pn} + b_{pn} \end{pmatrix}.$$

2. <u>Multiplication par un scalaire</u> : Soient $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$. Notons a_{ij} ses coefficients. Multiplier une matrice par un scalaire $\lambda \in K$, revient à multiplier tous les coefficients par ce scalaire. Si on note λ_{ij} les coefficients de la matrice Λ, résultat de cette opération, alors pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\lambda_{ij} = \lambda a_{ij} \text{ et on note } \Lambda = \lambda\ A$$

$$\Lambda = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{p1} & \cdots & \lambda a_{pn} \end{pmatrix}.$$

3. <u>Multiplication de matrices</u> : Soient $A \in \mathcal{M}_{mp}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{pn}(K)$. Notons a_{ij} les coefficients de A et b_{ij} ceux de B. On appelle **produit** des matrices A et B la matrice P de $\mathcal{M}_{mn}(K)$ dont les coefficients p_{ij} sont définis pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$ par

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \text{ et on note } P = AB.$$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}.$$

On dit que le produit s'effectue lignes par colonnes. Pour que le produit ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B.

Exemple 1.19 *Soient* $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La somme $\Omega + \Delta$ *n'existe pas puisque les matrices n'ont pas le même nombre de lignes ni de colonnes. Par contre,*

$$\Omega + {}^t\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer $2\Omega = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *ou encore* $-5\Delta = -5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le produit ${}^t\Delta\Omega$ n'existe pas car le nombre de colonnes de ${}^t\Delta$ (en l'occurrence 3) ne correspond pas au nombre de lignes de Ω (en l'occurrence 2). Par contre

$$P = \Omega\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Le produit matriciel n'est pas commutatif puisque

$$Q = \Delta\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \neq \Omega\Delta.$$

On peut remarquer que

$${}^t\Omega + \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = {}^t\left(\Omega +^t \Delta\right)$$

et que

$$R =^t \Delta^t\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = {}^t\left(\Omega\Delta\right).$$

1.2.4 Propriétés

Propriété 1.20 *Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_{pn}(K)$ et $\lambda \in K$, alors :*

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
5. ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.
6. ${}^t({}^tA) = A$.

Théorème 1.21 *$(\mathcal{M}_{pn}(K), +)$ est un groupe commutatif.*

Démonstration D'après les propriétés 1.20, l'addition est une loi interne, commutative et associative. Le neutre de l'addition est la matrice

$$0_{pn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$ alors le symétrique de A pour l'addition est $-A = (-1).A$ puisque $-A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$ et $A + (-A) = 0_{pn}$. $\diamond$

Propriété 1.22 *On considère $\lambda \in K$ et les matrices $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{nm}(K)$, $C \in \mathcal{M}_{mq}(K)$ et $D \in \mathcal{M}_{nm}(K)$. Alors*

1. $A(BC) = (AB)C = ABC$.
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$.
3. $A(B + D) = AB + AD$ *et* $(B + D)C = BC + DC$.
4. $AI_n = I_pA = A$
5. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ *(FAIRE ATTENTION A L'ORDRE!)*

Théorème 1.23 $(\mathcal{M}_n(K), +, \times)$ *est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre.*

Démonstration D'après les propriétés 1.22, la multiplication est une loi interne, associative et distributive par rapport à l'addition.

Le neutre de la multiplication est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le produit n'est pas commutatif et on peut obtenir la matrice nulle en multipliant deux matrices non nulles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

Proposition 1.24 *Pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$, nous avons $Tr\ AB = Tr\ BA$ et ce, même si les matrices A et B ne commutent pas, c'est-à-dire, $AB \neq BA$.*

Démonstration Notons respectivement a_{ij} les coefficients de A, b_{ij} ceux de B, c_{ij} ceux de AB et d_{ij} ceux de BA. Par définition de la trace et du produit de deux matrices,

$$\text{Tr } AB = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$$

et

$$\text{Tr } BA = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji}.$$

Comme les sommes sur i et sur j sont indépendantes, on peut intervertir les signes sommes et

$$\text{Tr } BA = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \text{Tr } AB.$$

$\diamond$

Remarque 1.25 *Soient n et p, deux entiers différents. Si $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$ et si $B \in \mathcal{M}_{np}(K)$ alors $AB \in \mathcal{M}_p(K)$ et $BA \in \mathcal{M}_n(K)$ et Tr $AB =$ Tr BA. Il suffit de reprendre la démonstration précédente en sommant l'indice i entre 1 et p.*

Définition 1.26 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

1. *Si ${}^tA = A$ alors A est une matrice symétrique.*
2. *Si ${}^tA = -A$ alors A est une matrice antisymétrique.*

Exemple 1.27 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *est symétrique.*

$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -7 \\ -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique.*

Remarque : Si A est antisymétrique alors les coefficients de la diagonale de A sont nuls.

Définition 1.28 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

Si B existe, elle est unique et on note $B = A^{-1}$.

Propriété 1.29

1. *I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.*
2. *Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

3. A^{-1} *est inversible et* $(A^{-1})^{-1} = A$.

4. *Si* A *est inversible alors* ${}^tA$ *est inversible et* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Proposition 1.30 *Soit* $GL_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K),\ A \text{ est inversible }\}$. *L'ensemble* $GL_n(K)$ *est un groupe pour la multiplication. On l'appelle le* *groupe linéaire* *d'ordre* n *de* K.

Démonstration D'après les propriétés 1.22, la multiplication est une loi interne, associative qui admet comme neutre, la matrice identité I_n. De plus, si $A \in GL_n(K)$, le symétrique de A pour la multiplication est A^{-1} puisque $A^{-1} \in GL_n(K)$ et $A(A^{-1}) = I_n$. ◇

Avec les notations du paragraphe 1.2.1, nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.31 *La matrice* A *est inversible si et seulement si le système linéaire associé est inversible. Dans ce cas, l'unique solution de* $AX = B$ *s'écrit* $X = A^{-1}B$.

1.3 Test d'auto-évaluation

1.3.1 Systèmes linéaires

Question 1. Résoudre par l'algorithme de Gauss, les deux systèmes suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 0, \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 1. \end{array}\right.$$

Question 2. Soient deux réels a et λ. Soit le système (S) défini par :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & \lambda y & + & \lambda z & = & a. \end{array}\right.$$

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que le système (S) admette une unique solution.

2. Dans le cas où $\lambda = 2$, déterminer selon les valeurs de a le nombre de solutions de (S).

3. Déterminer l'unique solution de (S) dans le cas où $a = 3$ et $\lambda = 1$.

1.3.2 Calcul matriciel

Question 3. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A - B$ et $2A + B$.

2. Parmi les produits suivants, déterminer ceux qui existent et calculer les.

$$AB, BA,^t AB, B^t A,^t BA, A^t B, AC, CA, C^2, CD \text{ et } DC.$$

3. Calculer Tr C, Tr D, Tr CD, Tr DC, Tr ${}^t AB$ et Tr $B^t A$.

4. Les matrices C et D sont-elles inversibles ?

5. Déterminer les matrices X vérifiant l'équation $AX = C$.

   Indication : déterminer avant de commencer la taille de la matrice X.

Question 4. Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Résoudre $Y^2 = I_2$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

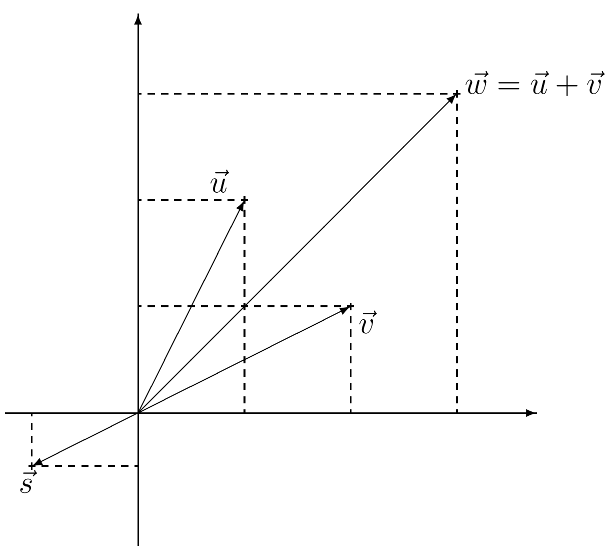
Chapitre 2

Espaces vectoriels

2.1 Introduction

Avant de définir les espaces vectoriels, nous allons à partir d'un exemple simple, le cas de $\mathbb{R}^2$, lister les différentes propriétés des vecteurs.

Voici la représentation de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$.



$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$(\vec{u} + \vec{w}) + \vec{v} = \vec{u} + (\vec{w} + \vec{v})$

$\vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

$\vec{s} = -\frac{1}{2}\vec{v}$

$-4\vec{w} = -4(\vec{u} + \vec{v}) =$

$5\vec{u} - 2\vec{u} =$

$2\vec{s} =$

Du point de vue des coordonnées nous avons :

$$\vec{u} = (1, 2) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (2, 1)$$

On en déduit

$$\vec{w} =$$

$$\vec{s} =$$

Dans toute la suite du cours, K sera un corps commutatif. Dans la pratique, nous prendrons $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2 Généralités

2.2.1 Définitions

Définition 2.1 *Soit un ensemble E muni d'une loi interne " + " et d'une loi externe "." définies par*

$$\begin{array}{rcccl} + & : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & & (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 + v_2 \end{array} \quad \textit{(loi interne)} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rcccl} . & : & K \times E & \longrightarrow & E \\ & & (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda.v \end{array} \quad \textit{(loi externe).}$$

L'espace $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps K si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *$(E, +)$ est un groupe commutatif (+ est interne, commutative, associative, existence d'un neutre et d'un symétrique pour tout élément de E),*
2. *la loi externe "." est telle que pour tout v_1, v_2 dans E et tout λ, μ dans K,*
   - *(a)* $\lambda.(v_1 + v_2) = \lambda.v_1 + \lambda.v_2$,
   - *(b)* $(\lambda + \mu).v_1 = \lambda.v_1 + \mu.v_1$,
   - *(c)* $(\lambda\mu).v_1 = \lambda.(\mu.v_1)$,
   - *(d)* $1_K.v_1 = v_1$.

Les éléments de E sont appelés des vecteurs, ceux de K des scalaires.

2.2.2 Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel pour les lois + et . définies par :
   $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

2. On démontre plus généralement que si $(E_1, +, .)$ et $(E_2, \uplus, \odot)$ sont deux espaces vectoriels sur le même corps K alors, $(E_1 \times E_2, \boxplus, \boxdot)$ est un espace vectoriel pour les lois définies pour tout $(x_1, y_1) \in E_1^2$, $(x_2, y_2) \in E_2^2$ et $\lambda \in K$ par

$$(x_1, x_2) \boxplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 \uplus y_2)$$

et

$$\lambda \boxdot (x_1, x_2) = (\lambda . x_1, \lambda \odot x_2).$$

3. L'ensemble $K[x]$ des polynômes à coefficients dans K muni des lois $+$ et $.$ habituelles a une structure d'espace vectoriel sur K.

4. L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(K)$ des matrices à n lignes et p colonnes muni des lois $+$ et $.$ habituelles a une structure d'espace vectoriel sur K.

5. Soient I un ensemble et F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(I, F)$ des applications de I dans F muni des lois $+$ et $.$ habituelles a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

6. L'ensemble des suites réelles muni des lois + et . habituelles a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2.2.3 Règles de calculs

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur K. On désigne par x et y des vecteurs de E et par λ et μ des scalaires. Alors :

$$\lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y \tag{2.1}$$

$$(\lambda-\mu).x = \lambda.x - \mu.x \tag{2.2}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\lambda.(x-y) &= \lambda.(x-y)+\lambda.y-\lambda.y = \lambda.(x-y+y)-\lambda.y = \lambda.x-\lambda.y\\ (\lambda-\mu).x &= (\lambda-\mu).x+\mu.x-\mu.x = (\lambda-\mu+\mu).x-\mu.x = \lambda.x-\mu.x\end{aligned}$$

$\diamond$

Ce qui a pour conséquences immédiates

$$\lambda.0_E = 0_E \qquad 0_K.x = 0_E \tag{2.3}$$

$$\lambda.(-y) = -\lambda.y \qquad (-\mu).x = -\mu.x \tag{2.4}$$

Démonstration

Poser $x = y$ dans (2.1) donne $\lambda.0_E = \lambda.(x-x) = \lambda.x - \lambda.x = 0_E$

Poser $\lambda = \mu$ dans (2.2) donne $0_K.x = (\lambda-\lambda).x = \lambda.x - \lambda.x = 0_E$

Poser $x = 0_E$ dans (2.1) donne $\lambda.(-y) = \lambda.(0_E - y) = \lambda.0_E - \lambda.y = 0_E - \lambda.y = -\lambda.y$

Poser $\lambda = 0_K$ dans (2.2) donne $(-\mu).x = (0_K-\mu).x = 0_K.x - \mu.x = 0_E - \mu.x = -\mu.x$

$\diamond$

Théorème 2.2 $(\lambda.x = 0_E) \Leftrightarrow (\lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E)$.

Démonstration

$\diamond$

2.3 Sous-espace vectoriel

2.3.1 Définitions

Définition 2.3 *Une partie non vide F d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ est stable pour les lois $+$ et $.$ si*

$$\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F, \tag{2.5}$$

$$\forall \lambda \in K,\ \forall x \in F,\ \lambda.x \in F. \tag{2.6}$$

Définition 2.4 *Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur K et F un sous-ensemble non vide de E. $(F, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de E si la restriction des lois de E à F fait de F un espace vectoriel sur K.*

Théorème 2.5 *Soit F un sous-ensemble de E.*

$$\begin{aligned} F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E &\iff F \neq \emptyset \text{ et } \forall \lambda \in K,\ \ \forall (x, y) \in F^2,\ \ \lambda x + y \in F \\ &\iff F \neq \emptyset \text{ et } F \text{ est stable pour les lois } + \text{ et } . \end{aligned}$$

Démonstration

$\diamond$

Remarque :

1. F sous-espace vectoriel de E implique $0_E \in F$.

2. Pour montrer que $(F, +, .)$ est un espace vectoriel, il est plus facile de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu.

2.3.2 Exemples

1. Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur K, alors E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des applications continues de I vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $K_n[x]$ des polynômes de $K[x]$ de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $K[x]$.

   L'ensemble des polynômes de $K[x]$ de degré exactement égal à n est-il un sous-espace vectoriel de $K[x]$?
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

5. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ xy = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.3.3 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Dans tout ce paragraphe, F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.

Théorème 2.6 *$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration

$\diamond$

Que dire de $F \cup G$?

On pourra considérer $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = 0\}$.

Définition 2.7 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ des éléments de E.*

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n$ tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Définition 2.8 *Soit A une partie de E. On note Vect (A) le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A. On dit aussi que Vect (A) est le sous-espace vectoriel engendré par A.*

Théorème 2.9 *Soit A une partie de E.*

1. *Si $A = \emptyset$ alors Vect $(\emptyset) = \{0_E\}$.*
2. *Si $A \neq \emptyset$ alors Vect (A) est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A, c'est-à-dire*

$$\text{Vect }(A) = \left\{ x \in E \ / \ \exists (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n \ \text{ et } \ \exists (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n, \ \text{tel que } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\}.$$

Démonstration

◇

Exemple 2.10

1. *Soit* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0\}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*. Déterminer* $B \subset \mathbb{R}^3$ *tel que* $F = Vect\ B$.

2. *Soit l'équation différentielle linéaire* $(\mathcal{E})$ $\;y" - 3y' + 2y = 0$*. Si* $f_1(x) = e^x$ *et* $f_2(x) = e^{2x}$ *alors les solutions de* $(\mathcal{E})$ *sont* $Sol(\mathcal{E}) = \{\lambda f_1 + \mu f_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Trouver A *pour que* $Sol\ (\mathcal{E}) = Vect\ (A)$.

Définition 2.11 *On définit la* <u>*somme*</u> *de deux sous-espaces vectoriels* F *et* G *de* E *par*

$$F + G \;=\; \{z \in E \;\; / \; \exists (x, y) \in F \times G \text{ tel que } z = x + y\}.$$

Théorème 2.12 $F+G$ *est un sous-espace vectoriel de* E*. C'est le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) qui contient* $F \cup G$*. Autrement dit,* $F + G = Vect\ (F \cup G)$.

