

Table des matières

Chapitre 1. Compléments sur la continuité et la dérivabilité de fonctions	1
1. Théorèmes fondamentaux de continuité	1
2. Continuité uniforme	5
3. Théorème de Rolle et accroissements finis	9
4. Formules de Taylor	16
5. Test d'auto-évaluation	20
Chapitre 2. Intégrales simples	21
1. Généralités	21
2. Fonctions en escalier	22
3. Définition de l'intégrale	24
4. Propriétés des fonctions intégrables	32
5. Ensembles de fonctions intégrables	37
6. Le premier théorème de la moyenne et ses conséquences	42
7. Intégrale et dérivée	46
8. Le second théorème de la moyenne	49
9. Test d'auto-évaluation	55
Chapitre 3. Equivalents et Développements limités	57
1. Comparaison de fonctions	57
2. Formules de Taylor	66
3. Développements limités	70
4. Récapitulatif des développements limités des fonctions usuelles en 0	86
5. Test d'auto-évaluation	87
Chapitre 4. Intégrales généralisées	91
1. Définitions et propriétés immédiates	91
2. Le critère de Cauchy	95
3. Convergence absolue	97

4. Intégrales semi-convergentes	101
5. Test d'auto-évaluation	104

Compléments sur la continuité et la dérivabilité de fonctions

1. Théorèmes fondamentaux de continuité

On introduit dans cette partie quelques uns des théorèmes fondamentaux qui justifient l'introduction de la notion de fonction continue.

1.1. Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction définie sur l'intervalle I . Si on ne sait pas que la fonction f est continue sur I , on ne peut généralement rien dire sur l'existence d'une solution pour l'équation suivante

$$\begin{cases} s \in I, \\ f(s) = 0. \end{cases}$$

En revanche, si on sait que $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et que f change de signe sur I : c'est à dire qu'il existe $a < b$ dans I tels que

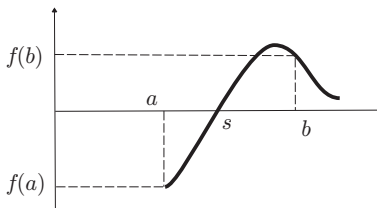
$$f(a)f(b) < 0$$

on pourra alors affirmer que le problème précédent admet une solution s et que $s \in [a, b]$. Cette propriété est utilisée en analyse numérique pour résoudre de façon approchée, sur ordinateur, le problème ci-dessus à l'aide de la méthode de dichotomie. Le théorème suivant, appelé parfois **propriété de Cauchy**, établit cette propriété.

THÉORÈME 1.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et telle qu'il existe $a < b$ appartenant à I tels que $f(a)f(b) < 0$. Alors, il existe s , $a < s < b$ tel que*

$$f(s) = 0.$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $f(a) < 0 < f(b)$, sinon on travaille avec la fonction $-f$ (voir figure ci-dessous).



On pose alors

$$X = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Cet ensemble a les propriétés suivantes :

- X est non vide : car $a \in X$,
- X est majoré : car b est un majorant de X .

L'axiome de la borne supérieure donne alors que X admet une borne supérieure $s = \sup X$. Notons d'abord que s ne peut être égal ni à a ni à b car la continuité de la fonction f entraîne qu'elle reste < 0 dans un voisinage de a et > 0 dans un voisinage de b . Pour les mêmes raisons $s \notin X$, car sinon X aurait des éléments $> s$. On a donc $f(s) \geq 0$.

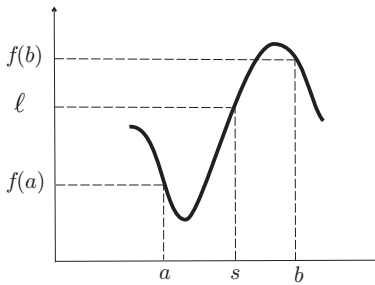
On utilise maintenant le fait que la caractérisation de la borne supérieure assure qu'il existe une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$. La continuité de f entraîne alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(s) \leq 0$ car $f(x_n) < 0$ pour tout n . On a ainsi $f(s) \geq 0$ et $f(s) \leq 0$. Il s'ensuit que $f(s) = 0$. \square

On déduit de la propriété précédente le théorème fondamental suivant appelé **théorème des valeurs intermédiaires**.

THÉORÈME 1.2. *Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\ell \in \mathbb{R}$ sont tels que ℓ soit une valeur intermédiaire entre deux valeurs prises par f dans l'intervalle I , (c'est à dire qu'il existe $a < b$ dans I tels qu'on soit dans l'une des deux situations $f(a) \leq \ell \leq f(b)$ ou $f(b) \leq \ell \leq f(a)$), alors il existe $s \in [a, b]$ tel que $f(s) = \ell$.*

DÉMONSTRATION. Si $f(a) = \ell$ ou $f(b) = \ell$, on peut prendre respectivement $s = a$ ou $s = b$. On peut donc supposer que $f(a) < \ell < f(b)$ ou $f(b) < \ell < f(a)$ (voir figure

ci-dessous).



Considérons la fonction auxiliaire définie sur I par $g(x) = f(x) - \ell$. Cette fonction est continue sur I comme somme de la fonction f et de la fonction constante $x \rightarrow -\ell$ et vérifie $g(a)g(b) < 0$. On obtient directement à partir du théorème précédent qu'il existe $s \in [a, b]$ tel que $g(s) = 0$, ce qui est une autre façon d'exprimer que $f(s) = \ell$. \square

1.2. Théorème de Weierstrass. De la même façon que ci-dessus, on considère, pour f définie sur I , le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} m \in I, \\ f(m) \leq f(x), \forall x \in I. \end{cases}$$

Ce problème se rencontre très fréquemment en ingénierie comme dans la plupart des activités faisant appel à la modélisation mathématique. Généralement, f est un critère : coût, coefficient de sécurité, proximité d'un objectif, etc..., que l'on cherche à minimiser.

Là aussi sans propriétés de f et sans hypothèse sur I , on dispose de peu de situations où l'on est capable d'affirmer que ce problème admet une solution. Cependant, si I est un segment $[a, b]$ et si $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, la réponse est positive.

Avant d'étudier ce problème, introduisons d'abord quelques définitions. Si I est une partie non vide $\subset \mathcal{D}_f$, et si on note $X = f(I)$, $\inf X$ est plus usuellement noté

$$\inf X = \inf_{x \in I} f(x).$$

Si $\inf X$ est atteint ($\inf X = f(x_0)$ avec $x_0 \in I$), on parle alors de **minimum** de f sur I et on le note

$$\inf X = \min_{x \in I} f(x).$$

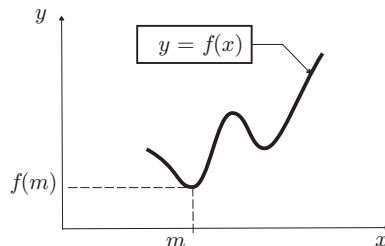
On a de même

$$\sup X = \sup_{x \in I} f(x)$$

et on parle de même de **maximum** de f sur I si $\sup X$ est atteint qu'on note alors par

$$\sup X = \max_{x \in I} f(x).$$

LEMME 1.1. *Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors f a un minimum sur $[a, b]$ et l'atteint en un $m \in [a, b]$ (i.e. il existe $m \in [a, b]$ tel que $f(m) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$)*



DÉMONSTRATION. Posons $X = f([a, b])$. Rappelons que X l'image de $[a, b]$ par f et qu'il est défini par

$$X = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [a, b], f(x) = y\}.$$

Clairement X est non vide : il contient par exemple $f(a)$. Supposons que X ne soit pas minoré. Il existe donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $[a, b]$ telle que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante et tende vers $-\infty$. Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$, le théorème de Bolzano-Weirstrass montre qu'en passant à une suite extraite, $u_n = x_{\varphi(n)}$, on obtient une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers $c \in [a, b]$. La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, étant une suite extraite de $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (car $f(u_n) = f(x_{\varphi(n)})$) converge elle aussi vers $-\infty$. On obtient donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = -\infty$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c$, ce qui contredit le fait que f soit continue en c .

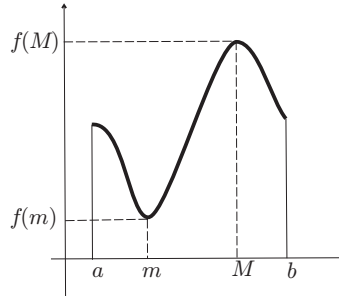
L'ensemble X est donc minoré et non vide. L'axiome de la borne supérieure assure l'existence de la borne inférieure $\inf X$ de X . On a vu plus haut qu'il existe une suite de points de X convergeant vers $\inf X$, ce qui se traduit par l'existence d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = \inf X$. En raisonnant comme ci-dessus, on peut donc affirmer qu'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = m$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = \inf X$. Ceci démontre le lemme. \square

REMARQUE 1.1. *En appliquant le lemme à la fonction $x \rightarrow -f(x)$, on montre que sous les mêmes hypothèses, la fonction f admet un maximum sur $[a, b]$ qu'elle atteint en un point $M \in [a, b]$.*

On alors le théorème de Weierstrass.

THÉORÈME 1.3. *Si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors*

- (1) *f admet un minimum qu'elle atteint en un point m et un maximum qu'elle atteint en un point M sur $[a, b]$ et $f([a, b]) = [f(m), f(M)]$;*



- (2) *f est bornée sur $[a, b]$, i.e., il existe A tel que $|f(x)| \leq A, \forall x \in [a, b]$.*

DÉMONSTRATION. La propriété (1) est une conséquence directe du lemme ci-dessus et du théorème des valeurs intermédiaires. Pour établir la propriété (2), il suffit de prendre $A = \max \{f(M), -f(m)\}$. □

2. Continuité uniforme

2.1. Fonctions lipschitziennes. Considérons la fonction polynomiale de degré 1 (on dit aussi linéaire affine) $x \rightarrow f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On sait déjà que cette fonction est définie et continue sur \mathbb{R} en utilisant les opérations sur les fonctions continues. Revenons, cependant, à la définition de la continuité en $x \in \mathbb{R}$: pour $\varepsilon > 0$ donné, quel est le nombre η assurant que si $|x - y| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$? Calculons $|f(x) - f(y)| = |ax + b - ay - b| = |a||x - y|$. On voit donc qu'il suffit de prendre $\eta = \varepsilon/|a|$ pour assurer que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ si $|x - y| \leq \eta$. La fonction f appartient à la classe des fonctions qui sont dites lipschitziennes de constante de Lipschitz $|a|$ qu'on définit comme suit.

Une fonction f est **lipschitzienne de constante de Lipschitz k** (ou plus rapidement **k -lipschitzienne**) sur l'intervalle I si elle est définie sur I et vérifie :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

On a immédiatement la propriété suivante.

PROPOSITION 1.1. *Si f est k -lipschitzienne sur I , alors elle est continue sur I .*

DÉMONSTRATION. Soient $x \in I$ et $\varepsilon > 0$. Il suffit de prendre $y \in I$ tel que $|x - y| \leq \eta = \varepsilon/k$ pour que $|f(x) - f(y)|$ soit

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k \varepsilon/k = \varepsilon.$$

□

REMARQUE 1.2. *La réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant. On établit en UV1 "outils de calcul" que la fonction réciproque de la restriction de la fonction $x \rightarrow x^2$ à l'intervalle $[0, +\infty[$ est la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ qui est aussi définie continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Si $x \rightarrow \sqrt{x}$ était k -lipschitzienne, en prenant $x = 0$ et y quelconque $\neq 0$, on aurait*

$$\sqrt{y} \leq ky,$$

ce qui donne en divisant les deux membres par $\sqrt{y} > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \leq k, \quad \forall y > 0.$$

En prenant maintenant $y = 1/n^2$ avec n entier ≥ 1 , ceci donne

$$n \leq k, \quad \forall n \text{ entier } \geq 1,$$

aboutissant à une contradiction avec le fait que \mathbb{R} est un corps archimédien.

2.2. Fonctions uniformément continues. Si une fonction f est k -lipschitzienne, on a vu ci-dessus que, pour tout $x \in I$, le η assurant que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ si $|x - y| \leq \eta$ ne dépend pas du point x . Les fonctions possédant cette propriété sont dites **uniformément continues** sur I et vérifient donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } x \text{ et } y \in I \text{ et } |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On a déjà ainsi montré, lors de la preuve de la continuité d'une fonction k -lipschitzienne, qu'une fonction k -lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I . Les deux notions ne se confondent cependant pas comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 1.1. La fonction ci-dessus, définie sur $[0, +\infty[$ par $x \rightarrow \sqrt{x}$, est uniformément continue sur cet intervalle. Ceci va résulter de l'inégalité valable pour tout x et $y \geq 0$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

En effet, l'inégalité est trivialement vérifiée si $x = y$. On peut donc supposer que $x \neq y$ et considérer

$$\begin{aligned} \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{|x - y|}} &= \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{|(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2|}} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{|(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})|}} \\ &= \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \sqrt{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}} = \frac{\sqrt{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}} \leq 1. \end{aligned}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$; pour $\eta = \varepsilon^2$, si x, y sont dans $[0, +\infty[$ et vérifient $|x - y| \leq \eta$, il vient, d'après l'inégalité ci-dessus, que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{\eta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$. Ceci montre que la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Le **théorème de Heine**, qu'on énonce maintenant, donne une condition suffisante assurant qu'une fonction est uniformément continue.

THÉORÈME 1.4. Si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, on peut trouver x_η et y_η vérifiant : $x_\eta, y_\eta \in [a, b]$, $|x_\eta - y_\eta| \leq \eta$ et $|f(x_\eta) - f(y_\eta)| \geq \varepsilon_0$. En particulier, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, η est choisi sous la forme $\eta = 1/(n + 1)$, en notant x_n et y_n les x_η et y_η associés, on aura

$$x_n, y_n \in [a, b], |x_n - y_n| \leq 1/(n + 1) \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, étant contenue dans $[a, b]$, est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure alors qu'il existe une suite extraite, donnée par $u_n = x_{\varphi(n)}$ avec φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et $u \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Comme $a \leq u_n = x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite, que $u \in [a, b]$. Considérons la suite extraite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

relativement aux mêmes indices que ceux utilisés pour la suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est à dire la suite définie par $v_n = y_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|u_n - v_n| = |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{(\varphi(n) + 1)} \leq \frac{1}{n + 1}$$

car toute application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} vérifie $\varphi(n) \geq n$ pour tout n .

On a ainsi

$$|v_n - u| = |v_n - u_n + u_n - u| \leq \frac{1}{n + 1} + |u_n - u|.$$

Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u$. On a donc en utilisant la continuité de f

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\leq |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| = |f(u_n) - f(v_n)| \\ &= |f(u_n) - f(u) + f(u) - f(v_n)| \leq |f(u_n) - f(u)| + |f(v_n) - f(u)|. \end{aligned}$$

En passant à la limite sur le second membre de l'inégalité précédente et en utilisant le fait que f est continue en u , il vient

$$\varepsilon_0 \leq 0 + 0 = 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse $\varepsilon_0 > 0$ et démontre le théorème. \square

REMARQUE 1.3. *On ne peut pas améliorer le théorème précédent.*

1. *On a vu ci-dessus que la fonction $x \rightarrow 1/x$ était continue sur $]0, 1[$. Pour montrer qu'elle n'est pas uniformément continue, on va raisonner par l'absurde. Supposons donc que $x \rightarrow 1/x$ est uniformément continue sur $]0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $|1/x - 1/y| \leq \varepsilon$ dès que $|x - y| \leq \eta$. Fixons $0 < \delta < 1$ et $0 < h < \min\{\delta, \eta\}$. Pour $x \in]0, \delta[$ et $y = x + h$, on a*

$$0 < x < x + h < 1 - (\delta - h) < 1 \text{ et } |x - y| = h < \eta.$$

On a ainsi, d'après ce qui précède,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x+h} \right| = \frac{h}{x(x+h)} \leq \varepsilon, \forall x \in]0, 1 - \delta[.$$

Faisant tendre dans l'inégalité précédente $x \rightarrow 0$. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{x+h} = \frac{h}{h} = 1$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{h}{x+h} = +\infty.$$

Ceci contredit que $\frac{h}{x(x+h)} \leq \varepsilon$, $\forall x \in]0, 1 - \delta[$ et démontre ainsi que $x \rightarrow 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1[$.

2. De la même façon, considérons la fonction définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On a pour $x, y > 0$, $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| |x + y|$. Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que pour tout choix de $\eta > 0$, on peut trouver x, y vérifiant $|x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Le corps \mathbb{R} étant archimédien, $\eta > 0$ étant donné, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\eta > \varepsilon/2$. Prenons alors $x = n$ et $y = x + \eta$. On a alors $|x - y| = \eta$ et $|f(x) - f(y)| = |x - y| |x + y| \geq 2n\eta > \varepsilon$.

Ces deux exemples montrent que si on prend un intervalle ouvert mais non fermé ou si on prend un intervalle fermé mais non borné, le théorème n'est plus vérifié. Il faut cependant observer que la condition f définie sur un intervalle fermé borné n'est pas nécessaire. Nous avons vu précédemment qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle quelconque I est uniformément continue sur I et que la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ sans être lipschitzienne.

3. Théorème de Rolle et accroissements finis

3.1. Théorème de Rolle.

3.1.1. Condition nécessaire d'extremum.

Définitions. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un **maximum local** en $a \in I$ s'il existe $l > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a - l, a + l[$, $f(x) \leq f(a)$, autrement dit si $f(x)$ est inférieur à $f(a)$ pour x dans un voisinage de a . On dit que ce maximum est **strict** si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq a$. On définit de même **mimum local** en remplaçant \leq par \geq .

On dit que f admet un **maximum global** en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. On définit de même **mimum global**. Si f admet un minimum ou un maximum en a , on dit que f admet un **extremum** en a .

PROPOSITION 1.2. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ non extrémité de I . Si f admet un extremum local en a et si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.*

Ainsi, une fonction dérivable sur I ne peut admettre d'extremum qu'en une extrémité de I ou en un point où f' s'annule.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que f admet un maximum local en a , la preuve étant similaire dans le cas où f admet un minimum en a . Pour tout $x \in I$ dans un voisinage de a , $f(x) \leq f(a)$, donc le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est positif dans un voisinage de a^- et négatif dans un voisinage de a^+ . En passant à la limite, on obtient

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Ainsi, $f'(a) = 0$. □

Attention. La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable en 0, de dérivée nulle en 0, mais elle n'admet pas d'extremum en 0.

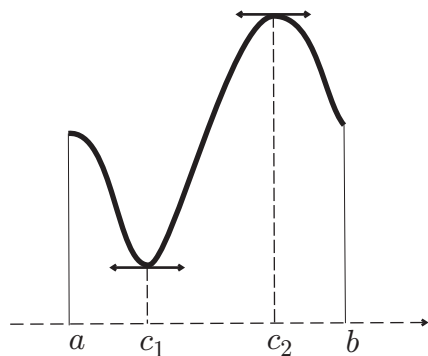
3.1.2. Théorème de Rolle.

THÉORÈME 1.5. Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

- f continue sur $[a, b]$,
- f dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le point c n'est pas nécessairement unique.



DÉMONSTRATION. La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes. On pose $M = \max_{[a, b]} f$ et $m = \min_{[a, b]} f$.

Si $M = m$, alors la fonction f est constante, et $f' = 0$ sur $]a, b[$, ce qui donne le résultat. Supposons maintenant que $M > m$. Alors M ou m est différent de $f(a) = f(b)$, par exemple M . Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $M = f(c)$. On peut appliquer le résultat précédent (le point c n'est pas une extrémité de $[a, b]$) : $f'(c) = 0$. \square

EXEMPLE 1.2. *Application aux racines.*

- (1) *Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et si f admet n racines distinctes alors f' admet au moins $n - 1$ racines qui séparent celles de f .*

DÉMONSTRATION. Notons $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les racines de f . Soit $1 \leq j \leq n - 1$. La fonction f est continue sur $[x_j, x_{j+1}]$, dérivable sur $]x_j, x_{j+1}[$ et $f(x_j) = 0 = f(x_{j+1})$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $y_j \in]x_j, x_{j+1}[$ tel que $f'(y_j) = 0$. Les y_j sont distincts. \square

- (2) *Si f est de classe \mathcal{C}^p sur $[a, b]$, $p \geq 1$, si f admet n racines distinctes sur $[a, b]$, et si $p \leq n - 1$, alors $f^{(p)}$ admet au moins $n - p$ racines sur $[a, b]$. (Récurrence sur p)*

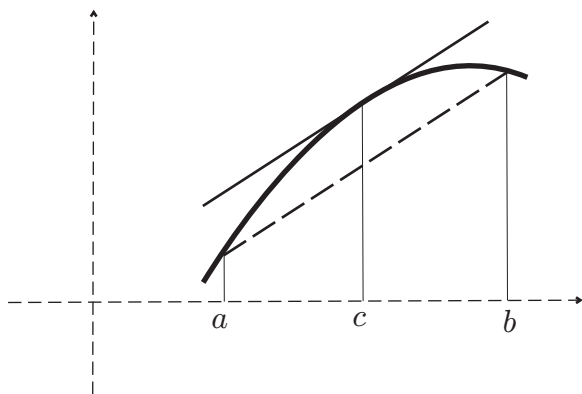
3.2. Théorème des accroissements finis.

3.2.1. Énoncé.

THÉORÈME 1.6. *Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f vérifie les conditions suivantes :*

- f continue sur $[a, b]$,
- f dérivable sur $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce théorème, on introduit une fonction auxiliaire à laquelle on va appliquer le théorème de Rolle. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (à déterminer). On pose $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$.

La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $\varphi(a) = 0$. On choisit λ tel que $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$, soit $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. D'après le théorème de Rolle, il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or $\varphi'(c) = f'(c) - \lambda$, on obtient donc $\lambda = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. \square

COROLLAIRE 1.1 (Inégalité des accroissements finis).

Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors, pour tout $x, y \in [a, b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{t \in]x, y[} |f'(t)| |x - y|.$$

3.2.2. *Conséquences.* A partir de cette inégalité, on obtient le résultat fondamental suivant.

THÉORÈME 1.7. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. Soit $x, y \in [a, b]$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[x, y]$, on obtient $f(x) = f(y)$. Ceci étant vrai pour tous points de $[a, b]$, f est constante sur $[a, b]$. \square

Attention. Une fonction dérivable, de dérivée nulle n'est pas nécessairement constante. Ceci n'est vrai que si cette fonction est définie sur un intervalle. En effet, la fonction

$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(x) = -1$ si $x < 0$ est dérivable sur \mathbb{R}^* , de dérivée nulle sur \mathbb{R}^* . Elle est constante sur chacun des intervalles où elle est définie.

PROPOSITION 1.3. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si f' est bornée par k sur $]a, b[$, alors f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de l'inégalité des accroissements finis. Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que $|f'(t)| \leq k$ pour tout $t \in]a, b[$. Alors, pour tout $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq \max_{t \in]x, y[} |f'(t)| |x - y| \leq k|x - y|$. \square

EXEMPLE 1.3. *Soit $x > 0$. Montrons que $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$. On applique le théorème des accroissements finis à \ln sur $[x, x+1]$: \ln est dérivable sur $[x, x+1]$ donc il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln'(c_x)(x+1-x)$, i.e. $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c_x}$. Or, $x < c_x < x+1$ donc $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c_x} < \frac{1}{x}$, d'où*

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Application : Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ diverge.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k} > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$. On somme pour k variant de 1 à n , il vient $u_n > \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

EXEMPLE 1.4. *Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe \mathcal{C}^1 , $u_0 \in [a, b]$. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in [a, b]$. On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une récurrence immédiate montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et que $u_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $l = f(l)$ (par continuité de f), et par récurrence, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l| \leq k^n (b - a),$$

i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l comme k^n , d'où une idée de la vitesse de convergence.

3.2.3. *Application à la monotonie des fonctions.*

THÉORÈME 1.8. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors,

- (1) f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $f' \geq 0$ sur $]a, b[$.
- (2) f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si $f' \leq 0$ sur $]a, b[$.
- (3) si $f' > 0$ sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
- (4) si $f' < 0$ sur $]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

REMARQUE 1.4. Les deux derniers points ne sont pas des équivalences. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} mais sa dérivée en 0 est nulle.

DÉMONSTRATION. Nous montrons les points (1) et (3).

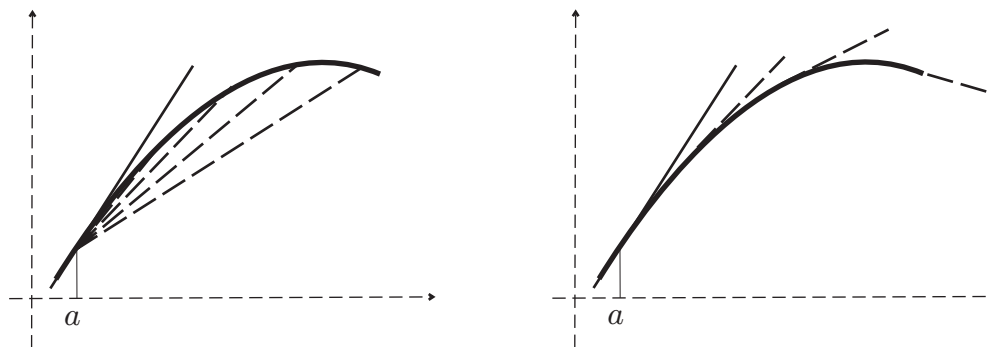
Supposons f croissante sur $[a, b]$. Montrons que $f' \geq 0$ sur $]a, b[$. Soit $x_0 \in]a, b[$, $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$. La fonction f étant croissante, $f(x) - f(x_0)$ est du même signe que $x - x_0$, donc $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Par passage à la limite $x \rightarrow x_0$, on obtient $f'(x_0) \geq 0$. Ainsi, $f' \geq 0$ sur $]a, b[$.

Réciproquement, supposons $f' \geq 0$ sur $]a, b[$. Soit $x, y \in [a, b]$, $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Comme $f'(c) \geq 0$, on en déduit que $f(x) \leq f(y)$. La fonction f est donc croissante sur $[a, b]$.

Dans le cas où $f' > 0$, on obtient de même que f est strictement croissante. □

3.2.4. *Dérivabilité d'un prolongement.* La question est la suivante. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $I \setminus \{a\}$, quels liens y-a-t-il entre l'existence de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et de $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$?

Voici une "représentation" de ces deux limites.



Tout d'abord, les deux notions ne sont pas équivalentes.

EXEMPLE 1.5. Soit $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$. On a vu que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Par théorèmes d'opérations, f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

Mais, si f' admet une limite en a , alors f est dérivable en a . Plus précisément,

THÉORÈME 1.9. Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ existe,
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l'$ existe.

Alors, f est prolongeable par continuité sur I en posant $f(a) = l$ et ce prolongement est dérivable en a , avec $f'(a) = l'$.

DÉMONSTRATION. La fonction f est dérivable donc continue sur $I \setminus \{a\}$, et en posant $f(a) = l$, on prolonge f par continuité sur I . Montrons maintenant que f est dérivable en a . Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Comme f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$), il existe $c_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a)$, i.e. $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Comme c_x est compris entre a et x , $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$, donc $\lim_{x \rightarrow a} f'(c_x) = \lim_{y \rightarrow a} f'(y) = l'$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l'$, i.e. f est dérivable en a de dérivée l' . \square

REMARQUE 1.5. Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm\infty$, le même raisonnement prouve que la courbe de f admet en a une tangente verticale, ce qui implique que f n'est pas dérivable en a .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ n'existe pas dans $\bar{\mathbb{R}}$, on étudie la dérivabilité de f en a en utilisant le taux d'accroissement.

4. Formules de Taylor

On a vu précédemment que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point a de I , alors on peut écrire pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0,$$

ce qui revient à approcher f par une fonction affine au voisinage de a .

Dans cette partie, nous donnons des théorèmes qui étendent en quelque sorte ce résultat, appelés "formules de Taylor" : sous des hypothèses de régularité sur la fonction f , on écrit f , au voisinage d'un point a sous la forme d'un polynôme en $(x - a)$ plus un reste :

$$f(x) = P_n(x - a) + \text{reste}, \quad P_n \text{ polynôme de degré } \leq n.$$

Les diverses formules diffèrent par la forme du reste. Mais dans tous les cas, l'appellation "reste" a un sens car ce "reste" est négligeable par rapport à $(x - a)^n$ au voisinage de a , c'est-à-dire qu'il tend vers 0 quand $x \rightarrow a$ et ce plus vite que $(x - a)^n$: $\frac{\text{reste}}{(x - a)^n} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Nous reviendrons sur ces notions de comparaison de fonctions dans le chapitre suivant.

Nous donnons dans ce paragraphe deux formes de reste. Nous démontrerons une troisième formule, avec reste intégral, dans la partie de ce cours sur l'intégrale.

4.1. Formule de Taylor-Lagrange.

THÉORÈME 1.10. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I , $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a, x \in I$, il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat s'obtient de la même manière que l'égalité des accroissements finis (qui en est un cas particulier pour $n = 0$). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (à déterminer). Soit $a, x \in I$, $a \neq x$. On note $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie pour tout $t \in I$ par

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a) - \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + \lambda(t-a)^{(n+1)}.$$

φ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . On a pour tout $t \in I$, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= f^{(k)}(t) - f^{(k)}(a) - f^{(k+1)}(a)(t-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-k)!}(t-a)^{(n-k)} \\ &\quad + \lambda(n+1) \dots (n+2-k)(t-a)^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

En particulier, $\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) - (n+1)\lambda(t-a)$.

Ainsi, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\varphi^{(k)}(a) = 0$.

On choisit λ tel que $\varphi(x) = 0$, i.e. $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \lambda(x-a)^{n+1}$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a, x[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$. On applique à nouveau le théorème de Rolle à φ' sur $]a, c_1[$. Il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que $\varphi''(c_2) = 0$. On réitère le procédé jusqu'à obtenir c_{n+1} tel que $\varphi^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0 = f^{(n+1)}(c) - \lambda(n+1)!$. On obtient donc $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, et on reporte dans l'égalité définissant λ . \square

Il en découle le résultat suivant.

PROPOSITION 1.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} et si $f^{(n+1)} = 0$ (i.e. $f^{(n+1)}(x) = 0$ pour tout $x \in I$), alors f est un polynôme de degré au plus n sur I .*

4.2. Formule de Taylor-Young.

4.2.1. Énoncé.

THÉORÈME 1.11. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n sur I , $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in I$. Il existe une fonction ε telle que pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On remarquera que l'on suppose ici seulement f de classe \mathcal{C}^n .

DÉMONSTRATION. Soit $a, x \in I$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour f de classe \mathcal{C}^n . Il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \left(\frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)}{n!} \right) (x-a)^n \end{aligned}$$

Or, $f^{(n)}$ est continue en a , et $c \in]a, x[$ donc $\lim_{x \rightarrow a} f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a) = 0$ d'où le résultat. \square

4.2.2. *Application aux extrema.* La formule de Taylor-Young permet d'obtenir une condition suffisante d'extremum pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

THÉORÈME 1.12. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur I . Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$.*

- (1) *Si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a .*
- (2) *Si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local strict en a .*

DÉMONSTRATION. On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a . Comme $f'(a) = 0$, on a

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x-a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

Supposons $f''(a) > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x-a| < \eta$, $|\varepsilon(x-a)| \leq f''(a)/4$, donc $\varepsilon(x-a) \geq -f''(a)/4$ et $(x-a)^2\varepsilon(x-a) \geq -f''(a)(x-a)^2/4$. Ainsi, pour $|x-a| < \eta$, $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) \geq \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 = \frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 > 0.$$

La fonction f admet donc un minimum strict en a .

Le cas $f''(a) < 0$ est laissé en exercice. \square

REMARQUE 1.6.

- (1) *La réciproque de ces propriétés est fautive. La fonction $f : x \mapsto x^4$ admet un minimum global en 0, $f'(0) = f''(0) = 0$.*
- (2) *Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire. La fonction f peut admettre un maximum (par exemple $x \mapsto x^4$ en 0), un minimum (par exemple $x \mapsto -x^4$ en 0), ou ni l'un*

ni l'autre (par exemple $x \mapsto x^3$ en 0). Ces exemples sont en fait typiques. Pour déterminer le comportement de f au voisinage de a , on écrit son développement de Taylor (s'il existe) jusqu'au premier terme non nul après $f(a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x-a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

Le signe de $f(x) - f(a)$ est donné par celui de ce terme. Si n est impair, $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a donc f n'admet pas d'extremum en a ; si n est pair, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a donc f admet un extremum en a .

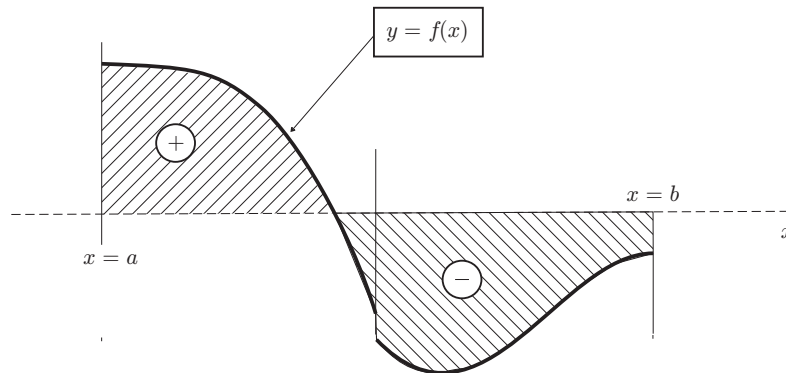
5. Test d'auto-évaluation

- (1) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- (2) Soient a et b deux réels tels que $a > b$ et f définie et continue sur $[a; b]$. Énumérer toutes les propriétés que f possède .
- (3) Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Que signifient les 2 propriétés suivantes et quel lien logique existe-t-il entre elles ?
- (a) $\forall \epsilon > 0, \forall x \in I, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$
- (b) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$
- (4) Énoncer le théorème de Rolle.
- (5) Énoncer le Théorème des accroissements finis.
- (6) Soit la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{\pi} \arctan x - x$. Montrer, sans la calculer, que la dérivée de f s'annule au moins deux fois sur l'intervalle $[-1; 1]$.
- (7) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue et dérivable sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\ln \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b - a)$.
- Indication* : On pourra utiliser la fonction $\ln(f)$.

Intégrales simples

1. Généralités

Avant d'introduire la notion d'intégrale, donnons en d'abord une idée intuitive. C'est l'*aire algébrique* comprise entre le graphe d'une fonction, l'axe des x et deux droites parallèles à l'axe des y . Par *aire algébrique*, on entend que les aires correspondant aux valeurs où **la fonction est positive** (partie du graphe **au dessus** de l'axe des x) sont comptées **positivement** et les aires où **la fonction est négative** (partie du graphe **en dessous** de l'axe des x) sont comptées **négativement**. La figure suivante donne une idée de cette aire :



On ajoute l'aire marquée avec un + et on retranche celle marquée avec un -.

On va commencer dans cette section par introduire la notion d'intégrale simple. Pour pouvoir parler d'une intégrale simple, il faut que les conditions suivantes soient réunies :

- l'intervalle d'intégration doit être un **segment** $[a, b]$ (intervalle fermé borné) ;
- la fonction f doit être **définie**, sauf peut être en un **nombre fini de points** de $[a, b]$, et être **bornée** sur $\mathcal{D}_f \cap [a, b]$.

Le fait de ne pas exclure les fonctions qui ne sont pas définies en certains points est important dans les applications comme on l'a vu au chapitre 1 pour le calcul du volume de la poutre dont la section change brusquement.

Les **intégrales simples** concernent donc les intégrales des fonctions f qui sont définies, sauf peut être en un nombre fini de points, sur un segment $[a, b]$ et qui sont bornées sur $\mathcal{D}_f \cap [a, b]$. Rappelons que ceci signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a, b].$$

On dira que $f \in \mathcal{B}([a, b])$ pour désigner une fonction ayant ces propriétés.

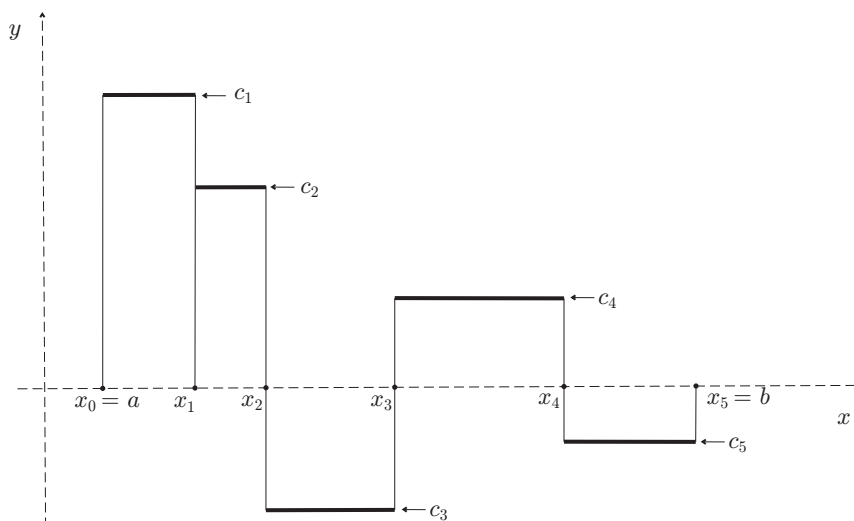
Il faut se garder, cependant, de croire que toute fonction $f \in \mathcal{B}([a, b])$ peut être intégrée sur $[a, b]$. Le but de cette section est justement de caractériser les fonctions qui sont intégrables et de donner les éléments permettant soit d'arriver à une expression analytique de la valeur de l'intégrale, soit de préparer les outils qui seront utilisés en deuxième année, en analyse numérique, pour développer des procédés d'approximation de cette valeur à partir d'une programmation sur ordinateur.

Dans toute la suite, $[a, b]$ désignera un segment de \mathbb{R} .

2. Fonctions en escalier

Nous allons d'abord définir l'intégrale de fonctions très simples : les fonctions constantes par morceaux sur $[a, b]$ qu'on appelle traditionnellement fonctions en escalier dont la figure

suivante donne une idée



Par un passage à la limite adapté, nous en déduisons l'intégrale de fonctions plus générales.

Pour énoncer de façon précise la notion de fonction en escalier, nous avons besoin d'introduire la définition d'une subdivision du segment $[a, b]$ (appelée décomposition de domaine sans recouvrement dans la terminologie récente des méthodes numériques). Une **subdivision** du segment $[a, b]$ est une décomposition de $[a, b]$ en sous-intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ pour $i = 1, \dots, n$ correspondant à la donnée d'une **suite finie** de points $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ telle que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On note par $\mathcal{P}_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ est appelé **intervalle de la subdivision**. Le **pas** ou **module** de la subdivision est la plus grande parmi les longueurs $h_i = x_i - x_{i-1}$ de ses intervalles

$$\delta(p) = \max_{i=1, \dots, n} h_i.$$

Une fonction en escalier sur le segment $[a, b]$ est une fonction f définie sauf au plus sur un nombre fini de points de $[a, b]$ ayant la propriété suivante : il existe une subdivision $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ telle que la restriction de f à chaque intervalle de la subdivision est constante, c'est à dire

$$f(x) = c_i, \quad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Nous désignerons l'**ensemble des fonctions en escalier** sur $[a, b]$ par $\mathcal{E}([a, b])$. Il est immédiat que $\mathcal{E}([a, b])$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}([a, b])$.

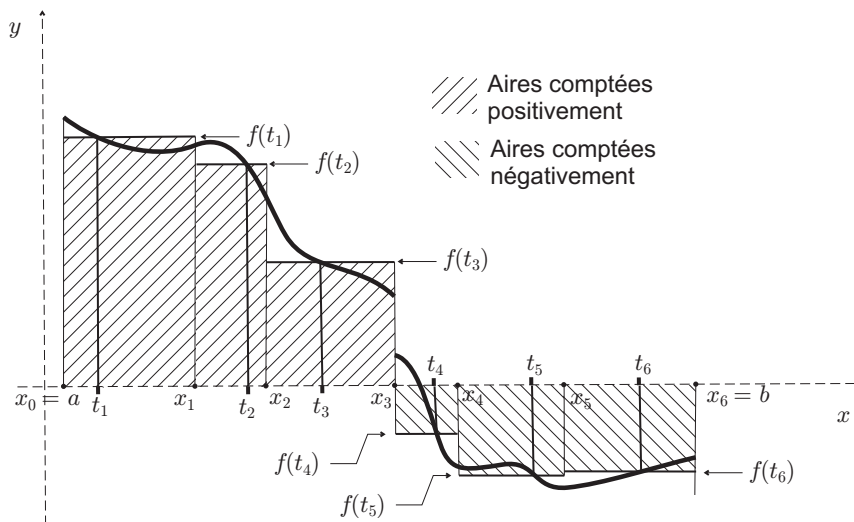
Il est alors naturel de définir l'intégrale d'une fonction en escalier f donnée comme ci-dessus par

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i.$$

Il faut, cependant, vérifier que cette définition est consistante, c'est à dire qu'elle ne donne pas une valeur différente lorsqu'on utilise une autre subdivision pour définir la fonction f . Les outils que l'on va introduire vont servir à s'assurer de la consistance de cette définition de l'intégrale et l'étendre à des fonctions plus générales.