Démonstration

$\diamond$

Propriété 2.13 *Notons F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. L'opération somme de deux sous-espaces vectoriels a les propriétés suivantes :*

1. *$F + (G + H) = (F + G) + H$. On dit alors que la loi " + " est associative. On note $F + G + H$ la somme des trois sous-espaces vectoriels.*
2. *$F + G = G + F$, la loi $+$ est donc commutative.*
3. *$F + \{0_E\} = \{0_E\} + F = F$.*
4. *$F + F = F$ mais $F + G = F + H \not\Rightarrow G = H$.*

Démonstration

$$
\begin{array}{rcl}
1.\ \subset: x \in F + (G + H) & \Rightarrow & (\exists (y, z) \in F \times (G + H))(x = y + z) \\
 & \Rightarrow & (\exists (y, u, v) \in F \times G \times H)(x = y + (u + v) = (y + u) + v)) \\
 & \text{donc} & x \in (F + G) + H. \\
\supset: x \in (F + G) + H & \Rightarrow & (\exists (y, z) \in (F + G) \times H)(x = y + z) \\
 & \Rightarrow & (\exists (u, v, z) \in F \times G \times H)(x = (u + v) + z = u + (v + z)) \\
 & \text{donc} & x \in F + (G + H).
\end{array}
$$

2. $x \in F + G \Leftrightarrow (\exists (y, z) \in F \times G)(x = y + z) \Leftrightarrow (\exists (z, y) \in G \times F)(x = z + y) \Leftrightarrow x \in G + F$.

3.

$$
\begin{array}{rcl}
x \in F & \Rightarrow & x = x + 0_E \Rightarrow x \in F + \{0_E\} \\
x \in F + \{0_E\} & \Rightarrow & (\exists y \in F)(x = y + 0_E = y) \ \text{ donc } \ x \in F.
\end{array}
$$

4.

$$
\begin{array}{rcl}
x \in F & \Rightarrow & x = x + 0_E \Rightarrow x \in F + F. \\
x \in F + F & \Rightarrow & (\exists (y, z) \in F \times F)(x = y + z) \Rightarrow x \in F. \text{ D'où } F + F = F. \\
\text{Mais } \ F + F & = & F + \{0_E\} = F \ \text{ même si } \ F \neq \{0_E\}.
\end{array}
$$

◇

Définition 2.14 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F + G$ est* <u>*directe*</u> *si $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $F \oplus G$.*

Définition 2.15 *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si les assertions suivantes sont vérifiées*

i) $E = F + G$,

ii) la somme est directe i.e. $F \cap G = \{0_E\}$.

On note alors $E = F \oplus G$.

Exemple 2.16 *Soit* $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On considère F le sous-ensemble des fonctions paires et G le sous-ensemble des fonctions impaires. Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.Sont-ils supplémentaires dans E ?*

Théorème 2.17 $E = F \oplus G \Longleftrightarrow (\forall x \in E)\ (\exists!(y, z) \in F \times G)\ (x = y + z)$.

Démonstration

$\diamond$

Application : Définition de la projection sur F parallèlement à G.

On peut grâce à l'équivalence du théorème 2.17, définir la somme directe de plusieurs sous espaces vectoriels.

Définition 2.18 *Si $E_1, E_2, \cdots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, on dit que la somme $F = E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe si*

$$(\forall\, v \in F)(\exists!\,(v_1, v_2, \cdots, v_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p)(v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p).$$

Dans ce cas on note $F = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$ ou encore $F = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition 2.19 *Soient $E_1, E_2, \cdots, E_{p-1}, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_{p-1}$. Si F et E_p sont en somme directe alors la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe. Autrement dit,*

$$(E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_{p-1}) \oplus E_p = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p.$$

2.4 Famille génératrice, famille libre, base

2.4.1 Définitions

Définition 2.20 *Soient I et E deux ensembles. On considère une application qui à tout i dans I associe un élément de E noté x_i. Cette application définit une famille que l'on note $(x_i)_{i \in I}$.*
La famille $(x_i)_{i \in I}$ est finie si I est un ensemble de cardinal fini, elle est infinie dans le cas contraire.

Remarque : Les x_i ne sont pas nécessairement distincts. Si $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ alors la famille $(x_i)_{i \in I}$ représente le $n-$uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. A ne pas confondre avec l'ensemble $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

Définition 2.21 *Une famille non vide A de E est génératrice de E si $E = Vect\,(A)$. On dit aussi que A engendre E.*

Remarque : Si f est une bijection de $\{1, 2, \cdots, n\}$ dans lui même, alors les familles $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $(x_{f(1)}, x_{f(2)}, \cdots, x_{f(n)})$ engendrent le même espace vectoriel.

Exemple 2.22 *Donner une famille génératrice des espaces vectoriels* $\mathbb{R}^3$*,* $K[x]$ *et* $\mathcal{M}_{23}(K)$*.*

Définition 2.23 *Soit* $A = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *une famille finie de* E*. La famille* A *est* <u>*libre*</u> *si*

$$(\forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n)[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_K)].$$

On dit aussi que les vecteurs x_i *sont* <u>*linéairement indépendants*</u>*.*

Définition 2.24 *Soit* $A = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *une famille de* E*.*

A est <u>*liée*</u> *si elle n'est pas libre, c'est-à-dire*

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n,\ [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \quad et \quad (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \neq (0_K, 0_K, \cdots, 0_K)]\,.$$

Remarque : Le contraire d'une famille libre est une famille liée !

Définition 2.25 *Une famille infinie de E est libre si toute sous-famille finie est libre. Elle est liée s'il existe une sous-famille finie liée.*

Définition 2.26 *On appelle base de E une famille libre et génératrice de E.*

Exemple 2.27

1. *Les familles $((1,1),(1,2),(2,3))$ et $((1,2,3),(1,1,1))$ sont-elles libres ?*

2. *Donner une base des espaces vectoriels* $\mathcal{M}_{np}(K)$, $\mathbb{R}^n$, $K_n[x]$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $K[x]$.

Théorème 2.28

Soient E un K-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \iff (\forall\ x \in E)\ (\exists!(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in K^n)\ (x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Les λ_i sont les composantes ou coordonnées de x relativement à la base $\mathcal{B}$.

Démonstration

$\diamond$

2.4.2 Propriétés

Soit E un espace vectoriel. Soient $x, y, x_1, x_2, \cdots, x_n$ des vecteurs de E.

1. (x, y) liée $\iff (\exists \lambda \in K)\ (x = \lambda y \ \text{ ou } \ y = \lambda x)$.

Plus généralement $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ liée $\Longleftrightarrow$ l'un des x_i est combinaison linéaire des autres.

2. (x) est libre $\Longleftrightarrow x \neq 0_E$.

3. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ liée $\Longrightarrow (\forall y \in E)\,[(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ est liée $]$.

4. S'il existe i tel que $x_i = 0_E$ alors $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est liée.

5. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ libre $\Longrightarrow (\forall \;\; i \neq j)(x_i \neq x_j)$.

6. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ libre $\Longrightarrow$ toute sous-famille est libre.

2.5 Dimension d'un espace vectoriel, rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.29 *Un espace vectoriel est de dimension finie s'il existe une famille A de cardinal fini telle que $E = Vect\,(A)$. Il est de dimension infinie dans le cas contraire.*

Exemple 2.30 *Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $K_n[x]$, $\mathcal{M}_{np}(K)$ et $K[x]$ sont-ils de dimension finie ?*

Nous allons montrer que tout espace de dimension finie admet une base finie et que toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Pour cela, nous avons besoin du résultat préliminaire suivant.

Lemme 2.31 *Si chacun des $n+1$ vecteurs $u_1, u_2, ..., u_{n+1}$ est combinaison linéaire des n vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$, alors $(u_1, u_2, ..., u_{n+1})$ est liée.*

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : $n = 1$: $F = \text{Vect }(e_1)$. Soient u_1 et u_2 dans F. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$ tel que $u_1 = \lambda_1 e_1$ et $u_2 = \lambda_2 e_1$, donc la famille (u_1, u_2) est liée.

Hypothèse de Récurrence (HR) : Supposons que si $G = \text{Vect }(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ alors toute famille de $n+1$ vecteurs de G est liée.

Rang $n+1$: On a $H = \text{Vect}\,(e_1, e_2, \cdots, e_n, e_{n+1})$ et $u_1, \cdots, u_{n+1}, u_{n+2}$, $n+2$ vecteurs de H.

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & \lambda_{1,1}e_1 + \lambda_{1,2}e_2 + \cdots + \lambda_{1,n}e_n + \lambda_{1,n+1}e_{n+1} \\ u_2 & = & \lambda_{2,1}e_1 + \lambda_{2,2}e_2 + \cdots + \lambda_{2,n}e_n + \lambda_{2,n+1}e_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots \\ u_{n+1} & = & \lambda_{n+1,1}e_1 + \lambda_{n+1,2}e_2 + \cdots + \lambda_{n+1,n}e_n + \lambda_{n+1,n+1}e_{n+1} \\ u_{n+2} & = & \lambda_{n+2,1}e_1 + \lambda_{n+2,2}e_2 + \cdots + \lambda_{n+2,n}e_n + \lambda_{n+2,n+1}e_{n+1}. \end{array}$$

1er cas : $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n+2\}, \lambda_{k,n+1} = 0$.

Alors les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}$ appartiennent à $\text{Vect}\,(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

HR $\Rightarrow (u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$ liée. Donc $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}, u_{n+2})$ est liée.

2ème cas : $\exists\ \ k \in \{1, 2, \cdots, n+2\}, \lambda_{k,n+1} \neq 0$. Par exemple, $\lambda_{n+2,n+1} \neq 0$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$ on définit $u_i' = u_i - \dfrac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} u_{n+2}$. On a alors

$$\begin{aligned} u_i' = {} & \lambda_{i,1}e_1 + \lambda_{i,2}e_2 + \cdots + \lambda_{i,n}e_{i,n} + \lambda_{i,n+1}e_{n+1} \\ & -\frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}\lambda_{n+2,1}e_1 - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}\lambda_{n+2,2}e_2 + \cdots - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}\lambda_{n+2,n}e_n - \lambda_{i,n+1}e_{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $i \in \{1, 2, \cdots n+1\}$, $u_i' \in \text{Vect}\,(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

Donc d'après HR, $(u_1', u_2', \cdots, u_{n+1}')$ est liée.

Par suite, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1})$ scalaires non tous nuls tels que

$$\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \cdots + \alpha_{n+1} u_{n+1}' = 0.$$

Donc $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{n+1} u_{n+1} - \dfrac{1}{\lambda_{n+2,n+1}}(\alpha_1 \lambda_{1,n+1} + \alpha_2 \lambda_{2,n+1} + \cdots + \alpha_{n+1}\lambda_{n+1,n+1})u_{n+2} = 0$.

Par suite, $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}, u_{n+2})$ est liée. ◇

Théorème 2.32 *Toute famille génératrice d'un espace vectoriel E contient plus d'éléments qu'une famille libre de E.*

Démonstration

Soit $G = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille génératrice de E et soit $(y_1, \cdots, y_n)$ une famille libre de E. Montrons par l'absurde que $p \geq n$.

Supposons que $p < n$ et montrons que la famille $(y_1, \cdots, y_n)$ est liée.

La famille G étant génératrice, la famille $(y_1, \cdots, y_p, y_{p+1})$ est une famille de $p+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires des p vecteurs $(x_1, \cdots, x_p)$.

D'après le lemme 2.31, la famille $(y_1, \cdots, y_p, y_{p+1})$ est liée. Ainsi toute famille contenant cette famille liée est également une famille liée. Par conséquent, puisque $p < n$, la famille $(y_1, \cdots, y_n)$ est liée. Nous aboutissons à une contradiction avec l'hypothèse que la famille $(y_1, \cdots, y_n)$ est libre. Donc $p \geq n$.

$\diamond$

Lemme 2.33 *Soient E un espace vectoriel sur K, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre de E et x dans E.*

1. *Si $x \in$ Vect $(x_1, x_2, ..., x_n)$ alors Vect $(x_1, x_2, ..., x_n, x) =$ Vect $(x_1, x_2, ..., x_n)$.*
2. *Si $x \notin$ Vect $(x_1, x_2, ..., x_n)$ alors $(x_1, x_2, ..., x_n, x)$ est une famille libre de E.*

Démonstration

1. Il est clair que Vect $(x_1, x_2, ..., x_n) \subset$ Vect $(x_1, x_2, ..., x_n, x)$.

   Soit $y \in$ Vect $(x_1, x_2, ..., x_n, x)$. Alors il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda) \in K^{n+1}$ tel que
   $$y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda x.$$
   D'autre part, $x \in$ Vect $(x_1, x_2, ..., x_n)$ donc il existe $(\mu_1, \cdots, \mu_n) \in K^n$ tel que
   $$x = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n.$$
   Ainsi, $y = (\lambda_1 + \lambda\mu_1)x_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda\mu_n)x_n$ donc $y \in$ Vect $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et
   $$\text{Vect } (x_1, x_2, ..., x_n, x) = \text{Vect } (x_1, x_2, ..., x_n).$$
2. Soit $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda x = 0_E$ une combinaison linéaire nulle des vecteurs.

   Si $\lambda \neq 0_K$ alors $x = -\lambda^{-1}\lambda_1 x_1 - \lambda^{-1}\lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda^{-1}\lambda_n x_n$ ce qui contredit le fait que $x \notin$ Vect $(x_1, x_2, ..., x_n)$ donc $\lambda = 0_K$.

   On a donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$ et comme $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, nous avons pour tout $1 \leq i \leq n, \lambda_i = 0_K$ et la famille $(x_1, x_2, ..., x_n, x)$ est libre.

$\diamond$

Théorème 2.34 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.*

Démonstration

Soit $E = \text{Vect}\ (x_1, x_2, ..., x_m)$ avec pour tout $1 \leq i \leq m, x_i \neq 0$. Nous allons raisonner par récurrence sur m.

Initialisation : $m = 1$

$E = \text{Vect}\ (x_1)$ et $x_1 \neq 0_E$ donc (x_1) est une famille libre et génératrice de E, c'est une base de E.

Hypothèse de Récurrence (HR) :

D'une famille génératrice de E de m vecteurs non nuls, on peut extraire une base.

Rang $m+1$: Soit $E = \text{Vect}\ (x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1})$. Notons $F = \text{Vect}\ (x_1, x_2, ..., x_m) \subset E$.

D'après (HR), on peut extraire de $(x_1, x_2, ..., x_m)$ une base de F. Notons $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ cette base. Nous avons alors $F = \text{Vect}\ (y_1, y_2, ..., y_p)$ et $E = \text{Vect}\ (y_1, y_2, ..., y_p, x_{m+1})$.

Si $x_{m+1} \in \text{Vect}\ (y_1, y_2, ..., y_p)$, alors d'après le lemme 2.33

$$E = \text{Vect}\ (y_1, y_2, ..., y_p, x_{m+1}) = \text{Vect}\ (y_1, y_2, ..., y_p) = F.$$

Par suite $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ est une base de E.

Si $x_{m+1} \notin \text{Vect}\ (y_1, y_2, ..., y_p)$, on a, toujours d'après le lemme 2.33 $(y_1, y_2, ..., y_p, x_{m+1})$ libre, c'est donc une base de E. $\diamond$

Exemple 2.35 *Soit $F = Vect\,((1,1,0),(0,0,0),(2,2,0),(1,0,1),(2,3,-1))$. Donner une base de F.*

Conséquences des deux derniers théorèmes

1. Tout espace vectoriel E, non réduit à $\{0_E\}$ et de dimension finie admet une base.

2. Toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Définition 2.36 *On appelle dimension de E le nombre d'éléments d'une base de E.*

Exemple 2.37 *Donner la dimension de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{M}_{np}(K)$ et de $K_n[x]$.*

Théorème 2.38 (Théorème de la base incomplète)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit L une famille libre de E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui contient L.

Démonstration

Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ une famille génératrice de E. Notons $L = (x_1, \cdots, x_l)$.
Il est clair que $(x_1, \cdots, x_l, v_1, v_2, \cdots, v_p)$ est une famille génératrice de E de laquelle on peut extraire une base (théorème 2.34).

Si L est génératrice de E, alors comme L est libre, L est une base et le théorème est démontré.

Supposons donc que L n'est pas génératrice. Alors, il existe un i, par exemple (quitte à changer la numérotation des v_i) $i = 1$ tel que $v_1 \notin$ Vect (L). Par conséquent d'après le lemme 2.33, $(x_1, \cdots, x_l, v_1)$ est libre.

Si $(x_1, \cdots, x_l, v_1)$ est génératrice de E, le théorème est démontré.

Sinon, il existe un i, par exemple (quitte à changer la numérotation des v_i) $i = 2$ tel que $v_2 \notin$ Vect $((x_1, \cdots, x_l, v_1))$ donc d'après le lemme 2.33, $(x_1, \cdots, x_l, v_1, v_2)$ est libre.

Si $(x_1, \cdots, x_l, v_1, v_2)$ est génératrice de E, le théorème est démontré, sinon on continue.