3. Définition de l'intégrale

3.1. Sommes de Riemann. Une approche naturelle pour définir l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{B}([a, b])$ est de l'approcher de façon de plus en plus précise en prenant des subdivisions p avec un pas de plus en plus petit par des fonctions en escalier qui sont égales à une valeur prise par f sur chaque intervalle de la subdivision. Une illustration en est donnée par la figure suivante.



On est amené ainsi à définir la **somme de Riemann** d'une fonction $f \in \mathcal{B}([a, b])$ associée à une subdivision $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ et à une suite $v = \{t_1, \dots, t_n\}$ (qu'on suppose

pour simplifier implicitement incluse dans \mathcal{D}_f)

$$R(f, p, v) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i).$$

Il est clair que $R(f, p, v)$ est l'intégrale (introduite mais dont la consistance n'a pas encore été établie en toute rigueur) de la fonction en escalier qui vaut $f(t_i)$ sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision p .

On dit alors que f est **intégrable au sens de Riemann** (ou plus rapidement **intégrable**) sur $[a, b]$ s'il existe un nombre réel noté

$$\int_a^b f(x) dx$$

et appelé intégrale de f entre a et b (ou sur le segment $[a, b]$) tel que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$

$$\forall p \in \mathcal{P}_{a,b}, \delta(p) \leq \eta, \forall v \subset \mathcal{D}_f \text{ associée à } p \implies \left| R(f, p, v) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

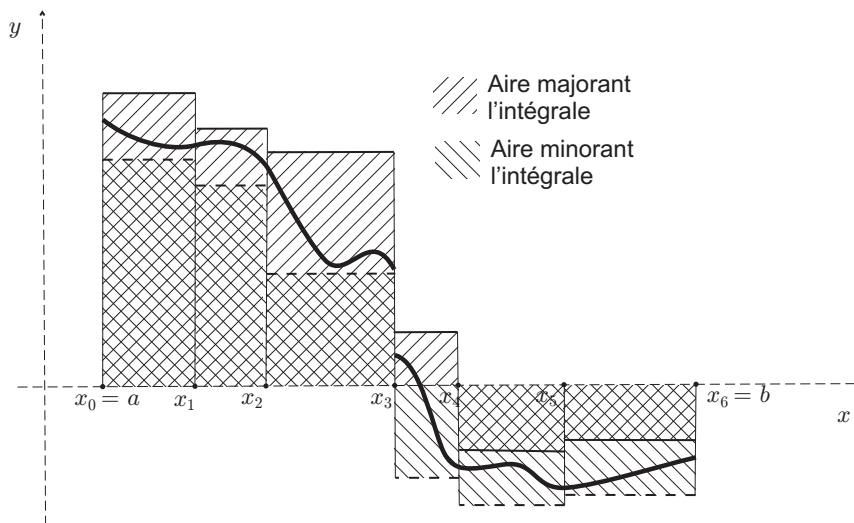
Autrement dit, f est intégrable si les sommes de Riemann $R(f, p, v)$ tendent vers une limite finie lorsque $\delta(p) \rightarrow 0$.

On désignera par $\mathcal{I}([a, b])$ le sous-ensemble des fonctions $f \in \mathcal{B}([a, b])$ qui sont intégrables sur $[a, b]$.

Malheureusement, si cette notion d'intégrale est facile à définir, elle est parfois difficile à utiliser pour caractériser les fonctions intégrables et pour établir certaines propriétés des intégrales. Nous allons ci-dessus introduire une seconde définition de l'intégrale et montrer qu'elle est équivalente à celle qui vient d'être définie.

3.2. Sommes de Darboux. Une autre idée pour définir l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{B}([a, b])$ est de l'encadrer *de plus en plus finement* (dans un sens vague pour le moment) par une fonction en escalier qui la majore et par une fonction en escalier qui la

minore comme la figure ci-dessous en donne un aperçu.



Soit $f \in \mathcal{B}([a, b])$. A toute subdivision $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$, on associe la **somme de Darboux supérieure**

$$S(f, p) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i(f), \quad \text{avec } M_i(f) = \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[\cap \mathcal{D}_f} f(x)$$

et la **somme de Darboux inférieure**

$$s(f, p) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i(f), \quad \text{avec } m_i(f) = \inf_{x \in]x_{i-1}, x_i[\cap \mathcal{D}_f} f(x).$$

Il est important de noter que les bornes supérieures et inférieures précédentes, désignées respectivement pour alléger les notations par M_i et m_i quand elles ne correspondent qu'à une seule fonction et qu'il n'y a ainsi aucun risque d'ambiguïté, sont finies car $f \in \mathcal{B}([a, b])$. Cela entraîne ainsi que $S(f, p)$ et $s(f, p)$ sont définies et vérifient, par construction,

$$s(f, p) \leq S(f, p).$$

L'importance des sommes de Darboux vient de leur lien avec la relation d'ordre (non totale) suivante sur l'ensemble des subdivisions. On dit que la subdivision $q = \{y_j\}_{j=0}^{j=m}$ est **plus fine** que p si au sens des ensembles on a $q \supset p$. Autrement dit, une subdivision plus fine q est obtenue en ajoutant à tout intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de p , une sous-suite de points de $q : x_{i-1} = y_{j_i} < y_{j_i+1} < \dots < x_i = y_{j_i+n_i}$ telle que $q'_i = \{y_{j_i+k}\}_{k=0}^{k=n_i} \in \mathcal{P}_{x_{i-1}, x_i}$ (voir figure ci-dessous).



Si p et q sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$, elles ne sont généralement pas comparables mais on peut construire la subdivision $p \cup q$ qui est plus fine que p et plus fine que q . On peut alors énoncer et démontrer la propriété fondamentale suivante.

PROPOSITION 2.1. *Si $f \in \mathcal{B}([a, b])$ et p et $q \in \mathcal{P}_{a,b}$ telles que $q \supset p$, on a*

$$s(f, p) \leq s(f, q) \leq S(f, q) \leq S(f, p).$$

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) Pour distinguer les bornes supérieures et inférieures relatives à respectivement à p et q , on note pour $\alpha < \beta$ appartenant à $[a, b]$

$$m(\alpha, \beta) = \inf_{x \in]\alpha, \beta[\cap \mathcal{D}_f} f(x), \quad M(\alpha, \beta) = \sup_{x \in]\alpha, \beta[\cap \mathcal{D}_f} f(x).$$

Sachant que $]y_{j_i+k-1}, y_{j_i+k}[\subset]x_{i-1}, x_i[$ pour $k = 1, \dots, n_i$, on a

$$m(x_{i-1}, x_i) \leq m(y_{j_i+k-1}, y_{j_i+k}) \text{ et } M(y_{j_i+k-1}, y_{j_i+k}) \leq M(x_{i-1}, x_i)$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} s(f, p) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m(x_{i-1}, x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} (y_{j_i+k} - y_{j_i+k-1}) m(x_{i-1}, x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} (y_{j_i+k} - y_{j_i+k-1}) m(y_{j_i+k-1}, y_{j_i+k}) = s(f, q) \\ &\leq S(f, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} (y_{j_i+k} - y_{j_i+k-1}) M(y_{j_i+k-1}, y_{j_i+k}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_i} (y_{j_i+k} - y_{j_i+k-1}) M(x_{i-1}, x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M(x_{i-1}, x_i) = S(f, p). \end{aligned}$$

□

Si $f \in \mathcal{B}([a, b])$, la propriété donnée par la proposition précédente assure que l'on a

$$-\infty < \sup_{p \in \mathcal{P}_{a,b}} s(f, p) = \sigma_{a,b}(f) \leq \Sigma_{a,b}(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_{a,b}} S(f, p) < +\infty.$$

Les nombres $\sigma_{a,b}(f)$ et $\Sigma_{a,b}(f)$ sont respectivement l'**intégrale inférieure** de f sur $[a, b]$ et l'**intégrale supérieure** de f sur $[a, b]$.

Une fonction $f \in \mathcal{B}([a, b])$ sera dite **intégrable au sens de Darboux** sur $[a, b]$ si $\sigma_{a,b}(f) = \Sigma_{a,b}(f)$. Cette valeur commune est appelé l'**intégrale** de f sur $[a, b]$ et est notée provisoirement

$$D_{a,b}(f) = \sigma_{a,b}(f) = \Sigma_{a,b}(f).$$

Le critère suivant, dont la démonstration est immédiate à partir de la définition de l'intégrale au sens de Darboux, est très utile pour montrer qu'une fonction est intégrable au sens de Darboux.

THÉORÈME 2.1. *Une fonction $f \in \mathcal{B}([a, b])$ est intégrable au sens de Darboux sur $[a, b]$ si et seulement si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathcal{P}_{a,b} \text{ tel que } S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon.$$

REMARQUE 2.1. *L'inclusion de l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Darboux dans $\mathcal{B}([a, b])$ est stricte. Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Comme entre deux rationnels quelconques, on peut trouver une infinité d'irrationnels et qu'entre deux irrationnels quelconques on peut aussi trouver une infinité de rationnels, il en résulte que pour tout $p \in \mathcal{P}_{0,1}$, on a

$$s(f, p) = 0 \text{ et } S(f, p) = 1,$$

ce qui conduit à

$$\sigma_{0,1}(f) = 0 < \Sigma_{0,1}(f) = 1.$$

Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Darboux. On montrera, sur le même principe qu'elle n'est pas non plus intégrable (au sens de Riemann).

*Pour pouvoir effectuer certaines analyses théoriques requérant des passages à la limite sur des intégrales, la notion précédente d'intégrale n'est suffisante. On est obligé alors de recourir à une construction beaucoup plus élaborée de la notion d'intégrale appelée l'**intégrale de Lebesgue**. Ces complications ne sont cependant pas nécessaires pour les intégrales qu'on rencontre généralement en pratique.*

3.3. Equivalence des intégrales de Riemann et Darboux. Dans cette sous-section, seul le théorème d'équivalence des intégrales au sens de Riemann et de Darboux est au programme.

Les deux définitions de l'intégrale précédentes sont en fait identiques comme on va l'établir dans ce qui suit. Nous avons d'abord le lemme suivant qui montre que toute fonction intégrable est aussi intégrable au sens de Darboux et qui établit une relation entre l'écart entre la convergence des sommes de Riemann et celle des sommes de Darboux.

LEMME 2.1. *Avec les notations générales précédentes, si ε et $\eta > 0$ et $f \in \mathcal{I}([a, b])$ sont tels que*

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{P}_{a,b}, \forall v = \{t_i\}_{i=1}^{i=n} \text{ associée, } \delta(p) \leq \eta \\ \implies \left| R(f, p, v) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon/2 \end{aligned}$$

alors,

$$\forall p \in \mathcal{P}_{a,b}, \delta(p) \leq \eta \implies S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon.$$

En particulier, toute fonction intégrable est aussi intégrable au sens de Darboux.

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) Soit donc $p \in \mathcal{P}_{a,b}$ tel que $\delta(p) \leq \eta$. Par définition de $m_i = \inf_{x \in]x_{i-1}, x_i[\cap \mathcal{D}_f} f(x)$ et de $M_i = \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[\cap \mathcal{D}_f} f(x)$, on peut trouver des suites $\{s_{i,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ et $\{t_{i,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ telles que

$$s_{i,m} \text{ et } t_{i,m} \in]x_{i-1}, x_i[\text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} f(s_{i,m}) = m_i, \lim_{m \rightarrow \infty} f(t_{i,m}) = M_i.$$

Notons $v_m = \{s_{i,m}\}_{i=1}^{i=n}$ et $w_m = \{t_{i,m}\}_{i=1}^{i=n}$, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R(f, p, v_m) = s(f, p) \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} R(f, p, w_m) = S(f, p).$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
S(f, p) - s(f, p) &= S(f, p) - R(f, p, w_m) + R(f, p, w_m) - \int_a^b f(x) dx \\
&\quad + \int_a^b f(x) dx - R(f, p, v_m) + R(f, p, v_m) - s(f, p) \\
&\leq S(f, p) - R(f, p, w_m) + \left| R(f, p, w_m) - \int_a^b f(x) dx \right| \\
&\quad + \left| \int_a^b f(x) dx - R(f, p, v_m) \right| + R(f, p, v_m) - s(f, p) \\
&\leq S(f, p) - R(f, p, w_m) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + R(f, p, v_m) - s(f, p)
\end{aligned}$$

Passons à la limite lorsque $m \rightarrow \infty$ dans le second membre de la dernière inégalité. On obtient

$$S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon.$$

La seconde partie du lemme est une conséquence directe du critère d'intégrabilité au sens de Darboux à l'aide des sommes de Darboux donné ci-dessus. \square

On a alors le théorème suivant qui établit l'équivalence des intégrales au sens de Riemann et de Darboux.

THÉORÈME 2.2. *L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Darboux coïncide avec $\mathcal{I}([a, b])$ et pour tout f dans l'un des ces ensembles, on a*

$$\int_a^b f(x) dx = D_{a,b}(f).$$

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) Le lemme précédent établit que toute fonction intégrable est intégrable au sens de Darboux.

Soit donc f intégrable au sens de Darboux. On va montrer que $f \in \mathcal{I}([a, b])$ et que

$$\int_a^b f(x) dx = D_{a,b}(f),$$

ce qui démontrera le théorème. On a donc $\sigma_{a,b}(f) = \Sigma_{a,b}(f) = D_{a,b}(f)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver une subdivision

$$p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$$

telle que

$$S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon/2 \text{ et } s(f, p) \leq D_{a,b}(f) \leq S(f, p).$$

Soient $M > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a, b]$$

et $\eta > 0$ qui soit en même temps inférieur à $\varepsilon/6nM$ et à $\min_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})/2$. Nous allons montrer que si

$$q = \{y_j\}_{j=0}^{j=m} \in \mathcal{P}_{a,b}$$

vérifie $\delta(q) \leq \eta$ et si $v = \{t_j\}_{j=1}^{j=n}$ est une suite $\subset \mathcal{D}_f$ associée à q , la somme de Riemann

$$R(f, q, v) = \sum_{j=1}^m f(t_j)(y_j - y_{j-1})$$

vérifie

$$|R(f, q, v) - D_{a,b}(f)| \leq \varepsilon.$$

Pour cela, à chaque i tel que x_i est dans un intervalle de la subdivision q , on associe l'indice j_i correspondant de cet intervalle, c'est à dire

$$y_{j_i-1} < x_i < y_{j_i}.$$

On note par I l'ensemble de ces indices i . On peut réécrire alors la somme de Riemann $R(f, q, v)$ sous la forme

$$\begin{aligned} R(f, q, v) &= R(f, \tilde{q}, \tilde{v}) + \\ &+ \sum_{i \in I} f(t_{j_i})(y_{t_{j_i}} - y_{t_{j_i-1}}) - f(t_{j_i-1})(x_i - y_{j_i-1}) - f(t_{j_i+1})(y_{j_i+1} - x_i) \end{aligned}$$

où

$$R(f, \tilde{q}, \tilde{v}) = \sum_{j=1}^{m - \text{Card}(I)} f(\tilde{t}_j)(\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1})$$

est une somme de Riemann relative à une subdivision \tilde{q} plus fine que p et à une suite associée \tilde{v} . En revenant à la définition des sommes de Darboux, on obtient donc

$$s(f, p) \leq R(f, \tilde{q}, \tilde{v}) \leq S(f, p)$$

et par suite

$$|R(f, \tilde{q}, \tilde{v}) - D_{a,b}(f)| \leq \varepsilon/2.$$

Il en résulte

$$|R(f, q, v) - D_{a,b}(f)| \leq |R(f, \tilde{q}, \tilde{v}) - D_{a,b}(f)| + \\ \left| \sum_{i \in I} f(t_{j_i})(y_{t_j} - y_{t_{j-1}}) - f(t_{j_i-1})(x_i - y_{j_i-1}) - f(t_{j_i+1})(y_{j_i+1} - x_i) \right|$$

soit par inégalité triangulaire et majoration par M des valeurs absolues des $f(t_{j_i})$

$$|R(f, q, v) - D_{a,b}(f)| \leq \varepsilon/2 + 3M \text{Card}(I)\varepsilon/6nM \leq \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve du théorème. \square

4. Propriétés des fonctions intégrables

4.1. Relation de Chasles. On a tout d'abord la propriété importante, donnée par le théorème suivant, qui va permettre de simplifier la vérification qu'une fonction est intégrable ou décomposer le calcul d'une intégrale en subdivisant l'intervalle d'intégration. Elle est appelée **relation de Chasles**.

THÉORÈME 2.3. *Soit $f \in \mathcal{B}([a, b])$ et $a < c < b$. Si on note par $f_1 = f|_{\mathcal{D}_f \cap [a, c]}$ et $f_2 = f|_{\mathcal{D}_f \cap [c, b]}$, alors $f \in \mathcal{I}([a, b])$ si et seulement si $f_1 \in \mathcal{I}([a, c])$ et $f_2 \in \mathcal{I}([c, b])$; de plus, on a dans ce cas*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_2(x) dx$$

soit, en sous-entendant les restrictions comme c'est presque toujours le cas en pratique,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) Si $p \in \mathcal{P}_{a,b}$, alors $q = p \cup \{c\} \in \mathcal{P}_{a,b}$ et q est, par construction plus fine que p . Notons alors

$$q_1 = \{x \in q \mid x \leq c\} \text{ et } q_2 = \{x \in q \mid x \geq c\};$$

On $q_1 \in \mathcal{P}_{a,c}$ et $q_2 \in \mathcal{P}_{c,b}$ et, directement, à partir de la définition des sommes de Darboux

$$s(f, p) \leq s(f, q) = s(f_1, q_1) + s(f_2, q_2) \\ \leq \sigma_{a,c}(f_1) + \sigma_{c,b}(f_2) \leq \Sigma_{a,c}(f_1) + \Sigma_{c,b}(f_2) \\ \leq S(f_1, q_1) + S(f_2, q_2) = S(f, q) \leq S(f, p).$$

Ces inégalités montrent que $\sigma_{a,c}(f_1) + \sigma_{c,b}(f_2)$ est un majorant de l'ensemble $\{s(f, p), p \in \mathcal{P}_{a,b}\}$ et que $\Sigma_{a,c}(f_1) + \Sigma_{c,b}(f_2)$ est un minorant de $\{S_p(f), p \in \mathcal{P}_{a,b}\}$. Il résulte alors de la définition de la borne supérieure et de la borne inférieure que

$$\sigma_{a,b}(f) \leq \sigma_{a,c}(f_1) + \sigma_{c,b}(f_2) \leq \Sigma_{a,c}(f_1) + \Sigma_{c,b}(f_2) \leq \Sigma_{a,b}(f).$$

Si donc $f \in \mathcal{I}([a, b])$, on a $\sigma_{a,b}(f) = \Sigma_{a,b}(f)$ et par suite

$$\sigma_{a,c}(f_1) + \sigma_{c,b}(f_2) = \Sigma_{a,c}(f_1) + \Sigma_{c,b}(f_2)$$

ou encore

$$(\Sigma_{a,c}(f_1) - \sigma_{a,c}(f_1)) + (\Sigma_{c,b}(f_2) - \sigma_{c,b}(f_2)) = 0.$$

Mais comme $\Sigma_{a,c}(f_1) - \sigma_{a,c}(f_1) \geq 0$ et $\Sigma_{c,b}(f_2) - \sigma_{c,b}(f_2) \geq 0$, ceci implique que

$$\sigma_{a,c}(f_1) = \Sigma_{a,c}(f_1) \text{ et } \sigma_{c,b}(f_2) = \Sigma_{c,b}(f_2)$$

et donc que $f_1 \in \mathcal{I}([a, c])$ et $f_2 \in \mathcal{I}([c, a])$ et que la relation de Chasles est vérifiée.

Si maintenant $q_1 \in \mathcal{P}_{a,c}$ et $q_2 \in \mathcal{P}_{c,b}$, $q = q_1 \cup q_2 \in \mathcal{P}_{a,b}$ et

$$\begin{aligned} s(f, q) &= s(f_1, q_1) + s(f_2, q_2) \leq \sigma_{a,b}(f) \\ &\leq \Sigma_{a,b}(f) \leq S(f, q) = S(f_1, q_1) + S(f_2, q_2). \end{aligned}$$

Les propriétés des bornes supérieures et inférieures montrent alors que

$$\sigma_{a,c}(f_1) + \sigma_{c,b}(f_2) \leq \sigma_{a,b}(f) \leq \Sigma_{a,b}(f) \leq \Sigma_{a,c}(f_1) + \Sigma_{c,b}(f_2)$$

Si donc $f_1 \in \mathcal{I}([a, c])$ et $f_2 \in \mathcal{I}([c, a])$, il vient

$$\sigma_{a,b}(f) = \Sigma_{a,b}(f) = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_2(x) dx.$$

□

Par application itérée de la propriété précédente, on la généralise immédiatement comme suit.

COROLLAIRE 2.1. *Soit $f \in \mathcal{B}([a, b])$ et $p \in \mathcal{P}_{a,b}$; $f \in \mathcal{I}([a, b])$ si et seulement si $f|_{x_{i-1}, x_i} \in \mathcal{I}([x_{i-1}, x_i])$ $i = 1, \dots, n$ et dans ce cas, on a*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

On en déduit la consistance de la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier donnée plus haut.

COROLLAIRE 2.2. *Toute fonction en escalier f sur $[a, b]$ est intégrable et son intégrale est donnée par*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

où $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ et $f(x) = c_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$.

DÉMONSTRATION. Si p est réduite à $\{a, b\}$ et f est une fonction constante égale à c sur $]a, b[$, on a directement, sachant que toute subdivision $q \in \mathcal{P}_{a,b}$ est plus fine que p

$$s(f, p) = c(b - a) \leq s(f, q) \leq S(f, q) \leq S(f, p) = c(b - a),$$

ce qui démontre le corollaire pour $n = 1$. Le cas général s'obtient alors en appliquant la relation de Chasles. \square

4.2. Opérations sur les intégrales.

PROPOSITION 2.2. *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(1) *Si f et $g \in \mathcal{I}([a, b])$, alors $f + g \in \mathcal{I}([a, b])$ et*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(2) *Si $f \in \mathcal{I}([a, b])$ et λ est une constante, alors $\lambda f \in \mathcal{I}([a, b])$ et*

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la somme de Riemann

$$R(f + g, p, v) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(f(t_i) + g(t_i))$$

relative à

$$p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b} \text{ et à } v = \{t_1, \dots, t_n\} \text{ associée.}$$

On a

$$\begin{aligned} R(f + g, p, v) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(t_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})g(t_i) \\ &= R(f, p, v) + R(g, p, v). \end{aligned}$$

Comme $f, g \in \mathcal{I}([a, b])$, il vient

$$\begin{aligned} \lim_{\delta(p) \rightarrow 0} R(f + g, p, v) &= \lim_{\delta(p) \rightarrow 0} (R(f, p, v) + R(g, p, v)) \\ &= \lim_{\delta(p) \rightarrow 0} R(f, p, v) + \lim_{\delta(p) \rightarrow 0} R(g, p, v) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Par définition de l'intégrale au sens de Riemann, ceci montre que $f + g \in \mathcal{I}([a, b])$ et établit la formule donnée dans l'énoncé.

La seconde propriété s'établit de façon tout à fait analogue. □

4.3. Inégalités sur les intégrales.

PROPOSITION 2.3. *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(1) *Soit $f \in \mathcal{I}([a, b])$. Si $f \geq 0$, alors*

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

(2) *Soient $f, g \in \mathcal{I}([a, b])$. Si $f \geq g$, alors*

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Pour établir la première propriété, il suffit de prendre $p = \{a, b\}$ et de remarquer que

$$m_1 = \inf_{x \in \mathcal{D}_f \cap]a, b[} f(x) \geq 0.$$

On a ensuite

$$0 \leq m_1(b - a) = s(f, p) \leq \sigma_{a,b}(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

La seconde propriété se déduit de la première par

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0.$$

□

PROPOSITION 2.4. Si $f \in \mathcal{I}([a, b])$, alors $|f| \in \mathcal{I}([a, b])$ et, on a l'inégalité dite triangulaire,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $p = \{x_i, i = 0, \dots, n\} \in \mathcal{P}_{a,b}$ tel que

$$S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon$$

avec

$$s(f, p) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, p) = \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i(f) = \inf_{x \in \mathcal{D}_f \cap]x_{i-1}, x_i[} f(x), \quad M_i(f) = \sup_{x \in \mathcal{D}_f \cap]x_{i-1}, x_i[} f(x).$$

Rappelons que l'on a noté

$$m_i(|f|) = \inf_{x \in \mathcal{D}_f \cap]x_{i-1}, x_i[} |f(x)|, \quad M_i(|f|) = \sup_{x \in \mathcal{D}_f \cap]x_{i-1}, x_i[} |f(x)|.$$

Soient $(s_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ contenues dans $\mathcal{D}_f \cap]x_{i-1}, x_i[$ et telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(s_{i,n})| = m_i(|f|), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(t_{i,n})| = M_i(|f|)$$

On a donc

$$\left| |f(s_{i,n})| - |f(t_{i,n})| \right| \leq |f(s_{i,n}) - f(t_{i,n})| \leq M_i - m_i$$

soit en passant à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \leq M_i(f) - m_i(f).$$

On obtient donc

$$S(|f|, p) - s(|f|, p) = \sum_{i=1}^n (M_i(|f|) - m_i(|f|))(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, p) - s(f, p) \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que $|f| \in \mathcal{I}([a, b])$. Il suffit maintenant d'observer qu'on a $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$ et d'appliquer la proposition précédente pour arriver à

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

qui est une façon équivalente d'exprimer l'inégalité de l'énoncé. \square

5. Ensembles de fonctions intégrables

Nous allons dans cette partie caractériser quelques classes de fonctions intégrables.

5.1. Ensemble de fonctions monotones. Rappelons la définition suivante. On dit qu'une fonction f , définie sauf peut être en un nombre fini de points d'un intervalle I , est **monotone** sur I si son **taux d'accroissement**, donné pour $x \neq y \in I$ et dans le domaine de définition de f par $(f(x) - f(y)) / (x - y)$, reste de signe constant. La fonction est **croissante** si son taux d'accroissement reste ≥ 0 et décroissante s'il reste ≤ 0 .

Les fonctions croissantes sur I possèdent la propriété suivante : si x est à l'intérieur de I (i.e., $\exists \ell > 0$ tel que $]x - \ell, x + \ell[\subset I$), alors f admet une limite à gauche $f(x^-)$ en x et une limite à droite $f(x^+)$ en x et

$$f(x^-) \leq f(x^+).$$

On vérifie directement que si $f \in \mathcal{B}([a, b])$ et si elle est croissante sur $]a, b[$, alors pour toute subdivision $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$, on a

$$m_i = \inf_{x \in \mathcal{D}_f \cap]x_{i-1}, x_i[} = f(x_{i-1}^+), \quad M_i = \sup_{x \in \mathcal{D}_f \cap]x_{i-1}, x_i[} = f(x_i^-).$$

On a une propriété analogue avec échange des valeurs $f(x_{i-1}^+)$ et $f(x_i^-)$ pour m_i et M_i pour des fonctions décroissantes.

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2.4. *Si $f \in \mathcal{B}([a, b])$ et est monotone sur $]a, b[$, alors $f \in \mathcal{I}([a, b])$.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer que f est croissante, sinon on travaille avec $-f$.

Soit $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$. On a alors

$$\begin{aligned} S(f, p) - s(f, p) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \delta(p) \sum_{i=1}^n (f(x_i^-) - f(x_{i-1}^+)) \\ &= \delta(p) (f(x_n^-) - (f(x_{n-1}^+) - f(x_{n-1}^-)) - \cdots \\ &\quad - (f(x_1^+) - f(x_1^-)) - f(x_0^+)) \end{aligned}$$

Comme $f(x_i^+) - f(x_i^-) \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, (n-1)$, il vient

$$S(f, p) - s(f, p) \leq \delta(p)(f(b^-) - f(a^+)).$$

D'où le résultat en faisant tendre $\delta(p) \rightarrow 0$. □

Le théorème précédent, avec la relation de Chasles, permet de prouver que la quasi-totalité des fonctions bornées qu'on rencontre en pratique sont intégrables.

COROLLAIRE 2.3. *Soit $f \in \mathcal{B}([a, b])$. S'il existe $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ telle que*

$$f \text{ est monotone sur }]x_{i-1}, x_i[\text{ pour } i = 1, \dots, n,$$

alors $f \in \mathcal{I}([a, b])$.

DÉMONSTRATION. Conséquence directe du théorème précédent et de la relation de Chasles. □

5.2. Ensemble de fonctions continues. On a l'important théorème suivant qui est une conséquence directe du théorème de Heine.

THÉORÈME 2.5. *Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que f est bornée car elle est continue sur un segment. Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème de Heine permet d'affirmer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/(b - a).$$

Soit donc $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ telle que $\delta(p) \leq \eta$. Comme f est continue,

$$m_i = \inf_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(s_i) \text{ avec } x_{i-1} \leq s_i \leq x_i$$

et de même $M_i = \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x) = f(t_i)$ avec $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, avec donc

$$|t_i - s_i| \leq x_i - x_{i-1} \leq \delta(p) \leq \eta.$$

Il vient alors

$$M_i - m_i = |f(t_i) - f(s_i)| \leq \varepsilon / (b - a)$$

induisant que

$$\begin{aligned} S(f, p) - s(f, p) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

La relation de Chasles permet alors d'étendre immédiatement le théorème précédent aux fonctions continues par morceaux.

COROLLAIRE 2.4. *Soit f définie sauf au plus en un nombre fini de points d'un segment $[a, b]$. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $f \in \mathcal{I}([a, b])$.*

DÉMONSTRATION. Dire que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ revient à dire qu'il existe $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ telle que $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ admet un prolongement par continuité à $[x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On obtient alors directement le corollaire à partir du théorème précédent et de la relation de Chasles. □

La propriété suivante des intégrales de fonctions continues est souvent utile.

PROPOSITION 2.5. *Soit f continue sur $[a, b]$. Si*

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \text{ et } \int_a^b f(x) dx = 0$$

alors

$$f(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

DÉMONSTRATION. On va démontrer la contraposée. S'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$, les propriétés des limites vues au chapitre 1 montrent qu'il existe un sous-intervalle $]y, y + \ell[\subset [a, b]$ où $f(x) > f(c)/2, \forall x \in]y, y + \ell[$. On complète $]y, y + \ell[$ en une subdivision $p \in \mathcal{P}_{a,b}$. On a ainsi

$$0 < \ell f(c)/2 \leq ((y + \ell) - y) \inf_{x \in]y, y + \ell[} f(x) \leq s(f, p) \leq \sigma_{a,b}(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

ce qui établit que

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

□

5.3. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Le but de cette partie est d'établir une inégalité fondamentale, appelée **inégalité de Cauchy-Schwarz**. Cette inégalité intervient de façon essentielle dans de nombreuses questions théoriques et pratiques.

On a d'abord le lemme fondamental suivant dont la démonstration peut être admise en première lecture.

LEMME 2.2. *Si f et g sont dans $\mathcal{I}([a, b])$, alors fg est dans $\mathcal{I}([a, b])$.*

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) On se ramène d'abord au cas où $f, g \geq 0$. En effet, si ce n'est pas le cas, comme $f, g \in \mathcal{B}([a, b])$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, suffisamment grand, de sorte que

$$\lambda + f \geq 0, \lambda + g \geq 0.$$

Comme $fg = (\lambda + f)(\lambda + g) - \lambda^2 - \lambda(f + g)$, les opérations sur les intégrales montrent que $fg \in \mathcal{I}([a, b])$ si et seulement si $(\lambda + f)(\lambda + g) \in \mathcal{I}([a, b])$. On peut donc supposer

que $f, g \geq 0$. Soit alors $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$. Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i(f)m_i(g)(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n m_i(fg)(x_i - x_{i-1}) = s(fg, p) \\ &\leq S(fg, p) = \sum_{i=1}^n M_i(fg)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(f)M_i(g)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) M_i(g)(x_i - x_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n m_i(f)M_i(g)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} S(fg, p) - s(fg, p) &\leq \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) M_i(g)(x_i - x_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n m_i(f)(M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Si $M \geq \max \{ \sup_{x \in [a,b]} f(x), \sup_{x \in [a,b]} g(x) \}$, il vient donc

$$\begin{aligned} S(fg, p) - s(fg, p) &\leq M \left(\sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n (M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) \right) \\ &= M(S(f, p) - s(f, p) + S(g, p) - S(g, p)). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons p_1 et p_2 tels que

$$S(f, p_1) - s(f, p_1) \leq \frac{\varepsilon}{2M}, \quad S(g, p_2) - s(g, p_2).$$

Si $p = p_1 \cup p_2$, on a

$$S(fg, p) - s(fg, p) \leq M \left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \right) = \varepsilon.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. □

On peut alors démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

PROPOSITION 2.6. *Si f et g sont dans $\mathcal{I}([a, b])$, alors fg , f^2 et g^2 sont dans $\mathcal{I}([a, b])$ et on a*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

DÉMONSTRATION. Le fait que fg , f^2 et g^2 sont dans $\mathcal{I}([a, b])$ est une conséquence directe du lemme précédent. Pour montrer l'inégalité, on définit pour t quelconque dans \mathbb{R}

$$r(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2 dx$$

car là aussi $x \rightarrow f(x) + tg(x) \in \mathcal{I}([a, b])$. On a

$$r(t) = At^2 + 2Bt + C$$

avec

$$A = \int_a^b (g(x))^2 dx, \quad B = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad C = \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Comme $r(t)$ est l'intégrale d'une fonction ≥ 0 , on $r(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci entraîne que le trinôme $r(t)$ ne peut pas avoir deux racines réelles distinctes, ou encore que

$$4B^2 - 4AC \leq 0,$$

ce qui est exactement l'inégalité à démontrer. \square

6. Le premier théorème de la moyenne et ses conséquences

6.1. Le premier théorème de la moyenne et ses variantes. Le premier théorème de la moyenne sous sa forme la plus générale s'énonce comme suit.

THÉORÈME 2.6. *Si f et g sont dans $\mathcal{I}([a, b])$, g étant de plus ≥ 0 sur $[a, b]$, alors il existe K*

$$m = \inf_{x \in [a, b] \cap \mathcal{D}_f} f(x) \leq K \leq M = \sup_{x \in [a, b] \cap \mathcal{D}_f} f(x)$$

tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = K \int_a^b g(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que le lemme ci-dessus sur l'intégrale du produit de deux fonctions intégrables assure que $fg \in \mathcal{I}([a, b])$. Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b] \cap \mathcal{D}_f$, il vient

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Les inégalités sur les intégrales donnent alors immédiatement

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Si $\int_a^b g(x) dx = 0$, ces inégalités donnent $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ et donc que cette intégrale s'écrit bien sous la forme donnée par l'énoncé avec une constante K quelconque, en particulier comprise entre m et M . Dans le cas contraire, il suffit de poser

$$K = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

pour avoir le résultat. □

Le corollaire suivant décrit quelques cas particuliers importants.

COROLLAIRE 2.5. *Sous les conditions du théorème précédent,*

(1) *si $g = 1$, alors*

$$\int_a^b f(x) dx = K(b - a) ;$$

(2) *si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

et, en particulier si $g = 1$,

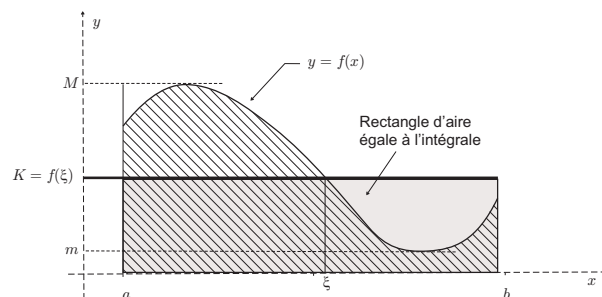
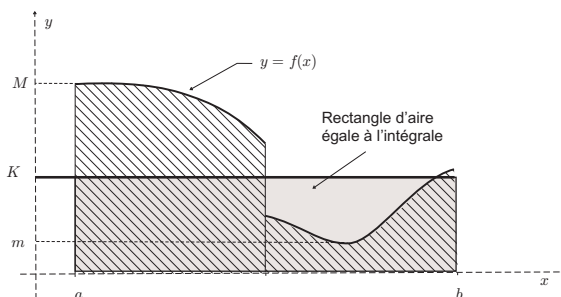
$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi).$$

DÉMONSTRATION. Immédiate. □

REMARQUE 2.2. *Si $g = 1$ et $f \geq 0$, le 1^{er} théorème de la moyenne exprime qu'il existe un rectangle de base $b - a$ et de hauteur K*

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq K \leq M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

dont l'aire est égale à $\int_a^b f(x)dx$. Ce nombre K est égal à une valeur prise par f dans l'intervalle $[a, b]$ lorsque f est continu sur $[a, b]$ par le théorème de Weierstrass (voir figure ci-dessous).



6.2. Continuité d'une intégrale par rapport à ses bornes. Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points et $a \in I$. On suppose que f est une fonction définie sur I sauf éventuellement en un nombre fini de ses points et que pour tout $x \in I$, f est intégrable sur $[a, x]$ si $x > a$ et sur $[x, a]$ si $x < a$. On utilise la convention usuelle suivante qui permet d'étendre la relation de Chasles pour les c en dehors de l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^x f(t) dt = - \int_x^a f(t) dt.$$

La variable sous le signe intégral est dite "muette" : elle sert juste à préciser la fonction qu'on intègre, le symbole qu'on utilise pour la désigner n'ayant aucune importance. Par exemple, on utilise ici la variable t pour distinguer la variable d'intégration de la borne de l'intervalle. Comme conséquence du premier théorème de la moyenne, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2.7. *Sous les conditions générales ci-dessus, la fonction F définie sur I par*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in I)$$

est continue sur I .

DÉMONSTRATION. Cela revient à montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x).$$

Supposons que $0 < h \leq h_0$ et que $x + h_0 \in I$. La démonstration pour $h < 0$ est analogue.

La relation de Chasles donne

$$F(x+h) = F(x) + \int_x^{x+h} f(x) dx.$$

Le premier théorème de la moyenne donne alors

$$F(x+h) = F(x) + hK_h$$

avec

$$m_h = \inf_{t \in [x, x+h]} f(t) \leq K_h \leq M_h = \sup_{t \in [x, x+h]} f(t)$$

Comme f est bornée sur $[x, x+h_0]$, on a

$$m_0 = \inf_{t \in [x, x+h_0]} f(t) \leq f(t) \leq M_0 = \sup_{t \in [x, x+h_0]} f(t).$$

De plus comme $[x, x + h] \subset [x, x + h_0]$ pour $0 < h \leq h_0$, il vient

$$m_0 \leq m_h \leq M_h \leq M_0.$$

Il vient donc

$$F(x + h) - F(x) = hK_h$$

avec K_h qui reste borné lorsque h varie dans $[0, h_0]$. Les propriétés des limites montrent alors que

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x + h) = F(x),$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

On a le théorème suivant qui montre qu'on obtient un meilleur comportement de la dépendance d'une intégrale par rapport à sa borne si la fonction intégrée est continue sur un voisinage de cette borne.

THÉORÈME 2.8. *Sous les conditions générales du théorème précédent, si f est une fonction continue au voisinage du point $x \in I$, alors F est dérivable au point x et*

$$F'(x) = f(x).$$

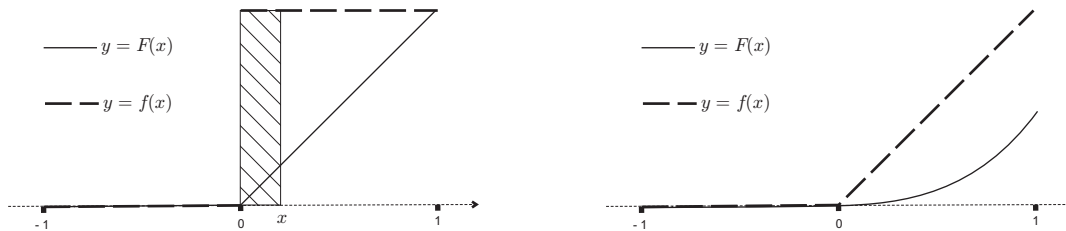
DÉMONSTRATION. De la même façon que ci-dessus, on peut supposer que $0 < h \leq h_0$ et que f est continue sur $[x, x + h_0]$, le cas $h < 0$ se traitant de façon analogue. On a cette fois

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(\xi_h) \quad (x \leq \xi_h \leq x + h),$$

d'où le théorème en faisant tendre $h \rightarrow 0$. □

EXEMPLE 2.1. *Le premier des exemples donnés par la figure ci-dessous correspond au cas d'une fonction en escalier f telle que $f(x) = 0$ pour $-1 < x < 0$ et $f(x) = 1$ pour $0 < x < 1$. On obtient une fonction $x \rightarrow F(x)$ qui est continue mais non dérivable au point $x = 0$. Le second de ces exemples concerne la fonction obtenue par l'intégration précédente : $f(x) = 0$ pour $-1 < x < 0$ et $F(x) = x$ pour $0 \leq x \leq 1$. On obtient alors une*

fonction $F(x) = 0$ pour $-1 < x < 0$ et $F(x) = x^2/2$ qui est dérivable sur $[-1, 1]$.