$\diamond$

Exemple 2.39 *Compléter la base de F obtenue à l'exemple 2.35 afin d'obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.*

Proposition 2.40 *1. Soit E un espace vectoriel de dimension n.*

(a) Si L est une famille libre de E alors Card $L \leq n$.

(b) Si G est une famille génératrice de E alors Card $G \geq n$.

(c) Si L est libre et si Card $L = n$ alors L est une base de E.

(d) Si G est génératrice et si Card $G = n$ alors G est une base de E.

2. La dimension de E est égale au nombre de vecteurs dans le plus grand (au sens de l'inclusion) système libre de E. Par suite dim $F = 0 \Longleftrightarrow F = \{0_E\}$.

Démonstration $\diamond$

Exemple 2.41

1. *Montrer que les vecteurs* $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ *et* $(1,-1,-2)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Montrer que* $E = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *est de dimension infinie. (Indication : On pourra raisonner par l'absurde et démontrer qu'il contient une famille libre de cardinal supérieur à la dimension).*

Définition 2.42 *Soit* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* E*. On appelle* *rang* *de la famille de vecteurs* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.*

Exemple 2.43 *Quel est le rang de la famille* $\mathcal{F} = ((1,1,0),(0,0,0),(2,2,0),(1,0,1),(2,3,-1))$ *?*

Proposition 2.44

1. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E avec $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ une base de F et $(v_1, v_2, \cdots, v_s)$ une base de G. Alors*

   (a) $F + G =$ *Vect* $(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$

   (b) $(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$ *est libre si et seulement si* $F \cap G = \{0_E\}$.

2. *Si $E_1, E_2, \cdots E_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E tels que pour tout $i \in \{1, 2, \cdots p\}$, $(u_1^i, u_2^i, \cdots, u_{r_i}^i)$ est une base de E_i, alors*

   $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$ *si et seulement si* $(u_1^1, u_2^1, \cdots, u_{r_1}^1, u_1^2, u_2^2, \cdots, u_{r_2}^2, \cdots, u_1^p, u_2^p, \cdots, u_{r_p}^p)$ *est libre.*

Démonstration

1. (a) Soit $H = \text{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$. Nous allons montrer par double inclusion, que $H = F + G$.

$$\forall \;\; h \in H, \qquad \exists(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s) \in K^{r+s},$$
$$h = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r}_{\in F} + \underbrace{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_s v_s}_{\in G},$$

donc $h \in F + G$ et $H \subset F + G$.

Réciproquement,

$$\forall \;\; w \in F + G, \;\; \exists(u, v) \in F \times G, w = u + v.$$

On a $u \in F$ donc $\exists(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \in K^r, u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r$.

De même, $v \in G$ et $\exists(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s) \in K^s, v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_s v_s$.

Par suite, $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_s v_s \in H$ donc $F + G \subset H$.

(b) <u>Supposons que $(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$ est libre</u> . Soit $x \in F \cap G$. Nous avons alors

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = \sum_{j=1}^{s} \mu_j v_j. \text{ Donc } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i - \sum_{j=1}^{s} \mu_j v_j = 0_E.$$

Comme $(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$ est libre, on obtient pour tout $1 \leq i \leq r, \lambda_i = 0_K$ et tout $1 \leq j \leq s, \mu_j = 0_K$. Finalement $x = 0_E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

<u>Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$</u>. On part de

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j v_j = 0_E.$$

On a donc
$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = -\sum_{j=1}^{s} \mu_j v_j$$
et $x = 0_E$ puisque $x \in F \cap G$.

Comme les familles $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ et $(v_1, v_2, \cdots, v_s)$ sont libres, on obtient alors pour tout $1 \leq i \leq r$, $\lambda_i = 0_K$ et tout $1 \leq j \leq s$, $\mu_j = 0_K$. Donc $(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$ est libre.

2. Notons $\mathcal{V} = (u_1^1, u_2^1, \cdots, u_{r_1}^1, u_1^2, u_2^2, \cdots, u_{r_2}^2, \cdots, u_1^p, u_2^p, \cdots, u_{r_p}^p)$. On vérifie comme dans 1.(a) que
$$E_1 + E_2 + \cdots + E_p = \text{Vect } (\mathcal{V}).$$
Supposons que la famille $\mathcal{V}$ est libre. Soit $x \in E_1 + E_2 + \cdots + E_p$. On suppose que x admet deux écritures différentes :
$$x = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i u_j^i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_i} \beta_j^i u_j^i.$$
En effectuant la différence de ces deux écritures, on obtient
$$0_E = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_i} (\alpha_j^i - \beta_j^i) u_j^i,$$
ce qui donne, puisque la famille $\mathcal{V}$ est libre
$$\forall\, i \in \{1, \cdots, p\}, \forall\, j \in \{1, 2, \cdots, r_i\}, \alpha_j^i = \beta_j^i.$$
L'écriture est donc unique et la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe.

Réciproquement, supposons que la somme est directe et partons d'une combinaison linéaire nulle des u_j^i. Nous avons d'une part
$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i u_j^i = 0_E$$
et d'autre part,
$$0_E = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r_i} 0_K u_j^i.$$
Par unicité de l'écriture dans $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$, on en déduit que
$$\forall\, i \in \{1, \cdots, p\}, \forall\, j \in \{1, 2, \cdots, r_i\}, \alpha_j^i = 0_K \text{ et la famille } \mathcal{V} \text{ est libre.}$$

$\diamond$

Corollaire 2.45 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Avec les notations précédentes, nous avons*

1. $E = F \oplus G$ *si et seulement si* $(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s)$ *est une base de* E.
2. $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ *si et seulement si* $\mathcal{V}$ *est une base de* E.

Théorème 2.46 (Formules sur les dimensions)

E,F,$E_1, E_2, \cdots, E_p$ désignent des espaces vectoriels de dimension finie.

1. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors dim $F \leq$ dim E.*
2. *Si F est un sous-espace vectoriel de E et si dim $F =$ dim E, alors $E = F$.*
3. *dim $(E_1 \times E_2) =$ dim $E_1 +$ dim E_2.*
4. *Si la somme $E_1 + E_2$ est directe, c'est-à-dire si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, alors*

$$dim\ (E_1 \oplus E_2) = dim\ E_1 + dim\ E_2.$$

Par récurrence immédiate, on montre que si la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ est directe alors

$$dim\ \ (E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p) = \sum_{i=1}^{p} dim\ E_i.$$

5. *Si $E_1 \cap E_2 \neq \{0_E\}$ alors dim $(E_1 + E_2) =$ dim $E_1 +$ dim $E_2 -$ dim $(E_1 \cap E_2)$.*
6. $E = E_1 \bigoplus E_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \\ dim\ E_1 + dim\ E_2 = dim\ E \end{cases}$

Démonstration

1.

2.

3. Il suffit de vérifier que si $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$ est une base de E_1 et si $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$ est une base de E_2 alors

$$((e_1, 0_{E_2}), (e_2, 0_{E_2}), \cdots, (e_{n_1}, 0_{E_2}), (0_{E_1}, f_1), (0_{E_1}, f_2), \cdots, (0_{E_1}, f_{n_2}))$$

est une base de $E_1 \times E_2$.

4. Si $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ est une base de E_1 et $(v_1, v_2, \cdots, v_s)$ une base de E_2, alors, comme la somme $E_1 + E_2$ est directe, la proposition 2.44 assure que $(u_1, u_2, \cdots, u_r, v_1, v_2, \cdots, v_s)$ est une base de $E_1 \oplus E_2$. Par suite, $\dim\,(E_1 \oplus E_2) = r + s = \dim\, E_1 + \dim\, E_2$.

5. Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une base de $G = E_1 \cap E_2$. $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille libre de E_1 donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe $v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_q$ dans E_1 tels que $(u_1, u_2, \cdots, u_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_q)$ soit une base de E_1.
De même il existe $w_{p+1}, w_{p+2}, \cdots, w_r$ dans E_2 tels que $(u_1, u_2, \cdots, u_p, w_{p+1}, w_{p+2}, \cdots, w_r)$ soit une base de E_2.

   Soit $H = \text{Vect}\,(v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_q)$.

   La proposition 2.44 assure que

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= \text{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_q, w_{p+1}, w_{p+2}, \cdots, w_r) \\ &= E_2 + H. \end{aligned}$$

   Afin d'appliquer le résultat précédent, nous allons démontrer que $E_2 \cap H = \{0_E\}$.
Soit x dans $E_2 \cap H$. Alors x est dans E_2 et dans H. Or $H \subset E_1$. Ainsi x est dans E_2, E_1 et dans H, c'est-à-dire dans $G \cap H$.
D'après la proposition 2.44, comme la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_q)$ est libre, on a $E_1 = G \oplus H$. Par conséquent, $G \cap H = \{0_E\}$. Donc $x = 0_E$ et $E_1 + E_2 = E_2 \oplus H$.

   Dans ces conditions,

$$\dim\,(E_1 + E_2) = \dim\,(E_2 \oplus H) = \dim\, E_2 + \dim\, H.$$

   Or comme $E_1 = G \oplus H$, on a $\dim\, E_1 = \dim\, G + \dim\, H = \dim\, E_1 \cap E_2 + \dim\, H$. Au final, on obtient

$$\dim\,(E_1 + E_2) = \dim\, E_2 + \dim\, E_1 - \dim\, E_1 \cap E_2.$$

6.

$\diamond$

2.6 Test d'auto-évaluation

2.6.1 Espaces vectoriels

Question 1. Qu'est-ce qu'un espace vectoriel ?

Question 2. Qu'est-ce qu'un sous-espace vectoriel ?

Question 3. Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $F \subset E$. Comment montre-t-on que F est un sous-espace vectoriel de E ?

Question 4. Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $F \subset E$. Donner des conditions suffisantes pour que F ne soit pas un sous-espace vectoriel de E.

-
-
-
-

2.6.2 Famille génératrice, famille libre

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel. Soit $\mathcal{E} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de E.

Question 5. Soit $A \subset E$ avec $A \neq \emptyset$. Donner deux caractérisations de Vect A.

-

-

Question 6. Que signifie "$\mathcal{E}$ est génératrice de E" ?

Question 7. Comment montre-t-on que la famille $\mathcal{E}$ est génératrice de E ?

Question 8. Qu'est-ce qu'une famille libre ?

Question 9. Comment montre-t-on qu'une famille d'un seul vecteur est libre ?

Question 10. Comment montre-t-on qu'une famille de deux vecteurs est libre ?

Question 11. Comment montre-t-on qu'une famille de trois vecteurs et plus est libre ?

Question 12. Qu'est-ce qu'une famille liée ?

Question 13. Comment montre-t-on que la famille $\mathcal{E}$ est liée ?

Question 14. Qu'est-ce qu'une base de E ?

Question 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la base canonique de $\mathbb{R}^n$ puis de $K_n[x]$.

2.6.3 Dimension d'un espace vectoriel

Question 16. Qu'est-ce qu'un espace vectoriel de dimension finie ?

Question 17. Donner deux exemples d'espace vectoriel de dimension infinie.

Question 18. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie. Qu'est-ce que la dimension de E ?

Question 19. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Donner la dimension des espaces vectoriels suivants :

$$\dim \mathbb{R}^n = \qquad , \dim \mathcal{M}_{np}(K) = \qquad , \dim K_n[x] = \qquad .$$

Question 20. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de E. Donner trois méthodes pour montrer que $\mathcal{E}$ est une base de E.

-
-
-

Question 21. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E. Que dire de la dimension de F ?

Question 22. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dimension de F pour que $E = F$.

2.6.4 Somme directe - Espaces supplémentaires

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Question 23. Que signifie "F et G sont en somme directe" ?

Question 24. Que signifie "F et G sont supplémentaires dans E" ?

Question 25. Comment montrer que "F et G sont supplémentaires dans E" ?

Question 26. Comment montrer que "F et G sont supplémentaires dans E" dans le cas où E est de dimension finie ?

Chapitre 3

Applications linéaires et matrices

3.1 Applications linéaires

Dans tout ce paragraphe, E et F désignent des espaces vectoriels sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u une application de E vers F.

3.1.1 Définitions

Définition 3.1 *On dit que u est linéaire si pour tout $(x, y) \in E \times E$ et tout $\lambda \in K$*

$$u(x + y) = u(x) + u(y) \text{ et } u(\lambda.x) = \lambda.u(x),$$

ou de manière équivalente

$$u(\lambda.x + y) = \lambda.u(x) + u(y).$$

Exemple 3.2 *L'application identité et l'application nulle sont linéaires.*

Remarque : Si u est linéaire alors $u(0_E) = 0_F$. La contraposée est très fréquemment utilisée en pratique :

Définition 3.3 *L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $L(E,F)$. Dans le cas particulier où $E = F$, les applications linéaires de E vers E sont appelées endomorphismes. Dans ce cas, $L(E,E)$ est noté $L(E)$.*

Les applications linéaires de E vers K sont appelées formes linéaires. Dans ce cas, $L(E,K)$ est noté E^*, on l'appelle espace dual de E.

Théorème 3.4 *$L(E,F)$ muni de l'addition et de la loi externe définies pour les applications est un espace vectoriel sur K.*

Démonstration

$\diamond$

Exemple 3.5

1. *Soit* $\psi : K[x] \longrightarrow K[x]$ *telle que* $(\forall \ \ P \in K[x]) \ \ (\psi(P) = P')$.

   Alors $\psi \in L(K[x])$.

2. *Soit* $u : \mathcal{C}^0([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}^1([a,b])$ *telle que*

   $$f \longmapsto g$$

   $$\forall \ f \in \mathcal{C}^0([a,b]), \forall \ x \in [a,b], \left(u(f)(x) = g(x) = \int_a^x f(t)dt \right).$$

   Alors $u \in L(\mathcal{C}^0([a,b]), \mathcal{C}^1([a,b]))$.

3. *Soient E un espace vectoriel sur K, $\alpha \in K$ et $u : E \longrightarrow E$ telle que*

$$(\forall\ x \in E)\ \ (u(x) = \alpha x).$$

Alors $u \in L(E)$.

4. *Soient $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des espaces vectoriels sur K. Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ l'application*

$$\begin{array}{rcl} p_i : E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est un élémént de $L(E, E_i)$ et s'appelle la $i^{\text{ème}}$ projection.

5. *Soit $Tr : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$ l'application qui à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ associe sa trace $Tr\ (A)$. Alors $Tr \in L(\mathcal{M}_n(K), K)$.*

6. *Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que*

$$\forall\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ u(x, y) = (x - y, 3y + 1, x + y).$$

Alors $u \notin L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

7. *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *telle que*

$$(\forall \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2) \ \ (\varphi(x, y) = (x - y, 3y, x + y)).$$

Alors $\varphi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

3.1.2 Noyau, image et application linéaire bijective

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $u \in L(E, F)$.

Définition 3.6 *On appelle noyau de u et on note Ker u, l'ensemble défini par :*

$$Ker\ u = \{x \in E \ / \ u(x) \ = \ 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\}) \subset E.$$

Ker u est l'ensemble des antécédents par u du vecteur nul de F.

On appelle image de u et on note Im u, l'ensemble défini par :

$$Im\ u = \{y \in F \ / \ \exists x \in E \ , \ y = u(x)\} = \{u(x) \ / \ x \ \in E\} = u(E) \subset F.$$

Théorème 3.7 *Soient $u \in L(E, F)$, A un sous-espace vectoriel de E et B un sous-espace vectoriel de F. Alors $u(A)$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration

$\diamond$

Corollaire 3.8 *Soit* $u \in L(E, F)$.

1. *Ker* u *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Im* u *est un sous-espace vectoriel de* F.

Démonstration

Il suffit de prendre $B = \{0_F\}$ et $A = E$ et d'appliquer le théorème précédent. $\diamond$

Théorème 3.9 *Soit* $u \in L(E, F)$.

1. u *est surjective* $\Longleftrightarrow$ *Im* $u = F$.
2. u *est injective* $\Longleftrightarrow$ *Ker* $u = \{0_E\}$.

Démonstration

$\diamond$

Exemple 3.10 *Etudier le noyau et l'image des applications* ψ *et* φ *définies en 1) et 7) de l'exemple 3.5, pages 75 et 77.*

Propriété 3.11 *Si $u \in L(E, F)$ et si u est bijective alors u^{-1} est linéaire.*

Démonstration

$\diamond$

Définition 3.12 *Les applications linéaires bijectives sont appelées des* <u>*isomorphismes*</u>*. Dans le cas où $E = F$, on les appelle des* <u>*automorphismes*</u>*. On note respectivement ces ensembles Isom(E, F) et Aut(E).*

3.1.3 Applications linéaires et dimension

Théorème 3.13 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $u \in L(E, F)$.*

1. *u injective $\Longrightarrow$ l'image d'une famille libre de E est libre dans F.*

u injective et E et F de dimension finie $\Longrightarrow$ dim $E \leq$ dim F.