7. Intégrale et dérivée

7.1. Le théorème fondamental du calcul intégral. On a alors le **théorème fondamental du calcul intégral** qui montre que

- une fonction continue admet toujours une primitive (voir l’UV1 “Outils de Calcul” pour la définition),
- l’intégrale d’une fonction f peut se calculer à l’aide d’une primitive F de f .

THÉORÈME 2.9. *Si I est un intervalle contenant au moins deux points et $f \in \mathcal{C}^0(I)$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (1) *pour tout $a \in I$, la fonction G définie sur I par*

$$x \rightarrow G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur I et vérifie

$$G'(x) = f(x), \forall x \in I ;$$

(autrement dit, G est une primitive de f sur I ;)

- (2) *si F est une primitive quelconque de f sur I , alors*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

DÉMONSTRATION. La partie (1) du théorème est une conséquence directe du théorème ci-dessus car f est ici continue au voisinage de chaque point x de I . Pour établir (2), il suffit de remarquer que si F est une autre primitive de f , $F - G$ est constante sur I . En reprenant le raisonnement précédent pour $x = a$, on a $G(a) = 0$. Il s’ensuit que

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) = F(a), \forall x \in I.$$

On a ainsi

$$G(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

□

La quantité $F(b) - F(a)$ est l'**accroissement** de F entre a et b . Il est aussi noté des deux façons suivantes

$$[F]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

7.2. Intégration par parties. Sachant que l'intégrale d'une fonction continue est égale à l'accroissement d'une primitive, on a le théorème suivant qui permet de prolonger aux intégrales la formule d'intégration par parties vue pour le calcul des primitives dans l'UV1 "Outils de Calcul".

THÉORÈME 2.10. *Soient u et v de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I . Alors,*

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

où $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$ désigne l'accroissement de la fonction uv entre a et b .

DÉMONSTRATION. La fonction $x \rightarrow (uv)(x)$ est la primitive de la fonction

$$x \rightarrow (uv)'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Il résulte donc du théorème fondamental du calcul intégral que

$$\int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x)) dx = [uv]_a^b,$$

ce qui est une façon équivalente d'exprimer la relation de l'énoncé. □

7.3. Changement de variable. La formule de changement de variable vue dans l'UV1 "Outils de calcul" pour le calcul des primitives a une contrepartie pour le calcul des intégrales.

THÉORÈME 2.11. *Si f est une fonction continue sur un intervalle J et si φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I à valeurs dans J , alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

DÉMONSTRATION. On considère les deux fonctions

$$F(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(y) dy \text{ et } G(x) = \int_a^x f(\varphi(t))\varphi'(t) dt ;$$

F est la composée de la fonction $z \rightarrow \int_{\varphi(a)}^z f(y) dy$ et de la fonction φ ; elle est donc définie de classe \mathcal{C}^1 sur I ; de même G est définie de classe \mathcal{C}^1 sur I . En dérivant ces deux fonctions, on obtient

$$F'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \text{ et } G'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Il s'ensuit que $x \rightarrow F(x) - G(x)$ est constante sur I . Comme $F(a) - G(a) = 0$, il vient $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$, ce qui induit la formule de l'énoncé. \square

Les hypothèses du théorème précédent sont trop restrictives. On a vu plus haut que l'ensemble des fonctions continues est relativement réduit par rapport à l'ensemble des fonctions intégrables. De plus, la démonstration de ce théorème relève plus des propriétés des primitives et du théorème de dérivation des fonctions composées que des propriétés de l'intégrale. Nous en donnons ci-dessous une version bien plus générale.

THÉORÈME 2.12. *Soit $f \in \mathcal{I}([c, d])$ et φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante sur $[a, b]$ telle $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$. On a alors $x \rightarrow w(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \in \mathcal{I}([a, b])$ et*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_c^d f(y) dy.$$

(On a un énoncé et un résultat analogue si φ est strictement décroissante.)

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) Soit une somme de Riemann

$$R(w, p, u) = \sum_{i=1}^n f(\varphi(s_i))\varphi'(s_i)(x_i - x_{i-1})$$

relative à $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$ et $u = \{s_1, \dots, s_n\}$. Comme φ est strictement croissante,

$$q = \{y_i = \varphi(x_i)\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{c,d}$$

et $v = \{t_1 = \varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n)\}$ est une suite associée à q . On écrit alors

$$\begin{aligned} \left| R(w, p, u) - \int_c^d f(y) dy \right| &= \left| R(w, p, u) - R(f, q, v) + R(f, q, v) - \int_c^d f(y) dy \right| \\ &\leq |R(w, p, u) - R(f, q, v)| + \left| R(f, q, v) - \int_c^d f(y) dy \right| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{I}([c, d])$, on peut rendre

$$\left| R(f, q, v) - \int_c^d f(y) dy \right| \leq \varepsilon/2 \text{ si on prend } q \text{ tel que } \delta(q) \leq \eta_1.$$

Comme φ est uniformément continue, on peut rendre $\delta(q) \leq \eta_1$ si on prend p tel que $\delta(p) \leq \eta_2$. Examinons maintenant le terme $|R(w, p, u) - R(f, q, v)|$. On utilise le théorème des accroissements finis pour l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} |R(w, p, u) - R(f, q, v)| &= \\ & \left| \sum_{i=1}^n f(\varphi(s_i)) \varphi'(s_i) (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(\varphi(s_i)) (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(\varphi(s_i)) (\varphi'(s_i) - \varphi'(z_i)) (x_i - x_{i-1}) \right| \end{aligned}$$

avec $z_i \in]x_{i-1}, x_i[$. Sachant que f est bornée, en notant M un majorant de $|f|$, on a donc

$$\begin{aligned} |R(w, p, u) - R(f, q, v)| &\leq M \max_{i=1, \dots, n} |\varphi'(s_i) - \varphi'(z_i)| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq M \max_{i=1, \dots, n} |\varphi'(s_i) - \varphi'(z_i)| (b - a). \end{aligned}$$

On utilise le fait que φ est uniformément continue pour établir que si on prend p tel que $\delta(p) \leq \eta_3$, alors

$$\max_{i=1, \dots, n} |\varphi'(s_i) - \varphi'(z_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

Si on prend donc p tel que $\delta(p) \leq \eta = \min\{\eta_2, \eta_3\}$, on a

$$\left| R(w, p, u) - \int_c^d f(y) dy \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème. □

8. Le second théorème de la moyenne

Le second théorème de la moyenne a de multiples applications, en particulier pour établir la convergence de certaines intégrales généralisées comme on le verra dans la suite. Pour établir ce théorème, nous aurons besoin du résultat suivant qui complète celui donné ci-dessus sur l'intégrabilité du produit de deux fonctions intégrables.

PROPOSITION 2.7. Soient f et g deux fonctions intégrables sur le segment $[a, b]$. A $p = \{x_i\}_{i=0}^{i=n} \in \mathcal{P}_{a,b}$, $v = \{t_i\}_{i=1}^{i=n}$, une suite associée à la subdivision p telle que $t_i \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pour tout i , et une suite $\tilde{f} = \{f_i\}_{i=1}^{i=n}$ vérifiant

$$m_i(f) \leq f_i \leq M_i(f) \quad (i = 1, \dots, n)$$

on associe la somme de Riemann perturbée suivante

$$\lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) = \sum_{i=1}^n f_i g(t_i) (x_i - x_{i-1}).$$

On a alors

$$\lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) On va supposer d'abord que $g \geq 0$, on déduira ensuite le cas général de ce cas particulier.

Formons

$$\tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) - R(fg, p, v) = \sum_{i=1}^n (f_i - f(t_i)) g(t_i) (x_i - x_{i-1}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) - R(fg, p, v) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |f_i - f(t_i)| g(t_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) g(t_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq M \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

où M est une constante > 0 choisie de sorte que $M \geq \sup_{x \in [a,b]} g(x)$. Le lemme ci-dessus, assurant que si f est intégrable sur $[a, b]$, alors elle est aussi intégrable au sens de Darboux, montre qu'on peut rendre

$$\left| \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) - R(fg, p, v) \right| \leq \varepsilon/2$$

à condition de choisir p vérifiant $\delta(p) \leq \eta_1$ pour assurer que les sommes de Riemann $R(f, p, v)$ soient telles que

$$\left| R(f, p, v) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

De même, comme f et g sont intégrables, fg est intégrable. Il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que si $\delta(p) \leq \eta_2$, alors

$$\left| R(fg, p, v) - \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \varepsilon/2.$$

Pour p donc vérifiant $\delta(p) \leq \eta = \min \{\eta_1, \eta_2\}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) - \int_a^b f(x)g(x) dx \right| &\leq \left| \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) - R(fg, p, v) \right| \\ &\quad + \left| R(fg, p, v) - \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour traiter le cas général, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction $g + \lambda$ avec λ une constante > 0 qu'on choisit telle que $g + \lambda \geq 0$. On alors

$$\begin{aligned} \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) - R(fg, p, v) &= \tilde{R}(f, g + \lambda, p, v, \tilde{f}) - R(f(g + \lambda), p) \\ &\quad + R(f, \lambda, p) - \tilde{R}(f, \lambda, p, v, \tilde{f}). \end{aligned}$$

On applique alors le résultat précédent aux deux cas f avec $g + \lambda$ et f avec λ . □

Le corollaire suivant est important dans la caractérisation des intégrales multiples relatives aux fonctions de plusieurs variables. Il montre que l'intégrabilité peut être définie en prenant des sommes de Riemann plus générales par

$$\tilde{R}(f, p, \tilde{f}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i - x_{i-1})$$

avec \tilde{f} choisi comme ci-dessus. Il est clair qu'on a $\tilde{R}(f, p, \tilde{f}) = R(f, p, v)$ en prenant $f_i = f(t_i)$ si $v = \{t_i\}_{i=1}^{i=n}$ est une suite associée à la subdivision p .

COROLLAIRE 2.6. *Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors*

$$\lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \tilde{R}(f, p, \tilde{f}) = \int_a^b f(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Immédiate à partir du lemme. □

On a alors le théorème suivant appelé **second théorème de la moyenne**.

THÉORÈME 2.13. Soient $f \in \mathcal{I}([a, b])$ et $g \in \mathcal{B}([a, b])$ et décroissante. Alors, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a^+) \int_a^\xi f(x) dx + g(b^-) \int_\xi^b f(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. (Non au programme. Donnée comme complément.) Remarquons d'abord que $g \in \mathcal{I}([a, b])$ et donc que $fg \in \mathcal{I}([a, b])$. Démontrons d'abord le théorème dans le cas où $g(b^-) = 0$. Le lemme ci-dessus permet d'affirmer que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f})$$

avec $m_i(f) \leq f_i \leq M_i(f)$. On utilise le premier théorème de la moyenne qui nous permet d'affirmer que la condition sur f_i est satisfaite si on prend

$$f_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Posons

$$F(s) = \int_a^s f(x) dx.$$

On a vu ci-dessus que F est continue sur $[a, b]$. On a donc

$$(x_i - x_{i-1})f_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

et ainsi

$$\tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) = \sum_{i=1}^n g(t_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

On réorganise cette somme comme suit obtenant la formule dite de sommation d'Abel

$$\begin{aligned} \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) &= -F(a)g(t_1) + (g(t_1) - g(t_2))F(x_1) + \\ &\quad \cdots + (g(t_{n-1}) - g(t_n))F(x_{n-1}) + g(t_n)F(x_n). \end{aligned}$$

On utilise alors le fait que g est décroissante pour déduire que

$$g(t_{i-1}) - g(t_i) \geq 0.$$

Comme en outre F est continue sur $[a, b]$, F admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

On peut ainsi écrire, sachant que $F(a) = 0$,

$$\begin{aligned} & \min_{x \in [a, b]} F(x) (g(t_1) - g(t_2) + g(t_2) - g(t_3) + \cdots + g(t_{n-1}) - g(t_n) + g(t_n)) \\ & \leq \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) \\ & \leq \max_{x \in [a, b]} F(x) (g(t_1) - g(t_2) + g(t_2) - g(t_3) + \cdots + g(t_{n-1}) - g(t_n) + g(t_n)) \end{aligned}$$

ou encore après simplification

$$g(t_1) \min_{x \in [a, b]} F(x) \leq \tilde{R}(f, g, p, v, \tilde{f}) \leq g(t_1) \max_{x \in [a, b]} F(x).$$

On utilise une nouvelle fois le fait que g est décroissante pour déduire que $\lim_{\delta(p) \rightarrow 0} g(t_1) = g(a^+)$. En passant à la limite lorsque $\delta(p) \rightarrow 0$, il vient

$$g(a^+) \min_{x \in [a, b]} F(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq g(a^+) \max_{x \in [a, b]} F(x).$$

Si $g(a^+) = 0$, $g(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. La formule de l'énoncé est alors vérifiée pour tout $\xi \in]a, b[$. Si $g(a^+) > 0$, la formule précédente montre que $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right) / g(a^+)$ est une valeur intermédiaire de la fonction F . Il existe donc $\xi \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a^+)F(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx.$$

Si $g(b^-) \neq 0$, on applique la formule précédente à la fonction $x \rightarrow g(x) - g(b^-)$

$$\int_a^b f(x)(g(x) - g(b^-)) dx = (g(a^+) - g(b^-)) \int_a^\xi f(x) dx.$$

La relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\xi f(x) dx + \int_\xi^b f(x) dx$$

donne alors la formule de l'énoncé. □

Avec des hypothèses beaucoup plus restrictives sur f et g , l'exercice suivant donne une démonstration plus simple du second théorème de la moyenne.

EXERCICE 2.1. Soient f continue sur $[a, b]$ et g décroissante et continument dérivable sur $[a, b]$.

(1) On pose pour $x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Montrer que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

(2) En utilisant le premier théorème de la moyenne, montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

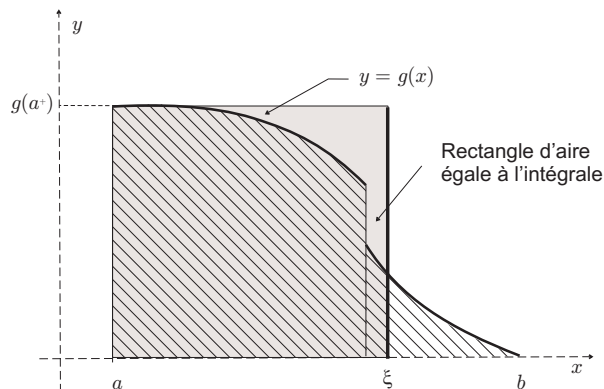
$$\int_a^b F(x)g'(x) dx = F(\xi)(g(b) - g(a)).$$

(3) En déduire le second théorème de la moyenne.

REMARQUE 2.3. Si $f = 1$ et $g(b^-) = 0$, le 2nd théorème de la moyenne exprime qu'il existe un rectangle de hauteur $g(a^+)$ et de base $b - \xi$, inférieure ou égale donc à la longueur $b - a$ de l'intervalle d'intégration, dont l'aire est égale à l'intégrale de g entre a et b

$$\int_a^b g(x)dx = (b - \xi)g(a^+)$$

(voir figure ci-dessous)



9. Test d'auto-évaluation

9.1. Intégrales simples.

- (1) Donner une interprétation géométrique de $\int_a^b f(x)dx$ pour $f \in \mathcal{B}([a; b])$?
- (2) Comment peut-on encadrer ou majorer $\int_a^b f(x)dx$ pour $f \in \mathcal{B}([a; b])$?
- (3) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- (4) Soit $f \in \mathcal{I}([a; b])$. On définit $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.
 - (a) Donner le domaine de définition de F .
 - (b) Donner le domaine de continuité de F .
 - (c) Donner le domaine de dérivabilité de F et calculer la dérivée de F .
 - (d) Que dire de plus sur F si on suppose que f est continue ?
- (5) Soit $G(x) = \int_0^{x^4} \ln(1+t) dt$. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction G . Calculer la dérivée de G .
- (6) Donner les hypothèses et la formule pour calculer une intégrale par intégration par parties.
- (7) Grâce à une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$.
- (8) Donner les hypothèses et la formule pour calculer une intégrale par changement de variable.
- (9) Calculer les intégrales suivantes :
 - (a) Décomposer en éléments simples la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$. En déduire la valeur de $\int_8^{27} \frac{1}{1-t^2} dt$.
 - (b) En posant $t = x^3$, calculer $\int_2^3 \frac{x^2}{x^6-1} dx$.
 - (c) En appliquant la règle de Bioche, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^4(x)dx$.

9.2. Equations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients variables.

(1) Déterminer les solutions réelles définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $y' + y = \sin(t)$.

(2) Déterminer les solutions réelles définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 : $y'' + 2y' + y = te^t$.

(3) Résoudre le système différentiel suivant :
$$\begin{cases} x'(t) = w(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = y(t) \\ w'(t) = x(t) \end{cases} .$$

Equivalents et Développements limités

1. Comparaison de fonctions

Dans cette section, a est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ (a fini ou $\pm\infty$). Les fonctions considérées sont définies dans un voisinage de a (ou de a^+ ou de a^-), sauf peut-être en a .

1.1. Notations de Landau.

1.1.1. *Définitions.* Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (ou de a^+ ou de a^-), sauf peut-être en a . On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a . On introduit ici deux notations.

On dit que f est **dominée par** g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{O}(g)$ ou $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ s'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ tels que si $|x - a| \leq \alpha$ alors $|f(x)| \leq \lambda|g(x)|$.

On dit que f est **négligeable devant** g en a et on note $f = \underset{a}{o}(g)$ ou $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - a| \leq \alpha$ alors $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$.

On a l'équivalence suivante

$$f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \iff \text{il existe une fonction } \varepsilon \text{ telle que } f(x) = g(x)\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Vous pouvez choisir l'écriture qui vous convient le mieux. Dans les deux cas, il est important de faire figurer le point où ces égalités ont lieu, en mettant le point a sous le signe o dans le premier cas, et en écrivant $\lim_a \varepsilon = 0$ dans le deuxième. En effet, cette notion " f négligeable devant g " est une notion locale. On ne compare f et g qu'au voisinage du point a .

Les caractérisations suivantes, utilisées dans la pratique, s'obtiennent directement.

PROPOSITION 3.1.

$$(1) f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(2) $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de a .

EXEMPLE 3.1.

(1) $x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.

(2) $x^\alpha = o_{x \rightarrow 0}(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.

(3) $f(x) = o_{x \rightarrow a}(1)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

(4) $f(x) = O_{x \rightarrow a}(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a .

1.1.2. *Propriétés.* En utilisant les caractérisations ci-dessus, on obtient les résultats suivants.

PROPOSITION 3.2. *Soit f, g et h des fonctions définies dans un voisinage de a , sauf peut-être en a . On suppose que g et h ne s'annulent pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a .*

(1) Si $f = o_a(g)$ alors $f = O_a(g)$.

(2) Si $f = o_a(g)$ alors $fh = o_a(gh)$.

(3) Si $f = O_a(g)$ alors $fh = O_a(gh)$.

PROPOSITION 3.3. *Soit f, g, φ, ψ des fonctions définies dans un voisinage de a , sauf peut-être en a . On suppose que g et ψ ne s'annulent pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a .*

(1) Si $f = o_a(g)$ et $\varphi = o_a(\psi)$ alors $f\varphi = o_a(g\psi)$.

(2) Si $f = O_a(g)$ et $\varphi = O_a(\psi)$ alors $f\varphi = O_a(g\psi)$.