2. *u surjective $\Longrightarrow$ l'image d'une partie génératrice de E est une partie génératrice de F.*

u surjective et E est de dimension finie $\Longrightarrow$ F est de dimension finie et dim $E \geq$ dim F.

3. *u bijective $\Longrightarrow$ l'image d'une base de E est une base de F.*

u bijective et E est de dimension finie $\Longrightarrow$ F est de dimension finie et dim $E =$ dim F.

Exemple 3.14 1. *L'application φ définie au 7) de l'exemple 3.5 page 77 peut-elle être bijective ?*

2. *Si dim $E =$ dim F et si $u \in L(E, F)$ alors u est-elle bijective ?*

Définition 3.15 *Si Im u est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F, on appelle rang de u l'entier naturel, noté rg u, égal à la dimension de Im u.*
On a :

$$rg\, u \;=\; dim\, Im\, u.$$

Exemple 3.16 *Calculer le rang de φ, définie au 7) de l'exemple 3.5 page 77.*

Remarque : Si E est de dimension finie, si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E et si u est une application linéaire sur E alors la famille $(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n))$ est une famille génératrice de Im u qui est donc de dimension finie.

Théorème 3.17 (Théorème du rang) *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, avec E de dimension finie et $u \in L(E, F)$. On a :*

$$dim \quad E \quad = \quad dim \; Ker \, u \quad + \quad dim \quad Im \, u.$$

Démonstration

$\diamond$

Corollaire 3.18 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, de même dimension finie égale à n, et $u \in L(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$\Updownarrow \begin{array}{ll} 1) & u \;\; \textit{est bijective} \\ 2) & u \;\; \textit{est injective} \\ 3) & u \;\; \textit{est surjective} \\ 4) & rg\, u \; = n \end{array}$$

Démonstration

$\diamond$

Remarque : Faire attention aux hypothèses !

3.1.4 Composition

Propriété 3.19 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur K. On considère $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$. Alors $v \circ u \in L(E, G)$.*

Démonstration

$\diamond$

Dans le cas particulier où $E = F = G$ on définit par récurrence l'endomorphisme u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u^0 = id_E$ et $u^n = u^{n-1} \circ u$.

Propriété 3.20 $(L(E), +, \circ)$ *est un anneau unitaire non commutatif et non intègre.*

Démonstration

D'après le théorème 3.4, $(L(E), +, .)$ est un espace vectoriel sur K donc en particulier, $(L(E), +)$ est un groupe commutatif.

La loi $\circ$ est interne (cf prop 3.19), elle est associative, elle admet un neutre (l'application identité) et elle est distributive par rapport à + puisque $\forall\ x \in E, \forall\ (u, v, w) \in (L(E))^3$,

$$\begin{aligned}(u \circ (v+w))(x) = u((v+w)(x)) &= u(v(x) + w(x)) \\ &= u(v(x)) + u(w(x)) \text{ car } u \text{ est linéaire} \\ &= (u \circ v)(x) + (u \circ w)(x)\end{aligned}$$

donc $(u \circ (v+w)) = u \circ v + u \circ w$ et $(L(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire.

Considérons les deux applications linéaires de $L(\mathbb{R}^2)$ définies pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (y, y) \text{ et } g(x, y) = (x, 0).$$

Alors, pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ on a

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(x, 0) = (0, 0)$$

et

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(y, y) = (y, 0).$$

$(L(E), +, \circ)$ n'est pas commutatif car $f \circ g \neq g \circ f$ et $(L(E), +, \circ)$ n'est pas intègre car $f \circ g$ est égale à l'application nulle alors que ni f ni g n'est égale à l'application nulle. $\diamond$

3.2 Matrices d'applications linéaires

Soient E et F des espaces vectoriels sur K de dimension finie tels que dim $E = n$ et dim $F = p$.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ une base de F.

Soit enfin $u \in L(E, F)$.

3.2.1 Définitions

Propriété 3.21 *Toute application linéaire u de $L(E, F)$ est caractérisée par la donnée des images par u des vecteurs d'une base de E.*

Démonstration

$\diamond$

Définition 3.22 *Soit $u \in L(E, F)$ telle que pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{pj} f_p.$$

On appelle matrice de u relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} = Mat\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{pn}(K).$$

Remarque : Lorsque $E = F$ et si on ne considère qu'une seule base $\mathcal{E}$ de E on notera $A = \text{Mat}\ (u, \mathcal{E})$.

Exemple 3.23

1. *Soit* $\varphi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ *telle que* $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = (x - y, 3y, x + y)$.

   Ecrire la matrice de φ *par rapport aux bases canoniques de* $\mathbb{R}^2$ *et de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Ecrire, par rapport à la base canonique de* $\mathbb{R}_2[x]$, *la matrice de* $\psi : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *telle que* $(\forall\ P \in \mathbb{R}_2[x]) \quad (\psi(P) = P')$.

3. *Ecrire, par rapport à la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*, la matrice de* $u \in L(\mathbb{R}^2)$ *telle que* $(\forall\ x \in \mathbb{R}^2)\ \ (u(x) = \alpha\ x)$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. *Ecrire la matrice de la rotation d'angle* θ *par rapport à la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

3.2.2 Opérations

Soient G un espace vectoriel sur K de dimension finie égale à m et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$ une base de G. Soient u et v deux applications linéaires de $L(E, F)$ et w dans $L(F, G)$.
On notera $A = \text{Mat }(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, $B = \text{Mat }(v, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $C = \text{Mat }(w, \mathcal{F}, \mathcal{G})$. On vérifie facilement que

1. $A + B = \text{Mat }(u + v, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

2. $\forall\lambda\ \in K,\ \lambda\ .A = \text{Mat }(\lambda\ .u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

3. $CA = \text{Mat } (w \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G})$.

<u>**Remarque**</u> : Ceci justifie *a posteriori* la définition de la somme et de la loi externe de l'espace des matrices ainsi que le produit de deux matrices.

Théorème 3.24 *Les bases de E et F étant choisies, à toute matrice A de $\mathcal{M}_{pn}(K)$ il correspond une et une seule application linéaire u de E vers F telle que $A = Mat\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.*

Démonstration

Soit

$$\begin{array}{rcl} \phi : L(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{pn}(K) \\ u & \longmapsto & A = (a_{ij}) \text{ telle que } A = \text{Mat } (u, \mathcal{E}, \mathcal{F}). \end{array}$$

Les coefficients de la matrice A sont définis par

$$\forall\, j \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{pj} f_p.$$

1. ϕ est linéaire.

2. ϕ est injective.

3. ϕ est surjective.

$\diamond$

Corollaire 3.25 *Si E et F sont de dimension finie, respectivement égale à n et p alors $L(E,F)$ est de dimension finie et dim $L(E,F) = pn$.*

Démonstration

$\diamond$

Proposition 3.26 *Soit $u \in L(E,F)$ avec dim E = dim $F = n$.*
On note $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F et $A = Mat\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_n(K)$.

$$A \quad \text{est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ est bijectif.}$$

Dans ce cas, l'inverse de A est la matrice de u^{-1} par rapport aux bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$.

$$(Mat\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F}))^{-1} = Mat\ (u^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E}).$$

Démonstration

$\diamond$

3.2.3 Ecriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Rappelons que $u \in L(E,F)$, que $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ une base F. Notons $A = (a_{ij}) = \text{Mat }(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Soient $x \in E$ et $y = u(x) \in F$. Notons $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$ et $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ les coordonnées de y dans la base $\mathcal{F}$.

Nous avons

$$y = u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j). \tag{3.1}$$

Essayons de représenter matriciellement cette relation. Nous avons déjà dit que l'on pouvait représenter un vecteur par une matrice colonne. Notons X et Y les matrices colonnes associées aux vecteurs x et y. Nous avons

$$X = \text{Mat }(x, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \text{Mat }(y, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\quad u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$ et si nous notons Y_j la matrice colonne représentant le vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}$, nous avons

$$Y_j = \text{Mat }(u(e_j), \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, l'égalité 3.1 devient

$$Y = \sum_{j=1}^{n} x_j Y_j \quad = \quad x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} Y = \sum_{j=1}^{n} x_j Y_j \quad &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kn}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX. \end{aligned}$$

Exemple 3.27 *Utiliser la matrice de l'application φ de l'exemple 3.23 pour calculer $\varphi(x, y)$ et $\varphi(5, -3)$.*

3.2.4 Changement de base

Rappelons que $u \in L(E, F)$, que $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ une base F. Notons $A = (a_{ij}) = \text{Mat } (u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. Notons $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ une nouvelle base de E, $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, \cdots, f'_p)$ une nouvelle base de F et $A' = \text{Mat } (u, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$.

Nous cherchons une éventuelle relation entre les matrices A et A'.

Matrices de passage

On s'intéresse pour commencer à ce qui se passe dans E.

Soit x un vecteur de E. Notons $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ et X la matrice colonne associée à ces coordonnées. Notons de la même manière $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ les coordonnées de x dans la nouvelle base $\mathcal{E}'$ et X' la matrice colonne associée à ces nouvelles coordonnées.
La question est de savoir quel lien existe entre les matrices X et X'.

Pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, il existe $(p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj}) \in K^n$ tel que

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i.$$

Soit id_E l'application linéaire définie de E, muni de la base $\mathcal{E}'$, vers E, muni de la base $\mathcal{E}$ telle que

$$\begin{array}{rccl}
\mathrm{id}_E : & (E,\mathcal{E}') & \longrightarrow & (E,\mathcal{E}) \\
& x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i & \longmapsto & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \\
& e'_j & \longmapsto & e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i
\end{array}$$

Soit P la matrice de cette application linéaire. Alors P s'écrit

$$P = \begin{pmatrix}
p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\
p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn}
\end{pmatrix}$$

et on obtient

$$X = PX'.$$

P s'appelle la <u>matrice de passage</u> entre l'ancienne base $\mathcal{E}$ et la nouvelle base $\mathcal{E}'$, on la note $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$. C'est la matrice de l'application id_E relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$:

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}\ (\mathrm{id}_E, \mathcal{E}', \mathcal{E}).$$

Propriété 3.28 *La matrice $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ est inversible et*

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}^{-1} = P_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}.$$

Démonstration

$\diamond$

Exemple 3.29 *Donner la matrice de passage entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^3$ où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et où*

$$e'_1 = (1,1,0), e'_2 = (0,0,1) \quad \textit{et} \quad e'_3 = (1,-1,-2).$$

Calculer son inverse.

Formule pour les matrices d'applications linéaires

Si $A = \text{Mat}\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ alors

$$A' = \text{Mat}\ (u, \mathcal{E}', \mathcal{F}') = P^{-1}_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}\ A\ P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}. \tag{3.2}$$

Démonstration

$\diamond$

Exemple 3.30

1. *Ecrire la matrice de l'application φ de l'exemple 3.5 page 77 relativement aux bases $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, définies par*

$$e'_1 = (2,1),\ e'_2 = (3,2),\ f'_1 = (1,1,0), f'_2 = (0,0,1) \quad et \quad f'_3 = (1,-1,-2).$$

2. *Soit Φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est*

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = Mat\ (\Phi, \mathcal{E}).$$

Ecrire la matrice de Φ relativement à la base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (2,1),\ e'_2 = (3,2)$.

3.2.5 Matrices semblables, matrices équivalentes

Définition 3.31 *On définit deux relations binaires sur les matrices*

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{pn}(K)^2,\ A \text{ et } B \ \text{ sont } \underline{\text{équivalentes}} \ \Leftrightarrow \ (\exists (Q,P) \in (GL_p(K) \times GL_n(K)))(B = Q^{-1}\ A\ P).$$

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(K)^2,\ A \text{ et } B \ \text{ sont } \underline{\text{semblables}} \ \Leftrightarrow \ (\exists P \in GL_n(K))(B = P^{-1}\ A\ P).$$

Proposition 3.32 *Ces deux relations sont des relations d'équivalence sur l'ensemble des matrices.*

Démonstration Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{pn}(K)^2$, notons $A\mathcal{R}B$ la relation "A et B sont équivalentes". Comme la relation "*semblable à*" est un cas particulier de "*équivalente à*", il suffit de montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. C'est le cas car $\mathcal{R}$ est :

- réflexive : $\forall A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$, $\exists (I_p, I_n)$ inversibles telles que $A = I_p^{-1} A I_n$ donc $A\mathcal{R}A$.
- transitive : soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{pn}(K)^3$ tel que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$.
  Alors $\exists (P_1,P_2) \in GL_n(K)^2$, $\exists (Q_1,Q_2) \in GL_p(K)^2$ tels que $B = Q_1^{-1}AP_1$ et $C = Q_2^{-1}BP_2$. Ainsi
  $$C = Q_2^{-1}Q_1^{-1}AP_1P_2 = (Q_1Q_2)^{-1}A(P_1P_2) \text{ avec } Q_1Q_2 \in GL_p(K) \text{ et } P_1P_2 \in GL_n(K).$$
  Donc $A\mathcal{R}C$.
- symétrique : soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{pn}(K)^2$ tel que $A\mathcal{R}B$. Alors $\exists P \in GL_n(K)$, $\exists Q \in GL_p(K)$ tels que $B = Q^{-1}AP$. Donc $A = (Q^{-1})^{-1}BP^{-1}$ avec $P^{-1} \in GL_n(K)$ et $Q^{-1} \in GL_p(K)$, d'où $B\mathcal{R}A$.

$\diamond$

Exemple 3.33 *Avec les notations précédentes,*

1. *Si $u \in L(E,F)$, $A = Mat\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $A' = Mat\ (u, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$ alors A et A' sont équivalentes.*
2. *Si $v \in L(E)$, $B = Mat\ (v, \mathcal{E})$ et $B' = Mat\ (u, \mathcal{E}')$ alors B et B' sont semblables.*

Proposition 3.34 *Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$. Si A et B sont semblables, alors $Tr\ A = Tr\ B$.*

3.2.6 Rang d'une matrice

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{pn}(K)$ dont les colonnes sont identifiées à n vecteurs $C_1, C_2, ..., C_n$ de K^p.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \text{ alors } \forall\ j \in \{1, 2, \cdots, n\}, C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.35 *On appelle* <u>*rang de la matrice*</u> *A le réel, noté rg (A), égal à la dimension de Vect $(C_1, C_2, ..., C_n)$, c'est-à-dire à la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A. On note*

$$rg\ A \quad = \quad dim \quad Vect\ (C_1, C_2, ..., C_n).$$

Propriété 3.36 *Si $A \in \mathcal{M}_{pn}(K)$ alors*

$$rg\ A \ \leq\ \min(p, n).$$

Démonstration

$\diamond$

Exemple 3.37 *Calculer le rang des matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.38 *Deux matrices équivalentes (respectivement semblables) ont le même rang. En particulier, si $u \in L(E, F)$ et si $A = Mat\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. Alors*

$$rg\ u = rg\ A$$

et cela ne dépend pas des bases choisies.

Démonstration Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{pn}(K)^2$ deux matrices équivalentes. Alors, il existe $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_p(K)$ tels que $B = Q^{-1}AP$ $(\star)$.

Soient u, g et h trois applications linéaires telles que $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, $P = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{E})$ et $Q = \mathrm{Mat}(h, \mathcal{F})$. Comme P est inversible, g est bijective et si l'on pose $\mathcal{E}' = (g(e_1), ..., g(e_n))$, $\mathcal{E}'$ est une base de E. Ainsi, P est la matrice de passage entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

De même, $Q = P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}$ avec $\mathcal{F}' = (h(f_1), ..., h(f_p))$.

Ainsi, on reconnaît dans $(\star)$ la formule de changement de base pour les applications linéaires et on peut écrire que $B = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$. Ainsi, les colonnes $A_1, \cdots A_n$ de A (respectivement les colonnes $B_1, \cdots B_n$ de B) représentent pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ les $u(e_i)$ (respectivement les $u(e_i')$).
Par suite

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\, B &= \mathrm{dimVect}(B_1, ..., B_n) = \mathrm{dimVect}(u(e_1'), ..., u(e_n')) = \dim \mathrm{Im}\, u = \mathrm{rg}\ u, \\ &= \mathrm{dimVect}(u(e_1), ..., u(e_n)) = \mathrm{dimVect}(A_1, ..., A_n) = \mathrm{rg}\, A\,, \end{aligned}$$

ce qui démontre au passage que le rang d'une application linéaire est égal au rang de la matrice de cette application linéaire dans des bases quelconques. $\diamond$

Proposition 3.39 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{pn}(K)$. Si rg $A = r$ alors A est équivalente à B où* $B = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$.

Démonstration

$\diamond$

Propriété 3.40 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{pn}(K)$, on a*

$$rg\ {}^tA = rg\ A.$$

Démonstration

$\diamond$

<u>Conséquence</u> :

Si $L_1, L_2, \cdots L_p$ sont les lignes de A, $\quad$ rg $A \quad = \quad$ dim $\;$ Vect $(L_1, L_2, ..., L_p)$.

Théorème 3.41 (Caractérisation des matrices inversibles)

$$\Updownarrow \begin{array}{ll} 1) & A \;\; \textit{est inversible.} \\ 2) & {}^tA \;\; \textit{est inversible.} \\ 3) & \exists B \in \mathcal{M}_n(K), AB = I_n. \\ 4) & \exists B' \in \mathcal{M}_n(K), B'A = I_n. \\ 5) & \textit{Les colonnes de } A \textit{ sont libres.} \\ 6) & \textit{Les lignes de } A \textit{ sont libres.} \\ 7) & rg \;\; A \;\; = n \\ 8) & rg \;\; {}^tA \;\; = n \end{array}$$

3.3 Test d'auto-évaluation

3.3.1 Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels et u une application de E vers F.

Question 1. Que signifie u est une application linéaire de E vers F ?

Question 2. Qu'est ce qu'un endomorphisme de E ?

Question 3. Comment montrer que u est linéaire ?

Question 4. Donner trois conditions suffisantes pour que u ne soit pas linéaire.

-
-
-

3.3.2 Noyau, image et rang

Soient E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E vers F.

Question 5. Donner le nom, la définition et la principale propriété de $\operatorname{Ker} u$.

Question 6. Comment déterminer le noyau d'une application linéaire ?

Question 7. Donner le nom, la définition et la principale propriété de $\operatorname{Im} u$.

Question 8. Comment déterminer l'ensemble image d'une application linéaire ?

Question 9. Caractériser les applications linéaires injectives et/ ou surjectives avec le noyau et/ou l'image de u.

Pour les deux prochaines questions, on suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

Question 10. Donner une famille génératrice de Im u.

Question 11. Donner la définition du rang de u.

3.3.3 Théorème du rang et conséquences

Question 12. Énoncer le théorème du rang (ne pas oublier les hypothèses !).

Question 13. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in L(E, F)$. On suppose que dim $E =$ dim F.

Donner trois conditions nécessaires et suffisantes pour que u soit bijective.

-

-

-

3.3.4 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in L(E, F)$.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ deux bases de E. Soient $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, \cdots, f'_p)$ deux bases de F.

Question 14. Comment écrire la matrice de u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Question 15. Soient $A = \text{Mat}\,(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, X la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ d'un vecteur x dans E et Y la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ de $u(x)$. Comment calculer matriciellement $u(x)$?

Question 16. On suppose que $\dim E = \dim F$. Comment montrer matriciellement que u est bijective ?

Question 17. Comment écrire la matrice de passage entre l'ancienne base $\mathcal{E}$ et la nouvelle base $\mathcal{E}'$?

Question 18. Comment écrire l'inverse de la matrice de passage entre l'ancienne base $\mathcal{E}$ et la nouvelle base $\mathcal{E}'$?

Question 19. Soient $A = \text{Mat}\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, $A' = \text{Mat}\ (u, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$, $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}$. Donner la relation liant ces 4 matrices.

Question 20. Donner le diagramme permettant de retrouver cette relation.

Question 21. Donner deux définitions équivalentes du rang d'une matrice et expliquer pourquoi ces deux définitions coïncident.

Question 22. Soit $A = \text{Mat}\ (u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. Donner le lien qui existe entre rg A et rg u.

Question 23. Soit $A = \text{Mat}\,(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. Comment, en examinant la matrice A, peut-on trouver rg u et des vecteurs de Ker u. Comment savoir si nous avons trouvé tous les vecteurs de Ker u.

Chapitre 4

Déterminant

4.1 Introduction

Un des buts de ce chapitre est de définir une application qui, à n vecteurs $V_1, V_2, \cdots, V_n$ de $\mathbb{R}^n$, associe le "volume orienté" du parallélépipède défini par ces vecteurs. Soit φ une telle application. Quelles propriétés peut-on exiger de φ ?

$\forall\ i \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \forall \lambda \in K,\ \forall V_1, V_2, \cdots, V_i, W_i, V_{i+1}, \cdots, V_n,\ n+1$ vecteurs de E :

1. $\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i + \lambda W_i, \cdots, V_n) = \varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_n) + \lambda\varphi(V_1, V_2, \cdots, W_i, \cdots, V_n)$.

   L'application φ est donc linéaire par rapport à chacune de ces variables.

   On dit qu'elle est $\underline{n-\text{ linéaire}}$.

2. $\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_n) = 0$ si $V_i = V_j$.

La première propriété est naturelle. Elle exprime l'additivité de deux volumes disjoints et le fait que la multiplication d'une arête par un scalaire doit multiplier le volume par ce scalaire. La deuxième nous dit simplement qu'un volume "plat" est nul.

Il découle immédiatement de ces propriétés l'égalité suivante :

$$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_j, \cdots, V_i, \cdots, V_n) = -\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_n). \tag{4.1}$$

En effet, puisque φ est n-linéaire et vérifie la propriété 2) on a, pour $i = 1$ et $j = 2$,

$$\begin{aligned}
0 = \varphi(V_1 + V_2, V_1 + V_2, V_3, ..., V_n) &= \varphi(V_1, V_1 + V_2, V_3, ..., V_n) + \varphi(V_2, V_1 + V_2, V_3, ..., V_n) \\
&= \varphi(V_1, V_1, V_3, ..., V_n) + \varphi(V_1, V_2, V_3, ..., V_n) \\
&\quad + \varphi(V_2, V_1, V_3, ..., V_n) + \varphi(V_2, V_2, V_3, ..., V_n) \\
&= \varphi(V_1, V_2, V_3, ..., V_n) + \varphi(V_2, V_1, V_3, ..., V_n).
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(V_2, V_1, V_3, ..., V_n) = -\varphi(V_1, V_2, V_3, ..., V_n)$.

Pour i et j quelconques, on procède de la même façon, en partant de

$$\varphi(V_1, \cdots, V_{i-1}, V_i + V_j, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, V_i + V_j, V_{j+1}, \cdots, V_n) = 0.$$

Une telle application est dite $n-$linéaire alternée.

4.2 Déterminant de n vecteurs

4.2.1 Cas particulier : $n = 2$

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base de E un espace vectoriel de dimension 2. Soient U et V deux vecteurs de E. Soit $\varphi(U, V)$, l'aire "orientée" du parallélogramme défini par les vecteurs U et V.

Si $\varphi(e_1, e_2) \neq 0$, on appelle **déterminant de U et V** le scalaire défini par

$$\det_{\mathcal{E}}(U, V) = \frac{\varphi(U, V)}{\varphi(e_1, e_2)}.$$

Proposition 4.1 *Soient U, V et W trois vecteurs de E.*

1. $det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2) = 1$.
2. (U, V) *libre* $\Longleftrightarrow det_{\mathcal{E}}(U, V) \neq 0$.
3. *Pour tous réels α et β,* $det_{\mathcal{E}}(\alpha U, V) = \alpha \; det_{\mathcal{E}}(U, V)$ *et* $det_{\mathcal{E}}(U, \beta V) = \beta \; det_{\mathcal{E}}(U, V)$.
4. $det_{\mathcal{E}}(U, V + W) = det_{\mathcal{E}}(U, V) + det_{\mathcal{E}}(U, W)$ *et* $det_{\mathcal{E}}(U + W, V) = det_{\mathcal{E}}(U, V) + det_{\mathcal{E}}(W, V)$.
5. $det_{\mathcal{E}}(V, U) = -det_{\mathcal{E}}(U, V)$.

Démonstration

$\diamond$

Posons $U = u_1e_1 + u_2e_2$ et $V = v_1e_1 + v_2e_2$. Montrer que $\det_{\mathcal{E}}(U,V) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$.

4.2.2 Cas particulier : $n = 3$

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E un espace vectoriel de dimension 3. Soient U, V et W trois vecteurs de E. Soit $\varphi(U,V,W)$, le volume "orienté" du parallélépipède défini par les vecteurs U, V et W (figure 4.1).

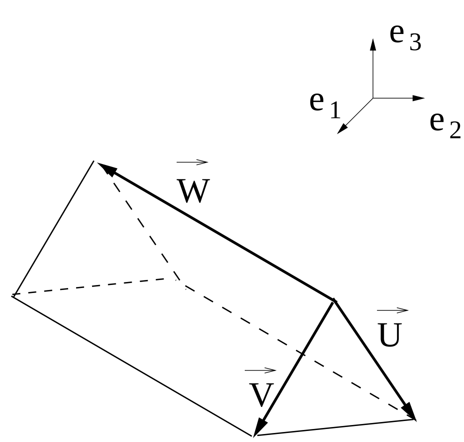


FIGURE 4.1 – volume “orienté” du parallélépipède défini par les vecteurs U, V et W.

Si $\varphi(e_1, e_2, e_3) \neq 0$, on appelle **déterminant de** U, V **et** W le scalaire défini par

$$\det_{\mathcal{E}}(U,V,W) = \frac{\varphi(U,V,W)}{\varphi(e_1,e_2,e_3)}.$$

Proposition 4.2 *Soient U, V et W trois vecteurs de E.*

1. $det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2, e_3) = 1$.
2. (U, V, W) *libre* $\Longleftrightarrow det_{\mathcal{E}}(U, V, W) \neq 0$.
3. $det_{\mathcal{E}}$ *est une forme* 3*-linéaire alternée.*
4. $det_{\mathcal{E}}(V, U, W) = -det_{\mathcal{E}}(U, V, W)$ *et* $det_{\mathcal{E}}(V, W, U) = det_{\mathcal{E}}(U, V, W)$.

Posons $U = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$, $V = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ et $W = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3$.

Montrer que $\det_{\mathcal{E}}(U, V, e_3) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$.

De même, on montre que $\begin{vmatrix} u_1 & 0 & w_1 \\ u_2 & 1 & w_2 \\ u_3 & 0 & w_3 \end{vmatrix} = u_1w_3 - u_3w_1$ et $\begin{vmatrix} 1 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = v_2w_3 - v_3w_2$.

Au final, si on pose $U = u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3$,$V = v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3$ et $W = w_1e_1+w_2e_2+w_3e_3$, montrer que $\det_{\mathcal{E}}(U, V, W) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2 - u_3v_2w_1$.

4.2.3 Cas général

Soient E, un espace vectoriel de dimension n sur le corps K et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

Théorème 4.3 *L'ensemble des formes $n-$ linéaires alternées sur E a une structure d'espace vectoriel sur K, sa dimension est égale à* 1*.*

La démonstration de ce théorème est l'objet du paragraphe suivant.

Toutes les formes $n-$ linéaires alternées sur E sont donc colinéaires et sont entièrement déterminées par leur valeur en $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Ainsi, si ϕ et ψ sont deux formes $n-$ linéaires alternées sur E telles que $\phi(e_1, e_2, \cdots, e_n) \neq 0$ et $\psi(e_1, e_2, \cdots, e_n) \neq 0$ alors il existe un scalaire λ tel que pour tout $(V_1, V_2, V_3, ..., V_n) \in E^n$,

$$\phi(V_1, V_2, \cdots, V_n) = \lambda\psi(V_1, V_2, \cdots, V_n).$$

En particulier $\phi(e_1, e_2, \cdots, e_n) = \lambda\psi(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ d'où $\lambda = \dfrac{\phi(e_1, e_2, \cdots, e_n)}{\psi(e_1, e_2, \cdots, e_n)}$.
Par suite, pour tout $(V_1, V_2, V_3, ..., V_n) \in E^n$,

$$\frac{\phi(V_1, V_2, \cdots, V_n)}{\phi(e_1, e_2, \cdots, e_n)} = \frac{\psi(V_1, V_2, \cdots, V_n)}{\psi(e_1, e_2, \cdots, e_n)}. \tag{4.2}$$

On peut alors définir le déterminant de n vecteurs en dimension n.

Définition 4.4 *Soit φ, une forme $n-$ linéaire alternée sur E telle que $\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) \neq 0$. On appelle* **déterminant** *des vecteurs $V_1, V_2, \cdots, V_n$ par rapport à la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ le scalaire*

$$det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, \cdots, V_n) = \frac{\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_n)}{\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)}.$$

Ce nombre ne dépend que de $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ et de la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ choisie dans E (et pas de l'application φ).

En d'autres termes, $det_{\mathcal{E}}$ est LA forme n-linéaire alternée telle que $det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$.

Comme dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, le déterminant caractérise les familles libres.

Théorème 4.5 *Pour tout $(V_1, V_2, ..., V_n) \in E^n$ on a*

$$(V_1, V_2, ..., V_n) \ \textit{libre} \quad \Longleftrightarrow \quad det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0.$$

Nous démontrerons dans le paragraphe suivant un résultat plus général.

Théorème 4.6 *Soit φ une forme n-linéaire alternée non nulle sur E. On a :*

$$\forall (V_1, V_2, ..., V_n) \in E^n \quad \Big[(V_1, V_2, ..., V_n) \ \textit{libre} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0 \Big].$$

Il suffit ensuite d'appliquer ce théorème à l'application $\det_{\mathcal{E}}$ (une forme n-linéaire alternée non nulle puisque $\det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$), pour obtenir le théorème 4.5.

4.3 Démonstration des théorèmes 4.3 et 4.6

4.3.1 Permutations et transpositions

Soit l'ensemble $J = \{1, 2, ..., n\}$. On considère S_n l'ensemble des bijections de J dans lui-même. Les éléments de S_n sont appelés des permutations.

$(S_n, \circ)$ est un groupe non commutatif, on l'appelle le groupe symétrique.

Une permutation σ sera notée $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & , & \cdots & , & n \\ \sigma(1) & , & \cdots & , & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque : Card(S_n) $= n!$

Définition 4.7 *Un transposition est une permutation qui échange deux éléments et laisse les autres invariants. Si τ est une transposition, il est clair que $\tau \circ \tau = id_J$. On notera τ_{ij} la transposition qui échange i et j.*

Par la suite, afin d'alléger les notations, on omettra le signe $\circ$ de la composition. Ainsi, pour toutes permutations σ, τ de S_n, la composition $\tau \circ \sigma$ sera notée $\tau\sigma$.

Théorème 4.8 *Toute permutation σ de S_n peut s'écrire sous forme produit de composition de transpositions.*

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : Lorsque $n = 1$, cela n'a pas beaucoup d'intérêt. Soit donc $n = 2$. $S_2 = \{\mathrm{id}_J, \tau_{12}\}$, τ_{12} est une transposition et $\tau_{12}\tau_{12} = \mathrm{id}_J$.

Hypothèse de Récurrence : Toute permutation de S_{n-1} s'écrit comme le produit de transpositions.

Rang n : Soit σ une permutation de S_n.

- Si $\sigma(n) = n$, alors σ est en fait une permutation de S_{n-1} donc, par hypothèse de récurrence, σ se décompose en produit de transpositions.
- Si $\sigma(n) = p \neq n$, alors on étudie $\sigma' = \tau_{pn}\sigma$. Par construction, nous avons $\sigma'(n) = n$, donc $\sigma' \in S_{n-1}$ et par hypothèse de récurrence, il existe des transpositions $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k$ telles que $\sigma' = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k$. Par suite, comme $\tau_{pn}\tau_{pn} = \mathrm{id}_J$, $\sigma = \tau_{pn}\tau_1\tau_2 \cdots \tau_k$, ce qui termine la preuve du théorème.

$\diamond$

Exemple 4.9 $\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 4, & 1, & 5, & 3, & 2 \end{pmatrix} = \tau_{12}\tau_{15}\tau_{13}\tau_{14} = \tau_{24}\tau_{25}\tau_{12}\tau_{13}\tau_{14}\tau_{15}.$

Remarque : Comme on le voit, la décomposition n'est pas unique.

4.3.2 Signature

Définition 4.10 *Soit σ une permutation de S_n. On appelle signature de σ le nombre égal à +1 ou -1 défini par*

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i \neq j} sign\left(\frac{(\sigma(i) - \sigma(j))}{(i-j)}\right),$$

où la fonction sign est définie par $sign(x) = +1$ si $x > 0$ et $sign(x) = -1$ si $x < 0$. Précisons une fois pour toutes que le produit porte sur les sous-ensembles $\{i, j\}$ avec $i \neq j$ (il y a donc C_n^2 termes).

Exemple 4.11 *Calculer la signature de la permutation σ de S_5 définie par :* $\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 4, & 1, & 5, & 3, & 2 \end{pmatrix}$.

Réponse : $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Propriété 4.12 *1.* $\forall\ (\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2,\ \varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\,\varepsilon(\sigma_2)$.