(3) Si $f = o_a(g)$ et $\varphi = O_a(\psi)$ alors $f\varphi = o_a(g\psi)$.

1.1.3. *Croissances comparées.* Les résultats suivants, appelés "croissances comparées", comparent les croissances des fonctions puissances, logarithme, et exponentielle. Ils sont utiles très souvent.

PROPOSITION 3.4. *Soit $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$.*

$$(1) (\ln x)^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha).$$

$$(2) x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha x}).$$

$$(3) |\ln x|^\beta = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Pour cela, une étude de la fonction $x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x}$ permet d'obtenir facilement que pour tout $x \geq 1$, $\ln x \leq 2\sqrt{x}$. On en déduit que $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x \geq 1$, on pose $t = x^\alpha$, et on a $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln t^{1/\alpha}}{t} = \frac{\ln t}{\alpha t}$. Comme $t \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ en utilisant ce qui précède.

Ensuite, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta \rightarrow 0$ (si $\beta \leq 0$, le résultat est direct).

Pour démontrer le deuxième point, on pose $y = e^x$. Alors $\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \frac{(\ln y)^\beta}{y^\alpha}$. Comme $y \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient le résultat cherché.

Pour le dernier point on se ramène au premier en posant $y = 1/x$. □

REMARQUE 3.1. De ce résultat, découlent en particulier les majorations suivantes : pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$(1) \text{ pour tout } x \text{ dans un voisinage de } +\infty, (\ln x)^\beta \leq x^\alpha,$$

$$(2) \text{ pour tout } x \text{ dans un voisinage de } +\infty, x^\beta \leq e^{\alpha x},$$

$$(3) \text{ pour tout } x \text{ dans un voisinage de } 0^+, |\ln x|^\beta \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

1.2. Equivalents.

1.2.1. *Définition.* Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (ou de a^+ ou de a^-), sauf peut-être en a . On suppose que f et g ne s'annulent pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a . On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si $f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$.

De manière équivalente,

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement s'il existe ε telle que $f(x) = g(x) + g(x)\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

PROPOSITION 3.5. *On a la caractérisation suivante.*

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

PROPOSITION 3.6. *Soit $a \in \mathbb{R}$. La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de a , sauf peut-être en a , et ne s'annulant pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a .*

Pour rendre l'écriture des énoncés un peu moins longue, nous dirons dans la suite que f vérifie la propriété (\mathcal{H}_a) si f est définie dans un voisinage de a , sauf peut-être en a , et ne s'annule pas dans un voisinage de a sauf peut-être en a . Cette notation n'a rien de standard et ne nous servira que le temps de ce paragraphe...

DÉMONSTRATION.

La relation $\underset{a}{\sim}$ est réflexive : si f vérifie (\mathcal{H}_a) , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f(x)} = 1$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.

La relation $\underset{a}{\sim}$ est symétrique : si f, g vérifient (\mathcal{H}_a) , et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ en composant par $x \mapsto 1/x$. D'où $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.

La relation $\underset{a}{\sim}$ est transitive : si f, g, h vérifient (\mathcal{H}_a) , avec $f \underset{a}{\sim} g$, et $g \underset{a}{\sim} h$. Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$ par produit. D'où $f \underset{a}{\sim} h$.

□

Puisque $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence, on dira que f et g sont équivalentes au voisinage de a .

1.2.2. Premières propriétés.

PROPOSITION 3.7.

- (1) *Soit $l \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} l$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.*
- (2) *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et vaut l .*
- (3) *Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g sont du même signe au voisinage de a .*

DÉMONSTRATION.

- (1) Soit $l \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} l$ si et seulement $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{l} = 1$ si et seulement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
- (2) On a $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1 \cdot l = l$.
- (3) Supposons par exemple $g(x) > 0$ pour $|x - a| \leq \alpha$, $\alpha > 0$ (les autres cas se traitent de même). Il existe une fonction ε définie dans un voisinage de a telle que $f(x) = g(x) + g(x)\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Il existe $0 < \eta < \alpha$ tel que si $|x - a| \leq \eta$, alors $|\varepsilon(x)| \leq 1/2$. Ainsi, pour $|x - a| \leq \eta$, $f(x) \geq g(x) - g(x)/2 = g(x)/2 > 0$. D'où le résultat. \square

PROPOSITION 3.8. Soit f, g vérifiant (\mathcal{H}_a) et telles que $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$. Alors,

$$f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire $(f + g) - g = f = o_a(g)$, donc $f + g \underset{a}{\sim} g$. \square

EXEMPLE 3.2. Soit f une fonction polynomiale de la forme

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n, \text{ avec } p \leq n, a_p \neq 0, a_n \neq 0.$$

Alors,

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p.$$

REMARQUE 3.2. Il est recommandé de n'écrire qu'un seul terme dans le membre de droite d'une équivalence. Prenons un exemple. Soit $f : x \mapsto x \ln x - x + \ln x - 4 - 1/x$. En utilisant les croissances comparées, on obtient $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln x$. Mais il est vrai également que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln x - x$, ainsi que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln x + 182\sqrt{x}$. On peut plus généralement ajouter à $x \ln x$ toute fonction qui est négligeable devant $x \ln x$ en $+\infty$. On voit ainsi que l'on n'apporte aucune information supplémentaire en mettant plusieurs termes. Seul le terme dominant a un sens.

Par contre, on peut écrire $f(x) = x \ln x - x + o_{+\infty}(x)$, donc $f(x) - x \ln x \underset{+\infty}{\sim} -x$. On vient d'écrire un "développement asymptotique" de f en $+\infty$. Nous verrons cette notion au paragraphe suivant.

1.2.3. Opérations sur les équivalents. Voici la liste des opérations usuelles "compatibles" avec les équivalents.

PROPOSITION 3.9. Toutes les fonctions dans la suite vérifient (\mathcal{H}_a) .

- (1) *Produit* : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f\varphi \underset{a}{\sim} g\psi$.
- (2) *Quotient* : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $\frac{f}{\varphi} \underset{a}{\sim} \frac{g}{\psi}$.
- (3) *Composition à droite* : si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, alors $f(\varphi(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(\varphi(x))$.

DÉMONSTRATION.

- (1) On a $\frac{f(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \cdot 1 = 1$.
- (2) Idem.
- (3) Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} = 1$ par composition. \square

Par contre, les opérations suivantes ne sont pas possibles en général :

– l'addition

$$f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \varphi \underset{a}{\sim} \psi \quad \not\Rightarrow \quad f + \varphi \underset{a}{\sim} g + \psi.$$

– la composition à gauche :

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \not\Rightarrow \quad \varphi(f(x)) \underset{a}{\sim} \varphi(g(x)).$$

Voici des contre-exemples.

EXEMPLE 3.3.

- (1) Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$, $g : x \mapsto -x^2 - x$, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2$ mais $f(x) + g(x) = -x + 1 \underset{+\infty}{\sim} -x$.
- (2) Soit $f : x \mapsto 1 + 1/x$, $g : x \mapsto 1 + 4/x$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.
Mais nous verrons dans la suite que $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, donc $\ln f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\ln g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x}$.
Ainsi $\ln(f(x)) \underset{+\infty}{\not\sim} \ln(g(x))$.
- (3) Soit $f : x \mapsto x^2 + x$, $g : x \mapsto x^2$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, mais $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $e^{f(x)} \underset{+\infty}{\not\sim} e^{g(x)}$.

Mais dans les cas particuliers suivants, ces opérations sont licites.

PROPOSITION 3.10. Soit f, g, h vérifiant (\mathcal{H}_a) . Soit λ, μ deux réels. Si $f \underset{a}{\sim} \lambda h$ et $g \underset{a}{\sim} \mu h$, alors

- si $\lambda + \mu \neq 0$, $f + g \underset{a}{\sim} (\lambda + \mu)h$,
- si $\lambda + \mu = 0$, $f + g = o_a(h)$.

DÉMONSTRATION.

Si $\lambda + \mu \neq 0$, on a

$$\frac{f(x) + g(x)}{(\lambda + \mu)h(x)} = \frac{1}{\lambda + \mu} \left(\frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \right) \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{\lambda + \mu} (\lambda + \mu) = 1,$$

ce qui montre que $f + g \underset{a}{\sim} (\lambda + \mu)h$.

Si $\lambda + \mu = 0$,

$$\frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda + \mu = 0$$

ce qui montre que $f + g = o_a(h)$. □

PROPOSITION 3.11. Soit f, g vérifiant (\mathcal{H}_a) . On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. Alors,

- (1) Valeur absolue : $|f| \underset{a}{\sim} |g|$.
- (2) Puissance : pour tout $\alpha > 0$, si g est strictement positive au voisinage de a , $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$. En particulier, $\sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{g}$.
- (3) Logarithme sous conditions : si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \in [0, +\infty]$ et si $l \neq 1$, alors $\ln f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln g(x)$.
- (4) Exponentielle sous conditions : si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$, alors $e^{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} e^{g(x)}$.

DÉMONSTRATION.

Les propriétés (1) et (2) s'obtiennent par continuité de $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^\alpha$ en 1.

Pour démontrer la propriété (3), on écrit $\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} - 1 = \frac{\ln \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)}{\ln g(x)}$. Or, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow a} \ln \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} \ln g(x) = \ln l \in [-\infty, +\infty]$ avec $\ln l \neq 0$, donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} - 1 = 0$.

Pour démontrer la propriété (4), on écrit $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} e^0 = 1$. □

EXEMPLE 3.4. Soit $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$. On a $x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $\sqrt{x^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = x$.

D'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

1.2.4. *Equivalents des fonctions usuelles en 0.* Ils se déduisent souvent de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.12. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I , $a \in I$. Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors*

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

DÉMONSTRATION. C'est immédiat : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. □

De cette proposition, on déduit les équivalents des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{ll} \sin x \underset{0}{\sim} x & \operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x \\ \tan x \underset{0}{\sim} x & \operatorname{th} x \underset{0}{\sim} x \\ \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x & e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \\ \arcsin x \underset{0}{\sim} x & \arctan x \underset{0}{\sim} x \\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x & \text{pour tout } \alpha \neq 0 \end{array}$$

Mais le résultat précédent ne permet pas de donner l'équivalent en 0 de $1 - \cos x$ puisque $\cos'(0) = 0$. La formule de Taylor-Young, qui est introduite dans la suite de ce chapitre, donne un résultat plus général qui permet de calculer un équivalent. C'est moins systématique mais on peut aussi utiliser des relations vérifiées par des fonctions dont on connaît un équivalent pour obtenir le résultat dans ce type de cas.

EXEMPLE 3.5. *On a*

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \operatorname{ch} x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

1.2.5. *Application aux calculs de limites.* Les équivalents sont un outil qui peut être utile pour calculer des limites a priori indéterminées.

EXEMPLE 3.6. *Calculer la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow a$ dans les différents cas suivants.*

$$(1) f(x) = \frac{(1+x^2) \tan x}{\sin(2x)}, \quad a = 0.$$

On a $1+x^2 \underset{0}{\sim} 1$, $\tan x \underset{0}{\sim} x$ et $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$, donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1 \cdot x}{2x} = \frac{1}{2}$, et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

$$(2) f(x) = x \left(e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1 \right), a = +\infty.$$

On a $\frac{x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On peut utiliser un équivalent de $e^u - 1$ en 0. On a $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, donc $e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} = 1$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

$$(3) f(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^x - 1, a = +\infty.$$

L'exposant est variable (il dépend de x), donc on écrit $f(x)$ sous forme exponentielle : $f(x) = e^{x \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)} - 1$. Etudions l'exposant. On a

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln(1+1/x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}$$

et $\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $\ln(1+1/x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x \ln \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right) &= x \ln \left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \right) \underset{+\infty}{\sim} x \cdot \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln \left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$. En particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$(4) f(x) = \frac{\tan x(1 - \sin x)}{\sin(2x)}, a = \pi/2. \text{ On fait le changement de variable } h = x - \pi/2.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin\left(h + \frac{\pi}{2}\right) \left(1 - \sin\left(h + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos\left(h + \frac{\pi}{2}\right) \sin(2h + \pi)} \\ &= \frac{\cos(h) (1 - \cos(h))}{\sin(h) \sin(2h)} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^2/2}{h \cdot 2h} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = \frac{1}{4}.$$

REMARQUE 3.3. Lorsqu'on cherche à étudier une fonction au voisinage d'un autre point que 0, on se "ramène" souvent à une étude en 0 par les changements de variables suivants :

- étudier $x \mapsto f(x)$ au voisinage de $x = a \in \mathbb{R}^*$ revient à étudier $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de $h = 0$ (on a posé $h = x - a$).
- étudier $x \mapsto f(x)$ au voisinage de $x = \pm\infty$ revient à étudier $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de $h = 0$ (on a posé $h = 1/x$).

2. Formules de Taylor

On a vu précédemment que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point a de I , alors on peut écrire pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0,$$

ce qui revient à approcher f par une fonction affine au voisinage de a .

Dans cette partie, nous donnons des théorèmes qui étendent en quelque sorte ce résultat, appelés "formules de Taylor" : sous des hypothèses de régularité sur la fonction f , on écrit f , au voisinage d'un point a sous la forme d'un polynôme en $(x - a)$ plus un reste :

$$f(x) = P_n(x - a) + \text{reste}, \quad P_n \text{ polynôme de degré } \leq n.$$

Les diverses formules diffèrent par la forme du reste. Mais dans tous les cas, l'appellation "reste" a un sens car ce "reste" est négligeable par rapport à $(x - a)^n$ au voisinage de a , c'est-à-dire qu'il tend vers 0 quand $x \rightarrow a$ et ce plus vite que $(x - a)^n$: $\frac{\text{reste}}{(x - a)^n} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Nous reviendrons sur ces notions de comparaison de fonctions dans le chapitre suivant.

Nous donnons dans ce paragraphe deux formes de reste. Nous démontrerons une troisième formule, avec reste intégral, dans la partie de ce cours sur l'intégrale.

2.1. Formule de Taylor-Lagrange.

THÉORÈME 3.1. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I , $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a, x \in I$, il existe $c \in]a, x[$ tel que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat s'obtient de la même manière que l'égalité des accroissements finis (qui en est un cas particulier pour $n = 0$). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (à déterminer). Soit $a, x \in I$, $a \neq x$. On note $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie pour tout $t \in I$ par

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t - a) - \frac{f''(a)}{2!}(t - a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t - a)^n + \lambda(t - a)^{(n+1)}.$$

φ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . On a pour tout $t \in I$, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= f^{(k)}(t) - f^{(k)}(a) - f^{(k+1)}(a)(t-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-k)!}(t-a)^{(n-k)} \\ &\quad + \lambda(n+1) \dots (n+2-k)(t-a)^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

En particulier, $\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) - (n+1)\lambda(t-a)$.

Ainsi, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\varphi^{(k)}(a) = 0$.

On choisit λ tel que $\varphi(x) = 0$, *i.e.* $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \lambda(x-a)^{n+1}$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a, x[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$. On applique à nouveau le théorème de Rolle à φ' sur $]a, c_1[$. Il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que $\varphi''(c_2) = 0$. On réitère le procédé jusqu'à obtenir c_{n+1} tel que $\varphi^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0 = f^{(n+1)}(c) - \lambda(n+1)!$. On obtient donc $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, et on reporte dans l'égalité définissant λ . \square

Il en découle le résultat suivant.

PROPOSITION 3.13. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} et si $f^{(n+1)} = 0$ (*i.e.* $f^{(n+1)}(x) = 0$ pour tout $x \in I$), alors f est un polynôme de degré au plus n sur I .*

2.2. Formule de Taylor-Young.

2.2.1. Énoncé.

THÉORÈME 3.2. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n sur I , $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in I$. Il existe une fonction ε telle que pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On remarquera que l'on suppose ici seulement f de classe \mathcal{C}^n .

DÉMONSTRATION. Soit $a, x \in I$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour f de classe \mathcal{C}^n . Il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \left(\frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)}{n!} \right) (x-a)^n \end{aligned}$$

Or, $f^{(n)}$ est continue en a , et $c \in]a, x[$ donc $\lim_{x \rightarrow a} f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a) = 0$ d'où le résultat. \square

2.2.2. *Application aux extrema.* La formule de Taylor-Young permet d'obtenir une condition suffisante d'extremum pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

THÉORÈME 3.3. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur I . Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$.*

- (1) *Si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a .*
- (2) *Si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local strict en a .*

DÉMONSTRATION. On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a . Comme $f'(a) = 0$, on a

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x-a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

Supposons $f''(a) > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x-a| < \eta$, $|\varepsilon(x-a)| \leq f''(a)/4$, donc $\varepsilon(x-a) \geq -f''(a)/4$ et $(x-a)^2\varepsilon(x-a) \geq -f''(a)/4$. Ainsi, pour $|x-a| < \eta$, $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) \geq \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 = \frac{f''(a)}{4}(x-a)^2 > 0.$$

La fonction f admet donc un minimum strict en a .

Le cas $f''(a) < 0$ est laissé en exercice. \square

REMARQUE 3.4.

- (1) *La réciproque de ces propriétés est fautive. La fonction $f : x \mapsto x^4$ admet un minimum global en 0, $f'(0) = f''(0) = 0$.*

(2) Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire. La fonction f peut admettre un maximum (par exemple $x \mapsto x^4$ en 0), un minimum (par exemple $x \mapsto -x^4$ en 0), ou ni l'un ni l'autre (par exemple $x \mapsto x^3$ en 0). Ces exemples sont en fait typiques. Pour déterminer le comportement de f au voisinage de a , on écrit son développement de Taylor (s'il existe) jusqu'au premier terme non nul après $f(a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x-a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

Le signe de $f(x) - f(a)$ est donné par celui de ce terme. Si n est impair, $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a donc f n'admet pas d'extremum en a ; si n est pair, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a donc f admet un extremum en a .

2.2.3. *Application aux calcul de limites.* On peut utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir un équivalent lorsque la dérivée s'annule.

PROPOSITION 3.14. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I , $a \in I$. Supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k_0)}(a)$ existe et soit non nul. On définit $s = \min\{k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(a) \neq 0\}$. Si f est de classe \mathcal{C}^s sur I , alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^s.$$

DÉMONSTRATION. La formule de Taylor-Young à l'ordre s pour f en a s'écrit

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^s + (x-a)^s \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

c'est-à-dire $f(x) - f(a) = \frac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^s + o_{x \rightarrow a}((x-a)^s)$. D'où le résultat. \square

EXEMPLE 3.7. On reprend les deux exemples ci-dessus concernant les équivalents en 0 de $1 - \cos x$ et $\operatorname{ch} x - 1$. On peut faire le calcul systématiquement. On a

$$f(x) = 1 - \cos x, \quad f'(x) = \sin(x), \quad f'(0) = 0, \quad f''(x) = \cos(x), \quad f''(0) = 1$$

d'où

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0} x^2$$

On procède de même pour $\operatorname{ch} x - 1$.

2.3. Formule de Taylor avec reste intégral. La version suivante de la formule de Taylor avec reste intégral est souvent utile.

THÉORÈME 3.4. *Soit f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$. Alors,*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f^{(1)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

DÉMONSTRATION. On part de la formule fondamentale du calcul intégral

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f^{(1)}(x) dx$$

qui n'est rien d'autre que la formule que l'on veut établir pour $n = 0$. Supposons, par hypothèse de récurrence que la formule est vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f^{(1)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx$$

On intègre par parties l'intégrale en posant $u(x) = f^{(n)}(x)$ et $v'(x) = (b-x)^{n-1}/(n-1)!$.

On a

$$u'(x) = f^{(n+1)}(x) \quad v(x) = -(b-x)^n/n!$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx &= \left[-\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - 0 + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème. □

3. Développements limités

Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point, $a \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On cherche à comparer f à une fonction polynômiale dans un voisinage de a .

3.1. Définitions. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en a (DL _{n} en a)** s'il existe un polynôme à coefficients réels P_n de degré au plus n et $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = P_n(x - a) + \underset{x \rightarrow a}{o}((x - a)^n).$$

On définit également la notion de **développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$** . On suppose que $\pm\infty$ est une borne de I . On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$ s'il existe un polynôme à coefficients réels P_n de degré au plus n et $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

EXEMPLE 3.8. $f(x) = 2x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^7)$ est un DL_7 de f en 0 . En revanche $f(x) = x^4 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$ est un DL_2 de f en 0 . En effet, $x^4 = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$, donc $f(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$. **L'ordre d'un DL se lit sur le reste.**

La définition ci-dessus peut s'étendre à f définie seulement sur $I \setminus \{a\}$ (dans le cas a réel). Supposons que f admet un DL_0 en a , du type $f(x) = a_0 + \underset{x \rightarrow a}{o}(1)$. En faisant tendre x vers a , on obtient $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_0$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en a , en posant $f(a) = a_0$. Dans la suite, on supposera donc que f est définie et continue en a . On supposera également que la fonction ε qui apparaît dans le DL est continue en a (avec $\varepsilon(a) = 0$).