2. $\forall\ \sigma \in S_n,\ \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) &= \prod_{i \neq j} sign\left(\frac{(\sigma_1\sigma_2(i) - \sigma_1\sigma_2(j))}{i-j}\right) \\
&= \prod_{i \neq j} sign\left(\frac{(\sigma_1\sigma_2(i) - \sigma_1\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} . \frac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i-j}\right).
\end{aligned}$$

Comme $sign(xy) = sign(x)sign(y)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) &= \prod_{i \neq j} sign\left(\frac{\sigma_1\sigma_2(i) - \sigma_1\sigma_2(j)}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}\right) sign\left(\frac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i-j}\right) \\
&= \prod_{i \neq j} sign\left(\frac{\sigma_1\sigma_2(i) - \sigma_1\sigma_2(j)}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}\right) \prod_{i \neq j} sign\left(\frac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i-j}\right) \\
&= \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2).
\end{aligned}$$

En conséquence $\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(id) = +1 = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1})$. Il s'ensuit que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$. ◇

Définition 4.13 *La permutation est dite paire si sa signature vaut +1, elle est dite impaire si sa signature vaut −1.*

Proposition 4.14 *Les transpositions sont des permutations impaires.*

Démonstration

Soit τ_{ij} une transposition. On a $\tau_{ij} = \tau_{1i}\tau_{2j}\tau_{12}\tau_{2j}\tau_{1i}$. Puisque $\varepsilon(\tau_{1i})\varepsilon(\tau_{1i}) = 1$, on obtient :

$$\varepsilon(\tau_{ij}) = \varepsilon(\tau_{1i})\varepsilon(\tau_{2j})\varepsilon(\tau_{12})\varepsilon(\tau_{2j})\varepsilon(\tau_{1i}) = \varepsilon(\tau_{12}) = -1.$$

$\diamond$

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 4.15 *Dans la décomposition d'une permutation en produit de transpositions, la parité du nombre des transpositions est fixe. Si k est le nombre de transpositions, alors la signature de la permutation est $(-1)^k$.*

Démonstration

Si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. $\diamond$

4.3.3 Propriété des formes $n-$ linéaires alternées

Avec les notations du paragraphe précédent nous obtenons :

Théorème 4.16 *Soient $\sigma \in S_n$ et φ une forme $n-$ linéaire alternée. Pour tout $(V_1, V_2, ..., V_n) \in E^n$, nous avons*

$$\varphi(V_{\sigma(1)}, \cdots, V_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(V_1, \cdots, V_n).$$

Démonstration

Etape 1 : Si σ est la transposition τ_{ij}, alors (cf relation (4.1)) on a vu que

$$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_j, \cdots, V_i, \cdots, V_n) = -\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_n).$$

Ce qui s'écrit aussi $\varphi(V_{\tau_{ij}(1)}, ..., V_{\tau_{ij}(i)}, ..., V_{\tau_{ij}(j)}, ..., V_{\tau_{ij}(n)}) \ = \ \varepsilon(\tau_{ij}) \ \varphi(V_1, ..., V_i, ..., V_j, ..., V_n)$.

Etape 2 : $\sigma \ \in \ S_n$. Ainsi σ peut se décomposer en produit de transpositions :

$$\sigma \ = \ \tau_1\tau_2...\tau_r.$$

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)}, ..., V_{\sigma(n)}) &= \varphi(V_{\tau_1\tau_2...\tau_r(1)}, V_{\tau_1\tau_2...\tau_r(2)}, ..., V_{\tau_1\tau_2...\tau_r(n)}) \\
&= \varphi(V_{\tau_1(\tau_2...\tau_r(1))}, V_{\tau_1(\tau_2...\tau_r(2))}, ..., V_{\tau_1(\tau_2...\tau_r(n))}) \\
&= \varepsilon(\tau_1)\ \varphi(V_{\tau_2(\tau_3...\tau_r(1))}, V_{\tau_2(\tau_3...\tau_r(2))}, ..., V_{\tau_2(\tau_3...\tau_r(n))}) \\
&= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\ \varphi(V_{\tau_3(\tau_4...\tau_r(1))}, V_{\tau_3(\tau_4...\tau_r(2))}, ..., V_{\tau_3(\tau_4...\tau_r(n))}) \\
&\vdots \\
&= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\cdots\varepsilon(\tau_r)\ \varphi(V_1, V_2, ..., V_n) \\
&= (-1)^r\ \varphi(V_1, V_2, ..., V_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\ \varphi(V_1, V_2, ..., V_n).
\end{aligned}$$

$\diamond$

4.3.4 Démonstration du théorème 4.3

Notons $\Lambda_n(E)$, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E. Il s'agit donc de montrer que $\Lambda_n(E)$ est un espace vectoriel sur K et que sa dimension est égale à 1.

1. C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E^n dans K :
   - Il est non vide puisqu'il contient l'application nulle de E^n dans K.
   - On vérifie facilement la stabilité pour l'addition et la loi externe des applications.
2. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Soient $V_1, V_2, ..., V_n$ n vecteurs de E.

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ on note } V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ e_i.$$

Si $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$, on note $A^{\mathcal{V}}$ la matrice formée par les coefficients a_{ij} définis ci-dessus.

On a

$$A^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{ii} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Soit φ une forme n-linéaire alternée quelconque sur E.

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi(V_1, V_2, ..., V_n) &= \varphi(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\ e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\ e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i3}\ e_i..., \sum_{i=1}^{n} a_{in}\ e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\ \varphi(e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{j2}\ e_j, \sum_{i=1}^{n} a_{i3}\ e_i..., \sum_{i=1}^{n} a_{in}\ e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i1}\ a_{j2}\varphi(e_i, e_j, \sum_{i=1}^{n} a_{i3}\ e_i..., \sum_{i=1}^{n} a_{in}\ e_i) \\
\varphi \ \text{ alternée } \Rightarrow &= \sum_{1\leq i\neq j\leq n} a_{i1}\ a_{j2}\varphi(e_i, e_j, \sum_{i=1}^{n} a_{i3}\ e_i..., \sum_{i=1}^{n} a_{in}\ e_i) \\
&\vdots \\
&= \sum_{\substack{1\leq i_1, i_2, ..., i_n\leq n \\ les\ i_j\ tous\ distincts}} a_{i_1 1}a_{i_2 2}...a_{i_n n}\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_n}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}\varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}\varepsilon(\sigma)\varphi(e_1, e_2, ..., e_n) \\
&= \varphi(e_1, e_2, ..., e_n) \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}.
\end{aligned}$$

On note

$$\Delta(V_1, V_2, ..., V_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}. \tag{4.3}$$

Montrons que Δ est une forme n-linéaire alternée non nulle sur E.

– L'application Δ n'est pas nulle :

Si $\mathcal{V} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ alors $A^{\mathcal{V}} = I_n$ et $\Delta(e_1, e_2, ..., e_n) \ = \ 1.$

Conséquence : La famille composée de l'application Δ, notée (Δ), est une famille libre.

– L'application Δ est n-linéaire :

$\forall (V_1, V_2, ..., V_{i-1}, V_{i+1}, ..., V_n) \in E^{n-1}$, posons :

$$\forall V \in E,\ \varphi_i(V) = \Delta(V_1, V_2, ..., V_{i-1}, V, V_{i+1}, ..., V_n).$$

Alors $\forall \lambda \in K,\ \forall (V_i', V_i'') \in E^2$,

$$\begin{aligned}
\varphi_i(V_i' + \lambda V_i'') &= \Delta(V_1, V_2, ..., V_{i-1}, V_i' + \lambda V_i'', V_{i+1}, ..., V_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(i-1)i-1} (a'_{\sigma(i)i} + \lambda a''_{\sigma(i)i}) a_{\sigma(i+1)i+1} ... a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(i-1)i-1} a'_{\sigma(i)i} a_{\sigma(i+1)i+1} ... a_{\sigma(n)n} \\
&\quad + \lambda \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(i-1)i-1} a''_{\sigma(i)i} a_{\sigma(i+1)i+1} ... a_{\sigma(n)n} \\
&= \Delta(V_1, V_2, ..., V_{i-1}, V_i', V_{i+1}, ..., V_n) \ + \ \lambda \Delta(V_1, V_2, ..., V_{i-1}, V_i'', V_{i+1}, ..., V_n) \\
&= \varphi_i(V_i') + \lambda \varphi_i(V_i'').
\end{aligned}$$

– L'application Δ est alternée.

Montrons pour commencer que $\Delta(V_1, V_1, V_3, ..., V_n) \ = \ 0.$

$$\begin{aligned}
\Delta(V_1, V_1, V_3, ..., V_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)1} a_{\sigma(3)3} ... a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma\tau_{12})\ a_{\sigma\tau_{12}(1)1} a_{\sigma\tau_{12}(2)1} a_{\sigma\tau_{12}(3)3} ... a_{\sigma\tau_{12}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau_{12})\ a_{\sigma\tau_{12}(1)1} a_{\sigma\tau_{12}(2)1} a_{\sigma\tau_{12}(3)3} ... a_{\sigma\tau_{12}(n)n} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(2)1} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(3)3} ... a_{\sigma(n)n} \\
&= -\Delta(V_1, V_1, V_3, ..., V_n).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\Delta(V_1, V_1, V_3, ..., V_n) = 0.$$

<u>Cas général</u> :

$$\begin{aligned}
&\Delta(V_1, \cdots, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, V_i, V_{j+1}, \cdots, V_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma\tau_{ij})\ a_{\sigma\tau_{ij}(1)1} a_{\sigma\tau_{ij}(2)2} \cdots a_{\sigma\tau_{ij}(i)i} \cdots a_{\sigma\tau_{ij}(j)i} ... a_{\sigma\tau_{ij}(n)n}
\end{aligned}$$

et on termine comme dans le cas particulier. Ainsi,

$$\Delta(V_1, \cdots, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, V_i, V_{j+1}, \cdots, V_n) = 0,$$

et Δ est alternée.

Par suite, pour tout $(V_1, V_2, V_3, ..., V_n)$ dans E^n,

$$\varphi(V_1, V_2, V_3, ..., V_n) = \varphi(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)\Delta(V_1, V_2, V_3, ..., V_n). \tag{4.4}$$

Ainsi la famille (Δ) est génératrice de l'ensemble des formes $n-$linéaire alternée sur E, c'est donc une base et l'espace est de dimension 1. Ceci établit le théorème 4.3 et justifie la définition du déterminant de n vecteurs en dimension n. En particulier, à partir des égalités (4.3) et (4.4) et de la défnition 4.4, on obtient la formule suivante.

Proposition 4.17 *Soient les vecteurs* $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ *de* E*, dont les coordonnées dans la base* $\mathcal{E}$ *sont pour tout* $j \in \{1, 2, ..., n\}, V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ e_i$*. On a alors*

$$\begin{aligned} det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, \cdots, V_n) &= \frac{\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_n)}{\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)} \\ &= \Delta(V_1, V_2, V_3, ..., V_n)(\ d'après \quad (4.4)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n} \quad (\ d'après\ (4.3)). \end{aligned}$$

4.3.5 Démonstration du théorème 4.6

Il faut donc démontrer que si φ est une forme n-linéaire alternée non nulle sur E alors

$$\forall (V_1, V_2, ..., V_n) \in E^n \quad \left[(V_1, V_2, ..., V_n)\ \ libre \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0 \right].$$

Démontrons la contraposée de l'implication $\Leftarrow$

Si la famille $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est liée alors l'un au moins des V_i est combinaison linéaire des autres V_j.

Supposons par exemple que $V_n = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + ... + \lambda_{n-1} V_{n-1}$, les $\lambda_i \in K$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(V_1, V_2, ..., V_n) &= \varphi(V_1, V_2, ..., V_{n-1}, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + ... + \lambda_{n-1} V_{n-1}) \\ &= \lambda_1 \varphi(V_1, ..., V_{n-1}, V_1) + \lambda_2 \varphi(V_1, ..., V_{n-1}, V_2) + ... + \lambda_{n-1} \varphi(V_1, ..., V_{n-1}, V_{n-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Démontrons l'implication $\Rightarrow$

Si la famille $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est libre dans E de dimension n, elle forme une base de E.

On sait que : $det_{(V_i)}\ (V_1, V_2, ..., V_n) = 1$, donc $det_{(V_i)}$ n'est pas nulle.

Soit φ une forme n-linéaire alternée non nulle sur E.

Les deux applications $\det_{(V_i)}$ et φ sont colinéaires et $\exists k \in K^*,\ \varphi \ = \ k\ det_{(V_i)}$.

Ainsi, $\varphi(V_1, V_2, ..., V_n) \ = \ k \det_{(V_i)} (V_1, V_2, ..., V_n) \ = \ k \neq 0$.

4.4 Déterminant d'une matrice carrée

Dans tout ce paragraphe, on note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E.

4.4.1 Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On note a_{ij} les coefficients de A et $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes de A.

Définition 4.18 *On appelle <u>déterminant</u> de la matrice A le réel défini par :*

$$detA = det_{\mathcal{E}}\ (C_1, C_2, ..., C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n},$$

la dernière expression découlant de la proposition 4.17.

<u>Notation</u> :

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.19 *Calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n pour $n = 2$ puis $n = 3$. (cf les cas particuliers en introduction de ce chapitre).*

4.4.2 Propriétés

Proposition 4.20 *Par définition, en notant I_n la matrice identité d'ordre n, on a det $I_n = 1$.*

Proposition 4.21 *L'application det est une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A.*

En conséquence :

1. *Echanger 2 colonnes de la matrice A change le signe du déterminant.*
2. *Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ne modifie pas le déterminant.*
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad det(\lambda A) = \lambda^n \, detA.$

Démonstration

Ces propriétés découlent immédiatement du fait que le déterminant est une forme multilinéaire alternée. ◇

Théorème 4.22 *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(K), \quad det\,{}^tA = detA.$

Démonstration

Soit $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,2,...,n\}}$ une matrice de $M_n(K)$.

Notons ${}^tA = (a'_{ij})_{i,j\in\{1,2,...,n\}}$ avec $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2 \;\; a'_{ij} = a_{ji}$. On a :

$$\det\, A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\; a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}$$

et

$$\begin{aligned}
\det{}^t A &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a'_{\sigma(1)1}a'_{\sigma(2)2}...a'_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}...a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\ a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}...a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n} \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

$\diamond$

Corollaire 4.23 *Le déterminant de A est une forme n-linéaire par rapport aux lignes de A.*

En conséquence :

1. *Echanger 2 lignes de la matrice A change le signe du déterminant.*
2. *Ajouter à une ligne une combinaison linéaire <u>des autres</u> lignes ne modifie pas le déterminant.*

Exemple 4.24 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* $detA$.

On a, en ajoutant la ligne 3 à la ligne 2,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ puisque deux lignes sont égales.}$$

Théorème 4.25

$$\forall (A,B) \in M_n(K)^2,\ detBA = detAB = detA \times detB.$$

Démonstration

Notons $A = (\, A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n \,)$, où A_j correspond à la j$^{\text{ème}}$ colonne de A. On a alors

$$BA = (\, BA_1 \qquad BA_2 \qquad \ldots \qquad BA_n \,)\,.$$

Soit φ_B l'application suivante :

$$\begin{array}{rccccc} \varphi_B : & M_n(K) & \longrightarrow & K & & \\ & A & \longmapsto & \varphi_B(A) & = & \det BA. \end{array}$$

On vérifie que φ_B est n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A.

On sait que $\exists ! \lambda \in K,$ tel que $\varphi_B \quad = \quad \lambda \det$.

Or on a les égalités suivantes :

$$\varphi_B(I_n) = \det(BI_n) = \det B = \det B \; \det I_n.$$

Ainsi on en déduit que $\lambda = \det B$. On a donc

$$\det BA \quad = \quad \det B \; \det A \quad = \quad \det A \; \det B \quad = \quad \det AB.$$

$\diamond$

<u>ATTENTION</u> : En général, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

Théorème 4.26 *Soit A une matrice de $M_n(K)$.*

$$A \ \ inversible \iff detA \neq 0.$$

De plus, si A est inversible, $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$.

Démonstration

- Si A est inversible alors il existe A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$. Donc
  $1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$.

  Par suite $\det A \neq 0$ et $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
- Si $\det A \neq 0$ alors d'après le corollaire 4.5, les colonnes de A forment une famille libre et A est inversible (cf chapitre 3).

◇

Corollaire 4.27 *Deux matrices semblables ont le même déterminant.*

Démonstration

Si A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Donc $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A$ puisque $\det(P^{-1}) \det P = 1$.

◇

Conséquences : Soit $u \in L(E)$. On note $A = \text{Mat } (u, \mathcal{E})$.

1. On peut définir le déterminant d'une application linéaire par $\det u = \det A$ et cette définition ne dépend pas de la base de $\mathcal{E}$ choisie.
2. u bijective $\iff \det u \neq 0$.