REMARQUE 3.5. De cette première propriété, on déduit par exemple que \ln n'admet pas de DL en 0 , ou encore que $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de DL en 0 , et ce à aucun ordre.

Supposons maintenant que f est continue en a et admet un DL_1 en a , de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x - a)$. On a vu que $a_0 = f(a)$. On obtient donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a_1 + \underset{x \rightarrow a}{o}(1) \xrightarrow{x \rightarrow a} a_1$. La fonction f est donc dérivable en a , avec $f'(a) = a_1$.

Réciproquement, si f est dérivable en a , alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$ donc $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x - a)$, et f admet un DL_1 en a .

On a donc le résultat suivant.

PROPOSITION 3.15.

(1) f admet un DL_0 en a si et seulement si f est continue en a .

(2) f admet un DL_1 en a si et seulement si f est dérivable en a

Attention. Ceci ne se généralise pas pour $n \geq 2$.

EXEMPLE 3.9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$.

Montrons que f admet un DL_2 en 0 . On a déjà vu que $x \sin \frac{1}{x} = o_{x \rightarrow 0}(1)$ donc $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Étudions la dérivabilité seconde de f en 0 . f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* , et pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

Donc, $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, dont le premier terme tend vers 0 en 0 mais dont le second terme n'admet pas de limite en 0 . Ainsi, f n'est pas deux fois dérivable en 0 .

THÉORÈME 3.5. Si f admet un DL_n en a alors le couple (P_n, ε) est unique. P_n s'appelle la partie principale de f d'ordre n en a , on la note $P_n(f)$.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe P_n, Q_n deux polynômes de degré $\leq n$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux fonctions tels que

$$f(x) = P_n(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$f(x) = Q_n(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Raisonnons par l'absurde, supposons $P_n \neq Q_n$. On écrit $P_n - Q_n = \sum_{k=0}^n c_k X^k$. Comme $P_n - Q_n$ n'est pas le polynôme nul, on peut définir $p = \min\{k, c_k \neq 0\}$. Alors, $P_n - Q_n = \sum_{k=p}^n c_k X^k$. On obtient donc pour tout $x \in I$, $\sum_{k=p}^n c_k (x - a)^k = (x - a)^n (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))$. Pour

tout $x \in I \setminus \{a\}$, on simplifie par $(x - a)^p$ pour obtenir $\sum_{k=p}^n c_k (x - a)^{k-p} = (x - a)^{n-p} (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))$. On fait alors tendre x vers a , et on en déduit que $c_p = 0$. Ce qui contredit la définition de p . Ainsi, $P_n = Q_n$. On en déduit immédiatement que $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. De plus, $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(a) = 0$, donc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. \square

PROPOSITION 3.16. *Soit I un intervalle symétrique par rapport à l'origine, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet un DL_n en 0, $n \geq 0$.*

- (1) *Si f est paire, alors $P_n(f)$ n'a que des puissances paires.*
- (2) *Si f est impaire, alors $P_n(f)$ n'a que des puissances impaires.*

DÉMONSTRATION. Nous faisons la preuve dans le cas pair. On écrit $f(x) = P_n(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Comme $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in I$, on a $f(x) = P_n(-x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Par unicité du développement limité de f en 0, on en déduit que $P_n(x) = P_n(-x)$ pour tout $x \in I$, donc P_n est pair. \square

3.1.1. *Premiers exemples.* Les développements limités suivants s'obtiennent directement.

Soit f une fonction polynômiale de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p, \text{ avec } p \in \mathbb{N}, a_p \neq 0.$$

Alors f admet un DL en 0 à tout ordre. En effet,

si $n \geq p$, $a_0 + a_1x + \dots + a_px^p$ est un polynôme de degré $\leq n$, le reste est nul. Et

si $n < p$, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n(a_{n+1}x + \dots + a_px^{p-n}) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.

On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)}$$

et

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)}$$

3.1.2. *Condition suffisante d'existence.* La formule de Taylor-Young, que nous redonnons ici, donne une condition suffisante d'existence.

THÉORÈME 3.6. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n sur I , $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in I$. Alors, f admet un DL_n en a de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

Pour les fonctions pour lesquelles les dérivées successives sont simples à calculer, cette formule permet d'obtenir rapidement le développement limité de la fonction. Si ce n'est pas le cas, on utilise les théorèmes d'opérations que nous verrons dans le paragraphe suivant.

EXEMPLE 3.10.

- (1) La fonction exponentielle étant de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , elle admet un DL à tout ordre en 0 . De plus, $\exp^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

- (2) Les fonctions cosinus et sinus étant de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , elles admettent un DL à tout ordre en 0 . De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(k)}(0) = 1$, $\sin^{(k)}(0) = 0$ si k est pair, $\cos^{(k)}(0) = 0$, $\sin^{(k)}(0) = 1$ si k est impair, donc par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}).$$

On vient d'écrire un DL à l'ordre $2n+1$ de \cos et un DL à l'ordre $2n+2$ de \sin .

- (3) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ étant de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$, elle admet un DL à tout ordre en 0 . De plus, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ pour tout $x > -1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

- (4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ étant de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, $f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc par la formule de Taylor-Young, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

Pour $\alpha = -1$, on retrouve le DL de $1/(1+x)$ en 0. Pour $\alpha = 1/2$ et $\alpha = -1/2$, on obtient le DL de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto 1/\sqrt{1+x}$ en 0. À l'ordre 2, cela donne

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2), \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).\end{aligned}$$

3.2. Opérations sur les développements limités. Avant de donner les résultats, nous souhaitons faire la remarque suivante. Lorsque l'on veut étudier une fonction f au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut se ramener à étudier une fonction auxiliaire en 0 en faisant le changement de variable suivant. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - a$. Alors $h \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$, $f(x) = f(a+h)$ et on étudie $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0. Si $a = \pm\infty$, on pose $h = 1/x$. Alors $h \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$, $f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right)$ et on étudie $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0.

Dans la suite, nous énoncerons les résultats pour des développements limités au voisinage de 0, ceux concernant des développements limités au voisinage d'autres points s'en déduisent par les changements de variables précédents.

3.2.1. Addition et multiplication par une constante.

THÉORÈME 3.7. Soit I un intervalle tel que $0 \in I$ ou 0 extrémité de I . Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en 0 et $P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g)$.

DÉMONSTRATION. On écrit

$$f(x) = P_n(f)(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n), \quad g(x) = P_n(g)(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

On a donc $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P_n(f)(x) + \mu P_n(g)(x)) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, qui est un DL_n de $\lambda f + \mu g$ en 0. Par unicité, $P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g)$. \square

EXEMPLE 3.11. On a vu $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Donc $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. En sommant et en soustrayant, on obtient les DL de ch et sh en 0. On remarquera que ch étant la partie paire de l'exponentielle, son DL en 0 ne contient que des puissances paires, et que sh étant la partie impaire de l'exponentielle, son DL en 0 ne contient que les puissances impaires. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})}$$

On vient d'écrire un DL à l'ordre $2n+1$ de ch et un DL à l'ordre $2n+2$ de sh .

3.2.2. Produit.

THÉORÈME 3.8. Soit I un intervalle tel que $0 \in I$ ou 0 extrémité de I . Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. Alors le produit fg admet un DL_n en 0 et $P_n(fg)$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(f) \cdot P_n(g)$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in I$,

$$f(x) = P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$g(x) = P_n(g)(x) + x^n \varepsilon_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= P_n(f)(x)P_n(g)(x) \\ &\quad + x^n \left[P_n(f)(x)\varepsilon_2(x) + P_n(g)(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \right] \\ &= P_n(f)(x)P_n(g)(x) + x^n \varepsilon_3(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0. \end{aligned}$$

De plus, $P_n(f)P_n(g)$ est un polynôme de degré au plus $2n$, on l'écrit $P_n(f)P_n(g) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$. En reportant dans l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{k=0}^n c_k x^k + x^n \left[\sum_{k=n+1}^{2n} c_k x^{k-n} + \varepsilon_3(x) \right], \\ &= \sum_{k=0}^n c_k x^k + x^n \varepsilon_4(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière ligne est un DL_n de fg en 0. Par unicité, $P_n(fg) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$. \square

EXEMPLE 3.12. *Déterminons le DL_2 en 0 de $f : x \mapsto e^x \sqrt{1-x}$. Il existe puisque f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty, 1[$. On a $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et $\sqrt{1-x} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$, donc*

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) \left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= 1+x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &\quad (\text{les termes de degré } > 2 \text{ du produit "rentrent" dans le } o) \\ &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.13. *Déterminons le DL_5 en 0 de $f : x \mapsto \ln(1+x)(\operatorname{sh} x - \sin x)$. Il existe puisque f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$. On a $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc quand on fera le produit des deux DL, tous les termes du DL de $\operatorname{sh} x - \sin x$ seront multipliés au moins par x . Il suffit donc pour obtenir un DL_5 de f en 0 de partir d'un DL_4 de $\operatorname{sh} x - \sin x$. On a*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^4), \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^4),$$

donc

$$\operatorname{sh} x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, il suffit pour obtenir un DL_5 de f en 0 de partir d'un DL_2 de $\ln(1+x)$. On a vu $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \left(\frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)\right) \\ &= \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^5). \end{aligned}$$

3.2.3. *Quotient.* Soit I un intervalle tel que $0 \in I$ ou 0 extrémité de I . Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0 . On suppose de plus que $g(0) \neq 0$. On peut alors écrire $P_n(g) = g(0)(1 + Q)$ où Q est un polynôme de degré $\leq n$ qui vérifie $Q(0) = 0$. Ainsi, $g(x) = g(0) \left(1 + Q(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)\right)$. Comme g ne s'annule pas en 0 , $1/g$ est définie dans un voisinage de 0 et

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(0) \left(1 + Q(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)\right)} \\ &= \frac{1}{g(0)} \frac{1}{1 + u}, \text{ avec } u = Q(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= \frac{1}{g(0)} \left(1 - u + u^2 + \dots + (-1)^n u^n + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^n)\right) \end{aligned}$$

On remplace ensuite u par $Q(x)$ dans cette expression, et on tronque à l'ordre n en x . On obtient ainsi un DL_n de $1/g$ en 0 , et du quotient f/g par produit. Illustrons cette procédure sur un exemple.

EXEMPLE 3.14. *Déterminons le DL_5 de \tan en 0 . On a*

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5)}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5)}_{= u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5)\right) \left(1 - u + u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2)\right) \\ &\quad \left(\text{comme } u \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2/2, \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)\right) \\ \\ \tan x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{24} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^5) \end{aligned}$$

Dans le cas où $g(0) = 0$, on peut parfois conclure. La procédure est toujours la même. Prenons un exemple.

EXEMPLE 3.15. Déterminons le DL_3 de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ en 0. Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 0, mais $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin x$, donc f admet une limite en 0, qui vaut 1. Pour obtenir le DL de f en 0 (s'il existe), on cherche à se ramener à une fonction du type $x \mapsto v(x)/(1+u(x))$, avec $u(0) = 0$. Pour cela on met en facteur la plus petite puissance dans les DL du numérateur et du dénominateur, ici x . Par cette procédure, on va diminuer d'un ordre ces DL. Il faut donc partir des DL_4 de ces fonctions pour obtenir un DL_3 de f . On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)}{x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)} \\ &= \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) \left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3). \end{aligned}$$

Retenez que pour un quotient, on cherche toujours à se ramener à une fonction du type $x \mapsto 1/(1+u(x))$, avec $u(a) = 0$.

3.2.4. Composition.

THÉORÈME 3.9. Soit I et J deux intervalles tels que $0 \in I$, $0 \in J$. Soit $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(0) = 0$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. Alors la composée $g \circ f$ admet un DL_n en 0 et $P_n(g \circ f)$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(g) \circ P_n(f)$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in I$, tout $y \in J$,

$$f(x) = P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$g(y) = P_n(g)(y) + y^n \varepsilon_2(y), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \varepsilon_2(y) = 0.$$

On écrit le deuxième DL avec $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= P_n(g)(f(x)) + f(x)^n \varepsilon_2(f(x)) \\ &= P_n(g)(P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x)) + (P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x))^n \varepsilon_2(f(x)). \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x))^k = (P_n(f)(x))^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, donc $P_n(g)(P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x)) = P_n(g)(P_n(f)(x)) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. De plus, comme $f(0) = 0$, $P_n(f)(0) = 0$ et donc $P_n(f)(x) = O_{x \rightarrow 0}(x)$, et $(P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x))^n \varepsilon_2(f(x)) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Ainsi

$$g(f(x)) = P_n(g)(P_n(f)(x)) + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

Maintenant, $P_n(g) \circ P_n(f)$ est un polynôme de degré au plus n^2 , on l'écrit $P_n(g)P_n(f) = \sum_{k=0}^{n^2} c_k X^k$. En reportant dans l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sum_{k=0}^n c_k x^k + x^n \left[\sum_{k=n+1}^{n^2} c_k x^{k-n} \right] + o_{x \rightarrow 0}(x^n), \\ &= \sum_{k=0}^n c_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n). \end{aligned}$$

Cette dernière ligne est un DL_n de $g \circ f$ en 0. Par unicité, $P_n(g \circ f) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$. \square

EXEMPLE 3.16.

(1) Déterminons le DL_4 en 0 de $x \mapsto e^{\sin x}$. On écrit $e^{\sin x} = \exp\left(x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)\right)$.

On pose $u = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$, on a $u \rightarrow 0$ donc

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o_{u \rightarrow 0}(u^4) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6} (x^3) + \frac{1}{24} (x^4) + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \end{aligned}$$

(2) Déterminons le DL_4 en 0 de $x \mapsto e^{\cos x}$. Il faut prendre garde ici : $\cos 0 = 1$, donc on ne peut pas utiliser directement le DL de \exp en 0. On écrit

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)} \\ &= e \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)}, \quad u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= e \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u^4) \right) \\ &= e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \right) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \end{aligned}$$

3.2.5. Intégration.

THÉORÈME 3.10. Soit I un intervalle tel que $0 \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f admet un DL_n en 0 du type $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Alors toute primitive F de f sur I admet un DL_{n+1} en 0 de la forme

$$F(x) = F(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}).$$

N'oubliez pas d'ajouter la constante d'intégration.

DÉMONSTRATION. Il existe $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Notons F_0 la primitive de f sur I qui s'annule en 0 : $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt$. Il suffit de montrer le résultat pour F_0 , les autres primitives de f sur I différant de F_0 d'une constante égale à leur valeur en 0. On intègre l'égalité précédente terme à terme :

$$\int_0^x f(t)dt = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x t^n\varepsilon(t)dt$$

Il reste à montrer que $\int_0^x t^n\varepsilon(t)dt = o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x| \leq \alpha$ alors $|\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$. Soit $x \in I$ tel que $|x| \leq \alpha$. On a

$$\left| \int_0^x t^n\varepsilon(t)dt \right| \leq \varepsilon \left| \int_0^x |t|^n dt \right| = \varepsilon \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon|x|^{n+1}.$$

D'où le résultat. □

EXEMPLE 3.17. La fonction \arctan est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\arctan x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}).$$

Donc en intégrant ce DL, on obtient

$$\arctan x = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})}$$

3.2.6. *Dérivation.* En général, il est interdit de dériver un DL. Il se peut que f admette un DL_n en a mais que f' n'admette pas de DL_{n-1} en a . Considérons par exemple $f : x \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$. On a $f(x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$, donc f admet un DL_1 en 0. De plus, f est dérivable sur \mathbb{R}^* avec $f'(x) = 1 + 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. La dérivée f' n'admet donc pas de limite en 0, d'où f' n'admet pas de DL_0 en 0.

Cependant, si f est de classe \mathcal{C}^n sur I , $n \geq 1$, alors f' est de classe \mathcal{C}^{n-1} sur I et d'après la formule de Taylor-Young, f' admet un DL_{n-1} en a de la forme

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots + \frac{(f^{(n-1)}(a))}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n-1}) \\ &= \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n \right)' + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n-1}). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on peut donc dériver le DL_n de f pour obtenir le DL_{n-1} de f' en a . Cette remarque n'est intéressante que si le DL_n de f en a n'a pas été obtenu à l'aide de la formule de Taylor-Young, c'est-à-dire en calculant les dérivées successives de f (qui sont aussi celles de f') en a .

3.3. Développements asymptotiques. Toutes les fonctions n'admettent pas de développement limité en tout point. On cherche donc à étendre la gamme des fonctions auxquelles on cherche à comparer une fonction donnée. L'idée est toujours de se ramener à des fonctions dont le comportement est bien connu. Les familles de fonctions les plus utilisées sont $(x \mapsto (x-a)^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(x \mapsto (x-a)^n)_{n \in \mathbb{R}}$, $(x \mapsto x^\alpha |\ln x|^\beta)_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$, $(x \mapsto x^\alpha e^{\beta x})_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$.

Dans les exercices de ce cours, le cas que l'on rencontrera le plus souvent est celui de la famille $(x \mapsto (x - a)^n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

EXEMPLE 3.18. Soit $f : x \mapsto x e^{\frac{2x}{x^2-1}}$. On cherche un développement asymptotique de f en $\pm\infty$. Traitons d'abord l'exposant. On a

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2} + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o} \left(\frac{1}{x^3} \right).$$

On utilise ensuite le DL d'exponentielle en 0.

$$\begin{aligned} e^{\frac{2x}{x^2-1}} &= 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2} \frac{4}{x^2} + \frac{1}{6} \frac{8}{x^3} + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o} \left(\frac{1}{x^3} \right) \\ &= 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{10}{3x^3} + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o} \left(\frac{1}{x^3} \right) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{10}{3x^2} + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

EXEMPLE 3.19. Déterminons le développement asymptotique de $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ selon la famille $(x \mapsto x^\alpha |\ln x|^\beta)_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$ à la précision $1/x^4$ en $+\infty$. On a $(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln(1+x)\right)$. Tout d'abord, on cherche un développement asymptotique de $\ln(1+x)$ en $+\infty$. On écrit

$$\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right),$$

car $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. D'où $\frac{1}{x^2} \ln(1+x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^4} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. On peut donc utiliser le DL₂ d'exp en 0.

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} &= 1 + \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4} \right)^2 + \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^4} \right) \\ &= 1 + \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{\ln^2 x}{x^4} - \frac{1}{2x^4} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^4} \right). \end{aligned}$$

3.4. Applications.

3.4.1. *Calcul de limites.* Comme les équivalents, les développements limités peuvent être utiles pour calculer les limites de formes indéterminées, quand les équivalents ne suffisent pas pour conclure.

EXEMPLE 3.20. *Etudions l'existence de* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x}$.

On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ et $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$, donc

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

et $\ln(1 + \sin x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$, donc

$$\ln(1 + \sin x) - \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{-x^3/2} = \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x}$ n'existe pas, mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 + \sin x) - \tan x}{\sin x - \tan x} = -\infty$.

3.4.2. *Etude des branches infinies de fonctions.* Dans la suite, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f , $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$. On dit que \mathcal{C}_f admet une branche infinie lorsque l'une des deux coordonnées tend vers $\pm\infty$. On cherche souvent à déterminer plus précisément l'allure de ces branches infinies. Peut-on en particulier dire si \mathcal{C}_f "ressemble" à une autre courbe plus simple?

Pour cela, définissons la notion de courbes asymptotes. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a fini ou $\pm\infty$. On dit que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont **asymptotes** (ou que \mathcal{C}_f admet \mathcal{C}_g pour asymptote) au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$.

Lorsqu'une fonction f admet une limite infinie en un point a fini, *i.e.* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors on dit que \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $x = a$ pour asymptote (cela ne rentre pas dans le cadre de la définition précédente car la droite d'équation $x = a$ n'est pas la courbe représentative d'une fonction, mais l'idée est la même).

Lorsque l'on sait que deux courbes sont asymptotes au voisinage de a (fini ou $\pm\infty$), on se demande souvent quelle est leur position relative au voisinage de a . Pour cela, il suffit d'étudier le signe de $f - g$ au voisinage de a . En effet, si $f(x) - g(x) \geq 0$ au voisinage de a , alors \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g au voisinage de a , et si $f(x) - g(x) \leq 0$ au voisinage de a , alors \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g au voisinage de a .