4.4.3 Calcul pratique

Lemme 4.28

Soit A une matrice dont la dernière colonne ne contient que des 0 et un 1 sur la dernière ligne. Alors

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n-11} & a_{n-12} & ... & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn-1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-11} & a_{n-12} & ... & a_{n-1n-1} \end{vmatrix} = detD_{nn},$$

où D_{nn} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne n et la colonne n.

Démonstration

Par définition,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n-1)n-1} a_{\sigma(n)n}.$$

Etudions le coefficient $a_{\sigma(n)n}$.

– Si $\sigma(n) \neq n$ alors $a_{\sigma(n)n} = 0$

– Si $\sigma(n) = n$ alors $a_{\sigma(n)n} = 1$

et dans ces conditions,

$$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n-1)n-1}.$$

Soit σ' la restriction de σ à $\{1, 2, ..., n-1\}$. Ayant $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')$, on obtient :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma')\ a_{\sigma'(1)1} a_{\sigma'(2)2} ... a_{\sigma'(n-1)n-1} \\ &= \det D_{nn}. \end{aligned}$$

où σ' est la restriction de σ à $\{1, 2, ..., n-1\}$. $\diamond$

Lemme 4.29

Soit A une matrice dont la colonne j ne contient que des 0 et un 1 sur la ligne i. Alors

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{detA} = (-1)^{i+j} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{detD_{ij}},$$

où D_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Démonstration

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n-j)+(n-i)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} & 0 \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} & 1 \end{vmatrix}$$

Chaque inversion de lignes ou colonnes change le signe du déterminant et on fait $(n-j)+(n-i)$ inversions au total. De plus, $(n-j)+(n-i) = 2n-(i+j)$ donc $(n-j)+(n-i)$ et $i+j$ ont la même parité. Le lemme 4.28 permet ensuite de conclure :

$$\det A = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det D_{ij}.$$

$\diamond$

Proposition 4.30 (Développement suivant une colonne)

Soit $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,2,\dots,n\}} \in M_n(K)$, on a

$$detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij},$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice A à laquelle on a enlevé la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Démonstration

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On considère la j$^{\text{ème}}$ colonne de A

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que l'application det est linéaire par rapport aux colonnes de A. On a donc :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2j-1} & 0 & a_{2j+1} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i-11} & ... & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & ... & a_{i-1n} \\ a_{i1} & ... & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & ... & a_{in} \\ a_{i+11} & ... & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & ... & a_{i+1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

◇

Proposition 4.31 (Développement suivant une ligne)

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2,\ldots,n\}} \in M_n(K)$. En développant suivant la ligne i, on obtient :

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij}.$$

Démonstration Cela découle du théorème 4.22 puisque $\det {}^t A = \det A$. ◇

Théorème 4.32 (Déterminant des matrices triangulaires supérieures)

Soit A une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(K)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{ii} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors $detA = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Démonstration

Il suffit de développer successivement par rapport aux colonnes de A. ◇

Corollaire 4.33 (Cas des matrices diagonales)
Soit $A = Diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $detA = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Exemple 4.34 *Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$. Calculer $detA$ et préciser à quelles conditions sur λ, la matrice A est-elle inversible ?*

En retranchant la colonne 2 à la colonne 1 et en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 2 \\ 1-\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la ligne 1 à la ligne 2 et en développant par rapport à la première colonne on obtient

$$\det A = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)[\lambda(\lambda+1)-2] = (\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

D'autre part,

$$A \text{ inversible } \iff \det A \neq 0 \iff (\lambda-1)^2(\lambda+2) \neq 0 \iff \lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq -2.$$

4.5 Applications

1. Orientation d'un espace vectoriel.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E, espace vectoriel de dimension finie sur K.

Définition 4.35 *$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ont même orientation si $detP_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} > 0$, où $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$.*

Remarques :

- $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ est inversible donc $\det P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} \neq 0$.
- Sur l'ensemble des bases de E on définit une relation binaire "a même orientation que".

  Cette relation binaire est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.

  Il y a deux classes d'équivalence. Orienter E c'est choisir l'une de ces deux classes et de qualifier ses bases de directes. Les bases de l'autre classe sont qualifiées d'inverses ou d'indirectes.

2. Calcul de l'inverse d'une matrice.

Définition 4.36 *Soit A une matrice de $M_n(K)$. On appelle comatrice de A ou matrice des cofacteurs de A, la matrice de $M_n(K)$, notée Com A, définie par :*

$$Com\ A \quad = \quad ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n},$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice A à laquelle on a enlevé la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. La matrice ${}^tCom\ A$ est appelée la matrice complémentaire de A.

Théorème 4.37 $\forall A \in M_n(K) \quad ({}^tCom\ A).\ A \quad = \quad A\ ({}^tCom\ A) \quad = \quad detA \ \ I_n.$
Si A est inversible, on a

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{detA}\,{}^tCom\ A.$$

Démonstration

Notons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, Com $A \ = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et ^{t}Com $A \ = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

On sait que : $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2,\ b_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$. D'où $c_{ij} = b_{ji} = (-1)^{i+j}\Delta_{ji}$.

Notons $({}^t\text{Com } A)\, A = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

On a : $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2, d_{ij} \ = \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj} \ = \ \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+i}\Delta_{ki}$.
Pour $i = j$, on a $d_{jj} \ = \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\Delta_{kj}$.

On reconnaît le développement du déterminant de A par rapport à la $\text{j}^{\text{ème}}$ colonne de la matrice. Donc $\forall j \in \{1,2,...,n\}, d_{jj} \ = \ \det A$.

Pour $i \neq j$, on a $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{kj} \Delta_{ki}$.

On constate que :

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & a_{1j} & a_{1i+1} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1i-1} & a_{i-1j} & a_{i-1i+1} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ii-1} & a_{ij} & a_{ii+1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1i-1} & a_{i+1j} & a_{i+1i+1} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & a_{nj} & a_{ni+1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En effet l'expression de d_{ij} correspond au développement de ce déterminant par rapport à la i$^{\text{ème}}$ colonne, or la i$^{\text{ème}}$ colonne et la j$^{\text{ème}}$ colonne sont égales.

Ainsi $d_{ij} = 0$, d'où le résultat.

L'expression de A^{-1} est immédiate. $\diamond$

Exemple 4.38 *Calculer l'inverse de B où* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculons $\det B$. En développant par rapport à la deuxième colonne on obtient

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1-1) = 2.$$

Notons b_{ij} les coefficients de la comatrice de B. Alors

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad b_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad b_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

En calculant de la même manière $b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{31}, b_{32}$ et b_{33} on obtient alors

$$ComB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \ {}^{t}ComB = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Résolution de systèmes

Voir le chapitre suivant sur les systèmes de Cramer.

4.6 Test d'auto-évaluation

Question 1. Soient un entier n et E un espace vectoriel de dimension n.

Qu'est-ce que le déterminant de n vecteurs de E ?

Question 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Donner deux définitions de $\det A$, en expliquant pourquoi elles coïncident.

Question 3. Que peut-on faire à une colonne (respectivement une ligne) de A sans changer $\det A$?

Question 4. Soient un entier n et des réels $a, b, c, d, e, f, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 0 & e \\ c & 0 & f \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

Question 5. Quel lien existe-t-il entre une matrice inversible et son déterminant ?

Question 6. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2+\alpha & 1 \\ 1 & 1+3\alpha & 3 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sans calculer $\det A$, exprimer $\det B$, $\det C$ et $\det D_\alpha$ en fonction de $\det A$.

Chapitre 5

Systèmes d'équations linéaires

Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Description du problème

Soit à résoudre le système d'équations linéaires de p équations et n inconnues suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & ... & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & ... & + & a_{pn}x_n & = & b_p. \end{array} \right.$$

Les a_{ij} ainsi que les b_i sont des données. Ce sont des éléments de K. Les x_i sont les n inconnues éléments de K. Les b_i forment le second membre du système.

Résoudre ce système, c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ qui satisfont aux p équations.

Définition 5.1 *Dans le cas particulier où pour tout $i, b_i = 0$ on dit que le système est homogène.*

5.1.1 Ecriture matricielle

On peut écrire ce système de la façon suivante :

$$AX = B, \tag{5.1}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

5.1.2 Ecriture vectorielle

Si on note $C_1, C_2, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice A, alors le système s'écrit :

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots x_nC_n = B. \tag{5.2}$$

5.1.3 Ecriture fonctionnelle

Si la matrice A représente l'application linéaire u de $L(E, F)$ et si X et B sont les matrices colonnes représentant les vecteurs x et b dans une base de E et de F respectivement, alors le système s'écrit aussi

$$u(x) = b. \tag{5.3}$$

5.2 Réflexions sur les solutions

Que peut-on dire sur l'existence et l'unicité des solutions de ce système ?

1. Un système homogène admet toujours $(0, 0, \cdots, 0)$ comme solution.
2. (S) admet des solutions si et seulement si $B \in$ Vect $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$, c'est-à-dire si et seulement si $B \in$ Im (u).
3. Si (S) admet une solution $s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$, alors :

$$\begin{aligned} x = (x_1, \cdots, x_n) \text{ solution} &\iff (x_1 - s_1)C_1 + \cdots + (x_n - s_n)C_n = 0 \qquad (5.4) \\ &\iff x = s + \lambda \end{aligned}$$

   où λ est tel que $\lambda_1C_1 + \cdots + \lambda_nC_n = 0_F$, (c'est-à-dire $\lambda \in$ Ker (u)).

4. Supposons que (S) admette au moins une solution. Alors d'après l'équation (5.4), cette solution est unique si et seulement si $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ est libre.

   Conséquence : Si $n > p$ (plus d'inconnues que d'équations), $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ n'est jamais libre. Il n'y a donc jamais unicité.

5.3 Système de Cramer

On se place désormais dans le cas particulier où $p = n$.

Théorème 5.2 *(S) admet une solution unique $\Longleftrightarrow$ A est inversible.*
Le système (S) est alors dit de Cramer.

Démonstration

Soit X_0 la solution unique qui vérifie $AX_0 = B$. Le système $AX = 0$ n'a alors qu'une solution : $X = 0$ donc Ker $(A) = \{0\} \Longrightarrow A$ est inversible.

Réciproquement si A est inversible :

$(AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B)$ il y a donc unicité. $\diamond$

Nous allons présenter un procédé de résolution utilisant le calcul des déterminants.

Théorème 5.3 *Soit (S) un système de Cramer. Notons $C_1, C_2, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice A. Rappelons que si on interprète les colonnes de A comme des vecteurs exprimés dans une base $\mathcal{E}$, $det\ A = det_{\mathcal{E}}\ (C_1, C_2, ..., C_n)$.*

L'unique solution $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de (S) est donnée par les égalités suivantes :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \qquad x_i = \frac{det_{\mathcal{E}}\ (C_1, C_2, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n)}{det\ A}.$$

Démonstration

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est solution alors on peut écrire le système (S) sous forme vectorielle :

$$x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_nC_n = B.$$

On a alors l'égalité suivante :

$$\det_{\mathcal{E}}\ (C_1, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n) = \det_{\mathcal{E}}\ (C_1, ..., C_{i-1}, x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_nC_n, C_{i+1}, ..., C_n).$$

En utilisant la linéarité par rapport à la variable numéro i, on obtient :

$$\det_{\mathcal{E}}\ (C_1, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det_{\mathcal{E}}\ (C_1, C_2, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_n).$$

Puisqu'un déterminant est nul dès que deux colonnes sont égales, on a :

$$\begin{array}{rcl} \det_{\mathcal{E}}\ (C_1, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n) & = & x_i \det_{\mathcal{E}}\ (C_1, C_2, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_n) \\ & = & x_i \det A. \end{array}$$

D'où

$$x_i \quad = \quad \frac{\det_{\mathcal{E}}\ (C_1, C_2, ..., C_{i-1}, B, C_{i+1}, ..., C_n)}{\det A} \text{ car } \det A \neq 0.$$

$\diamond$

Exemple 5.4 *On se propose de résoudre par la méthode de Cramer le système à trois équations, trois inconnues :*

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 5y + 2z & = & 7 \\ x + 2y - 4z & = & 3 \\ 3x - 4y - 6z & = & 5 \end{array} \right.$$

La matrice associée à ce système est $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$. Son déterminant est égal à

$$\begin{array}{rcl} \det A & = & \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 10 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -10 & 6 \end{vmatrix} \\ & & \text{en remplaçant } L_1 \text{ par } L_1 - 2L_2 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 - 3L_2 \\ & = & (-1)^{2+1} \times 1 \begin{vmatrix} -9 & 10 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} \\ & & \text{en développant par rapport à la 1ère colonne} \\ & = & -(-54 + 100) = -46 \neq 0. \end{array}$$

Le déterminant de A n'est pas nul, donc d'après les théorèmes 5.2 et 5.3, le système admet une unique solution (x, y, z) telle que :

$$x = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} \quad y = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} \text{ et } z = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Calculons x :

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46}\times 2\begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en factorisant la dernière colonne par 2} \\
&= -\frac{1}{23}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 17 & -8 & -2 \\ 26 & -19 & -3 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en remplaçant } C_1 \text{ par } C_1 - 7C_3 \text{ et } C_2 \text{ par } C_2 + 5C_3 \\
&= -\frac{1}{23}(-1)^{1+3}\times 1\begin{vmatrix} 17 & -8 \\ 26 & -19 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en développant par rapport à la 1ère ligne} \\
&= -\frac{1}{23}(17\times(-19) + 8\times 26) = 5.
\end{aligned}$$

Calculons y :

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46}\times 2\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en factorisant la dernière colonne par 2} \\
&= -\frac{1}{23}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 13 & 0 \\ 9 & 26 & 0 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 + 2L_1 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 + 3L_1 \\
&= -\frac{1}{23}(-1)^{1+3}\times 1\begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 9 & 26 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en développant par rapport à la dernière colonne} \\
&= -\frac{1}{23}(4\times 26 - 9\times 13) = 1.
\end{aligned}$$

Calculons z :

$$\begin{aligned}
z &= -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 0 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -4 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en remplaçant } L_1 \text{ par } L_1 - 2L_2 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 - 3L_2 \\
&= -\frac{1}{46}(-1)^{2+1}\times 1\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en développant par rapport à la 1ère colonne} \\
&= \frac{1}{46}(-9\times(-4) + 10\times 1) = 1.
\end{aligned}$$

5.4 Test d'auto-évaluation

On considère, avec les notations du cours, le système (S) défini par la matrice A :

$$(S) \Longleftrightarrow AX = B \Longleftrightarrow u(x) = b.$$

Question 1. À quelle condition sur b le système (S) admet-il une solution ?

Question 2. Si (S) admet une solution, à quelle condition sur u la solution est-elle unique ?

Question 3. Dans le cas où (S) admet une infinité de solutions, déterminer l'ensemble solution de (S).

Question 4. On suppose $n = p$. À quelle condition sur A, (S) est-il un système de Cramer ?

Question 5. Soit (S) un système de Cramer et $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ l'unique solution de (S). Donner l'expression de x_i.

[12pt]report

amsfonts,amssymb [dvips]graphicx [T1]fontenc [french]babel float

Table des matières

Chapitre 6

Réduction des endomorphismes

Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Introduction

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie n. On note $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $u \in L(E)$. Réduire un endomorphisme, c'est chercher une base de E dans laquelle la matrice sera la plus "simple" possible, le mieux que l'on puisse espérer est que la matrice soit diagonale. Nous verrons que c'est "souvent" le cas.

Définition 6.1 *Un endomorphisme de E est diagonalisable si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Supposons qu'une telle base existe, notons-la $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_n)$. Alors

$$\text{Mat } (u, \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Calculer pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\;u(v_i)$.

Les λ_i sont appelés des valeurs propres, les v_i des vecteurs propres.

Ce chapitre ne donnera qu'une réponse partielle au problème, à savoir une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation. Les autres cas seront étudiés en deuxième année.

6.2 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 6.2 *On appelle valeur propre de u un scalaire λ de K tel qu'il existe un vecteur v de E non nul tel que $u(v) = \lambda v$.*
Le vecteur v est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u. On note cet ensemble Spec (u).

Remarque : Cette définition reste valable même lorsque E est de dimension infinie.

Exemple 6.3

1. *Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application linéaire u définie pour tout $f \in E$ par $u(f) = f'$.*

2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.*

Proposition 6.4 *Soit $\lambda \in K$. On note $E_\lambda = \{v \in E, u(v) = \lambda v\} = Ker\ (u - \lambda id_E)$.*

E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

Si $\lambda \in Spec\ (u)$, alors $E_\lambda \neq \{0_E\}$ et dans ce cas, on l'appelle le sous-espace propre de E associé à λ.

Si $\lambda \notin Spec\ (u)$, alors $E_\lambda = \{0_E\}$.

Démonstration

$\diamond$

Exemple 6.5 *Déterminer les espaces propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est définie dans l'exemple 6.3.*

Proposition 6.6

Soient $u \in L(E)$ et $\lambda \in Spec\ (u)$. Alors E_λ est stable par u (c'est-à-dire $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$).

On peut donc définir u_λ, la restriction de u à E_λ, dont la matrice dans une base quelconque de E_λ est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Démonstration

◇

Théorème 6.7 *Soit $u \in L(E)$ avec Spec $(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$.*

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } u \\ &\Longleftrightarrow \quad E = E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus E_{\lambda_p}. \end{aligned}$$

Démonstration

$\diamond$

Théorème 6.8 *Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de u.*

On a alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$, soit $E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2}$.

Démonstration

$\diamond$

Théorème 6.9 *Soit p valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, distinctes deux à deux.*

On a alors $E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus E_{\lambda_p}$.

Démonstration

$\diamond$

Conséquences immédiates :

1. u possède au maximum n valeurs propres.
2. Si u possède n valeurs propres distinctes avec $n = \dim E$, alors u est diagonalisable.

6.3 Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres

Théorème 6.10 $\lambda \in Spec\ (u) \Longleftrightarrow det(u - \lambda id_E) = 0.$

Démonstration

$\diamond$

Exemple 6.11 *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est* $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème-Définition 6.12 (Polynôme caractéristique)

Soit $u \in L(E)$. Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2} = Mat\,(u, \mathcal{E})$. On définit la fonction $P_u(x)$ par

$$P_u(x) = det(u - x id_E) = det(A - xI_n).$$

Cette fonction est une fonction polynomiale de degré n (où $\dim E = n$), qui s'écrit :

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr\,(A) x^{n-1} + \cdots + \ det(A) \quad \text{où} \quad Tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Elle s'appelle le polynôme caractéristique de A.

Démonstration

$$B = A - xI = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix} = (b_{ij})_{(i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2}.$$

On a : $\forall\ (i,j) \in \{1, 2, \cdots, n\}^2, b_{ii} = a_{ii} - x$ et $b_{ij} = a_{ij}$.

$$\begin{aligned} det\ B &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} ... b_{\sigma(n)n} \\ &= b_{11} b_{22} \cdots b_{nn} + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \varepsilon(\sigma)\ b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} ... b_{\sigma(n)n} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - x) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \varepsilon(\sigma)\ b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} ... b_{\sigma(n)n}}_{S}. \end{aligned}$$

Dans la somme S, comme $\sigma \neq \mathrm{id}$, il existe $i \neq j$ tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$ et pour un tel σ,

$$b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} ... b_{\sigma(n)n} \in K_{n-2}[x].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P_A(x) = det\ B &= \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - x) + Q_{n-2}(x) \text{ où } Q_{n-2} \in K_{n-2}[x] \\ &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + R_{n-2}(x) \\ &\qquad \text{où } R_{n-2} \in K_{n-2}[x]. \end{aligned}$$

Le terme constant de P_A est donné par

$$P_A(0) = det(A - 0I_n) = det A.$$

Par suite

$$P_A(x) \quad = \quad (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\text{Tr } (A)x^{n-1} + \cdots + \ \det(A).$$

$\diamond$

Exemple 6.13

Calculer P_B *où* $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 6.14 *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.*

Par conséquent, si $u \in L(E)$*, on définit le polynôme caractéristique de* u *par* $P_u = P_A$*, où* A *est la matrice de* u *dans une base quelconque de* E*.*

Démonstration

En effet si $A' = P^{-1}AP$ alors :

$$\det(A' - xI_n) = \det(P^{-1}AP - xP^{-1}P) = \det P^{-1}(A - xI_n)P = \det(A - xI_n).$$

$\diamond$

<u>ATTENTION</u> : La réciproque est fausse en général.

En résumé, on a donc le :

Théorème 6.15 *Les valeurs propres de u sont les racines dans K de P_u.*

Si P_u est scindé sur K(= toutes ses racines sont dans K) alors, si dim $E = n$, on a :

1. *u a exactement n valeurs propres, distinctes ou non.*
2. *La somme des valeurs propres vaut Tr (A).*
3. *Le produit des valeurs propres vaut det(A).*

Définition 6.16 *Soit $\lambda \in$ Spec (u). On appelle multiplicité de la valeur propre λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de P_u. On la note m_λ.*

Théorème 6.17 *Si λ est une valeur propre de u de multiplicité m_λ, alors $1 \leq$ dim $E_\lambda \leq m_\lambda$.*

Démonstration

$\lambda \in$ Spec (u), donc $E_\lambda \neq \{0_E\}$ et dim $E_\lambda \geq 1$.

Supposons que dim $E_\lambda = m$ et considérons $(v_1, \cdots, v_m)$ une base de E_λ. Par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $\{w_{m+1}, \cdots, w_n\}$ tels que $\mathcal{E}' = (v_1, \cdots, v_m, w_{m+1}, \cdots, w_n)$ soit une base de E.

La matrice de u dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1m+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & b_{2m+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & b_{m-1m+1} & \cdots & b_{m-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & b_{mm+1} & \cdots & b_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{m+1m+1} & \cdots & b_{m+1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{nm+1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Calculons P_u :

$$P_u(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} \lambda - x & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1m+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda - x & 0 & \cdots & 0 & b_{2m+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - x & 0 & b_{m-1m+1} & \cdots & b_{m-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda - x & b_{mm+1} & \cdots & b_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{m+1m+1} - x & \cdots & b_{m+1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{nm+1} & \cdots & b_{nn} - x \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - x)^m \begin{vmatrix} b_{m+1m+1} - x & \cdots & b_{m+1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{nm+1} & \cdots & b_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Nous savons que $(x - \lambda)^{m_\lambda}$ divise P_u puisque λ est une valeur propre de multiplicité m_λ donc $m \leq m_\lambda$.

Ainsi, dim $E_\lambda = m \leq m_\lambda$. ◇

Corollaire 6.18 *Si λ est une valeur propre simple de u (i.e $m_\lambda = 1$), alors dim $E_\lambda = 1$.*

Démonstration

◇

6.4 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Théorème 6.19 *Soit $u \in L(E)$. On note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ.*

$$u \;\; \textit{est diagonalisable} \iff \begin{cases} P_u \;\; \textit{est scindé dans} \;\; K \\ \forall \; \lambda \in \textit{Spec } u, \textit{dim } E_\lambda = m_\lambda. \end{cases}$$

Démonstration

$\diamond$

Corollaire 6.20 *Si P_u possède n racines distinctes, alors u est diagonalisable.*

Démonstration

$\diamond$

Exemple 6.21 *1. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Les endomorphismes u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A_1 et A_2 sont-ils diagonalisables ?

2. *Soient* $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Les endomorphismes f_1 *et* f_2 *de* $\mathbb{R}^3$ *dont les matrices dans la base canonique sont respectivement* B_1 *et* B_2 *sont-ils diagonalisables ?*

6.5 Applications

Soit $u \in L(E)$ dont la matrice dans la base canonique est $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que A est diagonalisable. Alors il existe $P \in GL_n(K)$ et $D =$ Diag $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ telles que

$$D = P^{-1}AP \quad \text{ou} \quad A = PDP^{-1}. \tag{6.1}$$

6.5.1 Calcul de A^m

D'après la relation 6.1,

$$\begin{aligned} A^m = (PDP^{-1})^m &= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{\text{m fois}} \\ &= \underbrace{PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}}_{\text{m fois}} \end{aligned}$$

$$= \quad PD^mP^{-1},$$

avec $D^m = \text{ Diag }(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m)$.

Exemple 6.22 *Calculer B^m où $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $m \in \mathbb{N}$.*

B est diagonalisable et il existe $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ telle que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}BP \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} B^m &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^m2^m & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m2^m \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+(-1)^m2^{m+1} & 1+(-1)^{m+1}2^m & 1+(-1)^{m+1}2^m \\ 1+(-1)^{m+1}2^m & 1+(-1)^m2^{m+1} & 1+(-1)^{m+1}2^m \\ 1+(-1)^{m+1}2^m & 1+(-1)^{m+1}2^m & 1+(-1)^m2^{m+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.5.2 Etude des suites récurrentes

On cherche les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(S)\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Nous devons trouver pour tout entier n l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0,v_0 et w_0.

On définit pour tout entier n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et alors :

$$(S) \Longleftrightarrow X_{n+1} = BX_n \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = B^n X_0.$$

D'après les calculs précédents on obtient :

$$\begin{aligned} X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+(-1)^n 2^{n+1} & 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^{n+1}2^n \\ 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^n 2^{n+1} & 1+(-1)^{n+1}2^n \\ 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^n 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_0(1+(-1)^n 2^{n+1}) + (v_0+w_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \\ v_0(1+(-1)^n 2^{n+1}) + (u_0+w_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \\ w_0(1+(-1)^n 2^{n+1}) + (u_0+v_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.5.3 Résolution de systèmes linéaires différentiels du premier ordre

Soit à résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) \begin{cases} x'(t) &= -x(t)+y(t)+z(t) \\ y'(t) &= x(t)-y(t)+z(t) \\ z'(t) &= x(t)+y(t)-z(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont trois fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\vec{u}$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{u}(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3$ et

$\vec{u}\,'(t) = x'(t)\, e_1 + y'(t)\, e_2 + z'(t)\, e_3$, les vecteurs de la base canonique étant indépendants de t.

Soit pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}(t), \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On a alors $X'(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}\,'(t), \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et le système (S) s'écrit

$$X'(t) = BX(t) \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que si la matrice B était diagonale, nous aurions trois équations, chacune ne faisant intervenir qu'une fonction et sa dérivée.

B n'est pas diagonale, mais elle est diagonalisable et il existe une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ dans laquelle la matrice s'écrit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Notons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_1(t) = \text{Mat}(\vec{u}(t), \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}(t)$ dans la base $\mathcal{V}$.

Nous avons $X_1'(t) = \text{Mat}(\vec{u}\,'(t), \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix}$ et

$$X(t) = PX_1(t), \quad X'(t) = PX_1'(t) \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En injectant ces relations dans le système (S) on obtient :

$$(S) \Longleftrightarrow PX_1'(t) = BPX_1(t) \Longleftrightarrow X_1'(t) = P^{-1}BPX_1(t) = DX_1(t),$$

où D est diagonale.

Ainsi

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\Longleftrightarrow \quad X_1'(t) = P^{-1}BPX_1(t) = DX_1(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) \\ y_1'(t) &= -2y_1(t) \\ z_1'(t) &= -2z_1(t) \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) &= x_0 e^{t} \\ y_1(t) &= y_0 e^{-2t} \\ z_1(t) &= z_0 e^{-2t} \end{cases} \\
&\quad \text{où } \ x_0, y_0, z_0 \ \text{ sont des constantes arbitraires.}
\end{aligned}$$

Les fonctions x, y et z solutions de (S) sont données par

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 e^{t} \\ y_0 e^{-2t} \\ z_0 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0e^t + y_0e^{-2t} \\ x_0e^t + z_0e^{-2t} \\ x_0e^t - (y_0+z_0)e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

6.5.4 Résolution des équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 3 à coefficients constants

Soit (E) l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients constants suivante

$$\text{(E)} \qquad y^{(3)}(t) - 2y^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) + 2y(t) = 0\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{u}(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u}(t) = \sum_{i=1}^{p} y^{(i-1)}(t)\, e_i = y(t)\, e_1 + y'(t)e_2 + y''(t)\, e_3$. On a $\vec{u}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} y^{(i)}(t)\, e_i = y'(t)\, e_1 + y''(t)e_2 + y^{(3)}(t)\, e_3$, les vecteurs de la base canonique étant indépendants de t. Ainsi, si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}(t), \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

On a alors $U'(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}\,'(t), \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y^{(3)}(t) \end{pmatrix}$ et le système (S) s'écrit

$$U'(t) = AU(t) \;\text{ où }\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Regardons si A est diagonalisable. Soit P_A le polynôme caractéristique de A, on a, après calculs,

$$P_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, il n'a que des valeurs propres simples. A est donc diagonalisable.

Il existe $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A telle que

$$\Delta = P^{-1}AP$$

avec $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $(a(t), b(t), c(t))$ les coordonnées de $\vec{u}(t)$ dans la base $\mathcal{V}$. On pose $Z(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}(t), \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.

On a alors $Z'(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}\,'(t), \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{pmatrix}$. Ainsi, comme $U(t) = PZ(t)$, on a

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de (E)} \ &\Leftrightarrow \ U'(t) = AU(t)\,, \\
&\Leftrightarrow \ PZ'(t) = APZ(t)\,, \\
&\Leftrightarrow \ Z'(t) = P^{-1}APZ(t)\,, \\
&\Leftrightarrow \ Z'(t) = \Delta Z(t)\,, \\
&\Leftrightarrow \ \begin{cases} z_1'(t) = z_1'(t) \\ z_2'(t) = -z_2'(t) \\ z_3'(t) = 2z_3'(t) \end{cases}, \\
&\Leftrightarrow \ \begin{cases} z_1(t) = c_1 e^{t} \\ z_2(t) = c_2 e^{-t} \\ z_3(t) = c_3 e^{2t} \end{cases},
\end{aligned}$$

c_i constantes réelles.

Ainsi, comme $U(t) = PZ(t)$ et $y(t)$ étant la première coordonnée de $U(t)$, on obtient

$$y(t) = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Remarque : On peut utiliser la même démarche pour résoudre les équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre p à coefficients constants. En effet, considérons l'équation différentielle (H) suivante :

$$a_p y^{(p)}(t) + \ldots + a_2 y^{(2)}(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{(H)}$$

où $a_i \in \mathbb{R}$, pour tout $i = 0, \cdots, p$ et $a_p \neq 0$.

On se place dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1..p}$. Soit pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{u}(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que $\vec{u}(t) = \sum_{i=1}^{p} y^{(i-1)}(t)\, e_i = y(t)\, e_1 + y'(t) e_2 + \cdot + y^{(p-1)}(t)\, e_p$. On a $\vec{u}\,'(t) = \sum_{i=1}^{p} y^{(i)}(t)\, e_i = y'(t)\, e_1 + y''(t) e_2 + \cdot + y^{(p)}(t)\, e_p$, les vecteurs de la base canonique étant indépendants de t. Ainsi, si pour tout $t \in \mathbb{R}$ $U(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}(t), \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}$.

On a alors $U'(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}\,'(t), \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(p)}(t) \end{pmatrix}$ et le système (S) s'écrit

$$U'(t) = AU(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_p} & -\frac{a_1}{a_p} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{p-2}}{a_p} & -\frac{a_{p-1}}{a_p} \end{pmatrix}.$$

La matrice B n'est pas diagonale.

Si B est diagonalisable, on se place dans la base de $\mathbb{R}^p$ formée des vecteurs propres de B et on procède comme dans l'exemple de l'EDO linéaire d'ordre 3 traité au début de cette section.

Le cas où la matrice n'est pas diagonalisable sera traitée en seconde année.

6.6 Test d'auto-évaluation

6.6.1 Réduction d'endomorphisme

Soient E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $u \in L(E)$.

Question 1. Qu'est-ce qu'une valeur propre de u ?

Question 2. Qu'est-ce qu'un vecteur propre de u ?

Question 3. Qu'est-ce qu'un espace propre ?

Question 4. Qu'est-ce que le polynôme caractéristique P_u de u ? Quel est son degré ? Quel est le coefficient du terme de plus haut degré ? du plus bas degré ?

Question 5. Quel lien existe-t-il entre les valeurs propres de u et le polynôme caractéristique de u ?

Question 6. Qu'est-ce que la multiplicité d'une valeur propre de u ?

Question 7. Soient λ une valeur propre de u et E_λ l'espace propre associé à λ. Quel lien existe-t-il entre $\dim E_\lambda$ et la multiplicité de λ ?

Question 8. Que signifie u est diagonalisable ?

Question 9. Donner une CNS pour que u soit diagonalisable.

Question 10. On suppose que u admet n valeurs propres deux à deux distinctes. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Question 11. On suppose que u admet une seule valeur propre de multiplicité n. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Question 12. On suppose que P_u est scindé dans K. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Question 13. Compléter les pointillés :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } u &\iff \text{det......} \\
&\iff u - \lambda \mathrm{id}_E..... \\
&\iff u - \lambda \mathrm{id}_E..... \\
&\iff \text{Ker ....} \\
&\iff \text{rg ....}
\end{aligned}$$

Question 14. 0 peut-il être valeur propre de u ?

6.6.2 Synthèse

Question 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Que signifie "A et B sont semblables" ?

Question 16. Quand obtient-on des matrices semblables ?

Question 17. Qu'ont en commun deux matrices semblables ?

-

-

-

-

Question 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Compléter les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} \quad &\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \end{aligned}$$