Lorsqu'on connaît un développement asymptotique de f suffisamment précis, on peut souvent en déduire l'allure de la courbe représentative de f au voisinage du point considéré. En particulier, s'il existe une asymptote, et si oui quelle est la position relative de la courbe de f et de son asymptote.

EXEMPLE 3.21. *Reprenons un des exemples de développements asymptotiques précédents : $f : x \mapsto e^{\frac{2x}{x^2-1}}$. On a vu que*

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{10}{3x^2} + o_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Ainsi, $f(x) - (x + 2) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2}{x} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe de f , \mathcal{C}_f , au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

De plus $f(x) - (x + 2)$ est du signe de $\frac{2}{x}$ au voisinage de $\pm\infty$, donc \mathcal{C}_f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$, et en dessous au voisinage de $-\infty$.

4. Récapitulatif des développements limités des fonctions usuelles en 0

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

5. Test d'auto-évaluation

5.1. Équivalents. Sauf mention contraire, on désigne par x_0 un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ et par f et g des fonctions ne s'annulant pas dans un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 .

- (1) Que signifie $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$.
- (2) Donner deux définitions de $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.
- (3) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Que signifie $h(x) \underset{x_0}{\sim} 0$?
- (4) Qu'ont en commun deux fonctions f et g équivalentes au voisinage de x_0 ?
- (5) Vrai ou faux : " $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow f$ et g ont les mêmes variations au voisinage de x_0 ".
- (6) Quelles sont les opérations autorisées sans conditions avec les équivalents ?
- (7) Quand peut-on dire que $f(x) + g(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$?
- (8) A quelle condition a-t-on " $u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \Rightarrow e^{u(x)} \underset{x_0}{\sim} e^{v(x)}$ " ?
- (9) A quelle condition a-t-on " $u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \Rightarrow \ln(u(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(v(x))$ " ?
- (10) Soit une fonction u telle que $u(x) \underset{x_0}{\sim} 1$. Donner un équivalent de $\ln(u(x))$ au voisinage de x_0 .
- (11) Soit une fonction u telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Quand peut-on écrire que $u(x) \underset{x_0}{\sim} \ell$?
- (12) Donner les équivalents en 0 des fonctions suivantes :
 - (a) $\sin, x \mapsto 1 - \cos x,$
 - (b) $\operatorname{sh}, x \mapsto \operatorname{ch} x - 1,$
 - (c) $\tan, \operatorname{th},$
 - (d) $x \mapsto e^x - 1,$
 - (e) $x \mapsto \ln(1 + x), x \mapsto \ln(1 - x),$
 - (f) $\arcsin, \operatorname{arctan},$
 - (g) $x \mapsto (1 + x)^\alpha - 1$ pour tout $\alpha \neq 0$.
- (13) Vrai ou faux : " $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(e^x \underset{+\infty}{\sim} x^\alpha)$ ".
- (14) Vrai ou faux : " $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^\alpha)$ ".
- (15) Vrai ou faux : " $(\forall \alpha > 0)(x^\alpha e^x \underset{+\infty}{\sim} e^x)$ ".

- (16) Vrai ou faux : " $(\forall \alpha > 0)(x^\alpha \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^\alpha)$ ".
- (17) Vrai ou faux : " $(\forall \alpha > 0)(\exists \beta \in \mathbb{R})(x^\alpha \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^\beta)$ ".
- (18) Vrai ou faux : " $(\forall \alpha > 0)(x^\alpha e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} x^\alpha)$ ".

5.2. Formules de Taylor. Sauf mention contraire, n est un entier naturel.

- (1) Quelle est la forme générale des formules de Taylor à l'ordre n ? Quelles sont les différents restes possibles.
- (2) (a) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre n de la fonction $x \mapsto e^x$ en 0.
 (b) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n de la fonction $x \mapsto e^x$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
 (c) Laquelle des deux formules précédentes permet de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.
- (3) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $a \in I$, tel que a ne soit pas une extrémité de I .
- (a) Donner une condition nécessaire pour que f admette en a un extremum local. Supposons désormais que cette condition est vérifiée.
- (b) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de f en a .
- (c) Montrer qu'en fonction du signe de $f''(a)$, on peut montrer que f présente en a un minimum ou un maximum local.
- (d) Comment procéder si f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et si $f''(a) = 0$.
- (e) Application : Soient a et b deux réels distincts strictement positifs. Etudier sans tableau de variation, les extrema sur \mathbb{R} de la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = (x^3 - a)(x^3 - b)$.

5.3. Développements limités. Sauf mention contraire, n est un entier naturel.

- (1) Soit f une fonction. Donner la forme du développement limité de f à l'ordre n en a lorsque
- (a) $a = 0$,
- (b) $a \in \mathbb{R}^*$,
- (c) $a = \pm\infty$.

- (2) Soit f une fonction vérifiant au voisinage de 0, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.
Que dire de la continuité puis de la dérivabilité de f en 0? Même question pour l'existence de la dérivée seconde de f .
- (3) Quelles sont les opérations autorisées lors de la manipulation de développements limités?
- (4) Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ et $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.
- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dire à quel ordre maximal on peut avoir un développement limité de $\lambda f + g$ puis le donner.
- (b) On suppose $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$. Dire à quel ordre maximal on peut avoir un développement limité du produit fg puis le donner.
- (c) On suppose que $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = b_2 = 0$. Dire à quel ordre maximal on peut avoir un développement limité du produit fg puis le donner.
- (d) On suppose $b_0 \neq 0$. Dire si le quotient f/g admet un développement limité en 0. Si oui, quel est l'ordre maximal que l'on peut avoir? Expliquer comment vous calculeriez ce développement limité.
- (5) Soient les fonctions f et g définies au $V(0)$ par
- $$f(x) = 2x^3 + x^4 - x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5) \text{ et } g(x) = x^2 + 2x^3 - 5x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4).$$
- (a) A quel ordre maximum peut-on calculer le D.L de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ au $V(0)$?
- (b) Donner ce D.L.
- (6) Soient les fonctions f et g définies au $V(0)$ par
- $$f(x) = 3x - 2x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \text{ et } g(x) = x^2 - x^3 - x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5).$$
- (a) A quel ordre maximum peut-on calculer le D.L de $h(x) = f(x)g(x)$ au $V(0)$?
- (b) Donner ce D.L.
- (7) (a) Donner le développement limité en 0 des trois fonctions usuelles à partir desquels on retrouve les développements limités des autres fonctions classiques.
- (b) Comment retrouve-t-on les autres développements limités?
- (8) Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et $g(x) = 2 + 3(x - 1) + 4(x - 1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x - 1)^2)$.

- (a) Donner l'équation de la tangente de f en $a = 0$ ainsi que la position relative de la tangente par rapport à la courbe représentative de f au voisinage de a .
- (b) Même question pour g en $a = 1$.
- (9) Ecrire un développement limité généralisé en $a = 0$ à l'ordre n . Même question en $a = \pm\infty$.
- (10) Soit $f(x) = 2x^2 + 3x - 1 + \frac{5}{x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donner l'équation de l'asymptote de f et $\pm\infty$ puis la position relative de cette asymptote avec la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$.
- (11) Quel lien existe-il entre le développement limité en 0 d'une fonction f et son équivalent en 0?

Intégrales généralisées

Nous allons maintenant étendre la notion d'intégrale lorsque l'intervalle d'intégration est non borné ou lorsque la fonction n'est pas bornée.

1. Définitions et propriétés immédiates

1.1. Intégrales en dehors du cadre des intégrales simples. On veut définir l'intégrale d'une fonction f , définie sauf au plus en un nombre fini de points d'un intervalle I , dans les cas suivants :

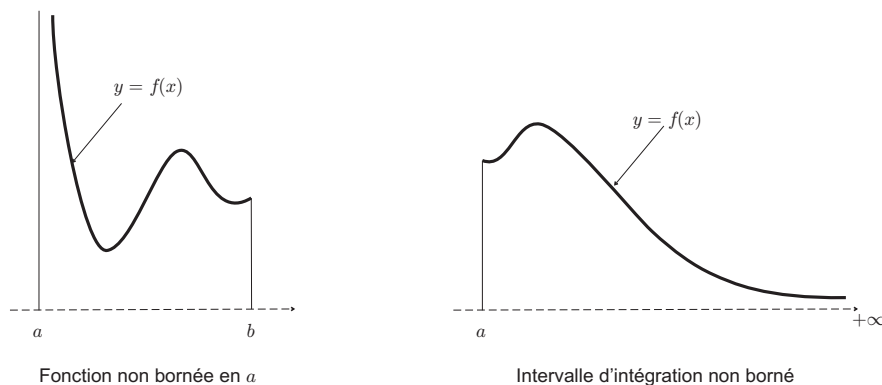
- l'intervalle d'intégration I est non borné : $] -\infty, +\infty[$ ou une demi-droite,
- la fonction f ne reste pas bornée lorsque $x \rightarrow a \in I$ qui peut être à l'intérieur de I ou être une extrémité de I .

Grace à la relation de Chasles, on se ramène toujours à l'une des deux situations suivantes :

- (1) l'intervalle I est de la forme $[a, +\infty[$ ou $I =]-\infty, a]$ lorsque l'intervalle d'intégration est non borné ;
- (2) l'un des cas suivants : $I =]a, b]$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \rightarrow a$ ou $I = [a, b[$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \rightarrow b$.

Les secondes instances de la situation 1 et de la situation 2, se traitent exactement comme les premières. C'est pourquoi, nous examinerons celles-ci et laisserons au lecteur le soin de faire les adaptations immédiates pour les cas $I =]-\infty, a]$ et $I = [a, b[$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \rightarrow b$. La figure suivante donne ainsi les deux cas génériques

qui ne rentrent pas dans le cadre des intégrales simples vues à la section précédente



1.2. Définition des intégrales généralisées. Nous commençons par le cas où on veut intégrer une fonction f sur l'intervalle $]a, b]$, qui n'est pas bornée lorsque $x \rightarrow a$. On pourra le faire si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) la (restriction de la) fonction f (à l'intervalle $[x, b]$) est **intégrable** sur $[x, b]$ pour tout $a < x < b$;
- (2) la fonction définie pour $a < x \leq b$ par

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt$$

admet une **limite finie** ℓ lorsque $x \rightarrow a$.

On dit alors que l'intégrale (généralisée) est **convergente**. La limite ℓ est appelée **intégrale (généralisée ou impropre)** de f entre a et b et est notée

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ a < x}} \int_x^b f(t) dt.$$

On dit qu'elle est **divergente** si $\int_x^b f(t) dt$ ne tend pas vers une limite finie lorsque $x \rightarrow a$.

Examinons maintenant le cas où on veut intégrer une fonction f sur l'intervalle non borné $[a, +\infty[$. Là aussi, on pourra le faire si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) la (restriction de la) fonction f (à l'intervalle $[a, x]$) est **intégrable** sur $[a, x]$ pour tout $x > a$;

(2) la fonction définie pour $x > a$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

admet une **limite finie** ℓ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

De la même façon que pour le premier cas, on dit alors que l'intégrale (généralisée) est **convergente**. La limite ℓ est appelée **intégrale (généralisée ou impropre)** de f entre a et $+\infty$ et est notée

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

On dit qu'elle est **divergente** si $\int_a^x f(t) dt$ ne tend pas vers une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$.

REMARQUE 4.1. *Par commodité, on utilise souvent la notation*

$$\int_a^b f(x) dx \text{ ou } \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

pour désigner une intégrale généralisée que l'on veut calculer ou étudier même si on ne sait pas a priori si elle est convergente.

1.3. Intégrales de Riemann. Les intégrales généralisées, qui sont données dans la proposition qui suit, sont plus que des exemples. Elles sont appelées **intégrales de Riemann** et constituent des intégrales de référence, qui permettent à l'aide des critères qui seront développés dans la suite, d'étudier la convergence d'un grand nombre d'intégrales généralisées.

PROPOSITION 4.1. *Pour tout réel $a > 0$, on a*

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ est convergente si } \alpha < 1 \text{ et divergente si } \alpha \geq 1.$$

De même,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ convergente si } \alpha > 1 \text{ et divergente si } \alpha \leq 1.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $0 < x < a$ (resp. $x > a$), la fonction $t \rightarrow 1/t^\alpha$ est continue sur $[x, a]$ (resp. $[a, x]$). Elle est donc intégrable et le calcul de son intégrale se

ramène à la détermination d'une de ses primitives :

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1/t^{\alpha-1}), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln t, & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On a alors

$$\int_x^a \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(a^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(a/x), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^a \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha \geq 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}a^{1-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Le cas de la seconde intégrale généralisée s'obtient de la même façon à partir de la primitive $t \rightarrow F(t)$ ci-dessus. \square

1.4. Propriétés immédiates. Les propriétés données par les propositions suivantes sont des conséquences directes des propriétés des intégrales simples.

On a d'abord la proposition suivante qui montre que la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ en a ou celle de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ne dépend ni de b pour la première ni de a pour la seconde et que la relation de Chasles s'étend aux intégrales généralisées.

PROPOSITION 4.2. *Pour tout c tel que $a < c < b$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$, avec f non bornée lorsque $x \rightarrow a$, est convergente si et seulement si $\int_a^c f(x) dx$ est convergente et*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

On a de même, pour tout c tel que $c > a$, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente si et seulement si $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ converge et

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour tout $a < x < c < b$, la relation de Chasles montre que $f \in \mathcal{I}([x, c])$ et $f \in \mathcal{I}([c, b])$ et qu'on a

$$\int_x^b f(t) dt = \int_x^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Les deux intégrales dépendant de x diffèrent d'une constante. Elles admettent toutes les deux une limite ou n'en admettent pas. Le passage à la limite en x permet d'établir

la relation de Chasles. On a une démonstration identique pour la seconde partie de la proposition. \square

La proposition suivante étend aux intégrales généralisées les propriétés de linéarité de l'intégrale simple.

PROPOSITION 4.3. *Si f et g sont deux fonctions vérifiant les conditions générales de la proposition précédente, alors, si $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont toutes les deux convergentes, pour tout λ et tout μ deux constantes réelles, l'intégrale généralisée du premier membre converge et on a*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

On a un énoncé et un résultat analogue pour une intégrale généralisée entre a et $+\infty$.

DÉMONSTRATION. La démonstration est immédiate à partir de la linéarité de l'intégrale simple et des opérations sur les limites. \square

2. Le critère de Cauchy

L'application du critère de Cauchy donne un outil d'une remarquable efficacité pour étudier les intégrales généralisées.

2.0.1. *Le critère de Cauchy.* Le théorème suivant donne l'énoncé du **critère de Cauchy**.

THÉORÈME 4.1. *Soit $f \in \mathcal{I}([x, b])$ pour tout $a < x < b$, non bornée lorsque $x \rightarrow a$. (Noter que si on enlève la condition non bornée lorsque $x \rightarrow a$, on sera dans le cadre des intégrales simples.) Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : (a < x, x' < b, |x - x'| \leq \eta) \implies \left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

(Une autre façon d'énoncer ce critère est : $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si

$$\lim_{x, x' \rightarrow a} \int_x^{x'} f(t) dt = 0.$$

Il faut, cependant, veiller à faire tendre x et x' vers a de façon indépendante, i.e., sans les lier par une relation. Cependant, si $\lim_{x, x' \rightarrow a} \int_x^{x'} f(t) dt$ ne tend pas vers 0 lorsque x et x' tendent vers a , même en restant liés par une relation, alors l'intégrale généralisée n'est pas convergente.)

On a de même. Soit $f \in \mathcal{I}([a, x])$ pour tout $x > a$. Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a : (x, x' > A) \implies \left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ici aussi, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si

$$\lim_{x, x' \rightarrow +\infty} \int_x^{x'} f(t) dt = 0$$

avec les mêmes précautions quand on fait tendre x et x' vers $+\infty$.

DÉMONSTRATION. La démonstration est immédiate à partir du critère de Cauchy appliqué à la convergence de la fonction

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt$$

lorsque $x \rightarrow a$ ou de celle de

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$. □

Comme première application du critère de Cauchy, nous avons la proposition suivante qui donne une condition nécessaire de convergence de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ lorsque la fonction f tend vers une limite ℓ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

PROPOSITION 4.4. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \neq 0$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ est divergente.}$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$ sinon on travaille avec $-f$. On sait alors dans les deux cas précédents qu'il existe A et $\ell_0 > 0$ tel que $f(x) \geq \ell_0$ pour tout $x \geq A$. Pour $A \leq t \leq t'$, on a donc

$$\int_t^{t'} f(x) dx \geq \ell_0(t' - t).$$

Prenons $t' = t + h$ avec $h > 0$. On a ainsi

$$\int_t^{t+h} f(x) dx \geq \ell_0 h > 0.$$

En faisant tendre $t \rightarrow +\infty$, on voit que le critère de Cauchy n'est pas vérifié et donc que l'intégrale n'est pas convergente. \square

REMARQUE 4.2. **Une erreur à ne pas commettre** : affirmer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors l'intégrale est convergente. L'intégrale peut être **convergente ou divergente**. Il suffit de considérer les intégrales de Riemann données ci-dessus.

3. Convergence absolue

Si la fonction f garde un signe constant au voisinage du point a pour une intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ lorsque $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \rightarrow a$ ou au voisinage de $+\infty$ pour une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, on se ramène à l'aide de la relation de Chasles et au besoin en remplaçant f par $-f$ au cas d'une fonction $f \geq 0$.

3.0.2. *Intégrales de fonctions positives*. Le théorème suivant donne des critères permettant d'assurer que l'intégrale généralisée d'une fonction positive converge ou diverge. On suppose que toutes les fonctions considérées vérifient les conditions permettant de considérer une intégrale généralisée sur l'intervalle apparaissant dans l'énoncé.

THÉORÈME 4.2. (1) Soit $f \geq 0$ sur $\mathcal{D}_f \cap [a, +\infty[$ (resp. sur $\mathcal{D}_f \cap]a, b]$). L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (resp. $\int_a^b f(x) dx$) est convergente si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_a^x f(t) dt \leq M, \forall x \in [a, x] \quad (\text{resp.} \quad \int_x^b f(t) dt \leq M, \forall x \in]a, b]).$$

(2) Soient f et g vérifiant $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap [a, +\infty[$, (resp. $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap]a, b]$), alors

- si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est convergente (resp. $\int_a^b g(x) dx$ est convergente), alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente (resp. $\int_a^b f(x) dx$ est convergente) ;
- si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est divergente (resp. $\int_a^b f(x) dx$ est divergente), alors $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est divergente (resp. $\int_a^b g(x) dx$ est divergente).

- (3) Soient f et g vérifiant $f(x)$ et $g(x)$ sont ≥ 0 pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap [a, +\infty[$,
(resp. $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap]a, b]$), et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$).

On a alors

$$\ell > 0 \implies \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ et } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ sont de même nature}$$

(sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes)

$$\text{(resp. } \int_a^b f(x) dx \text{ et } \int_a^b g(x) dx \text{ sont de même nature).}$$

- (4) En particulier, on a les mêmes conclusions que dans la partie (3) ci-dessus si
 $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ (resp. $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$).

DÉMONSTRATION. Nous donnons la démonstration pour le cas d'une intégrale sur $[a, +\infty[$, celle sur $]a, b]$ est tout a fait analogue.

On sait que $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est continue. On a pour $h > 0$

$$\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Le premier théorème de la moyenne donne alors

$$\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = Kh$$

avec $\inf_{x \in [x, x+h]} f(x) \leq K \leq \sup_{x \in [x, x+h]} f(x)$ et donc

$$\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \geq 0.$$

Ceci établit le critère (1).

Les critères (2), (3) et (4) sont des conséquences directes du critère (1). □

EXEMPLE 4.1. *Convergence des intégrales généralisées*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln x} dx \text{ avec } a > e$$

selon les valeurs de α .

Pour $\alpha < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x^\alpha \ln x = +\infty$. L'intégrale généralisée est donc divergente pour $\alpha < 0$.

L'inégalité suivante

$$\frac{1}{x^\alpha \ln x} < \frac{1}{x^\alpha}$$

permet d'utiliser les intégrales de Riemann. Il s'ensuit que l'intégrale généralisée précédente est convergente pour $\alpha > 1$. On ne peut rien dire encore pour $0 \leq \alpha \leq 1$. Traitons d'abord le cas $\alpha = 1$. On a pour $c > a$

$$\int_a^c \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln x)]_{x=a}^{x=c} = \ln c - \ln a ;$$

ceci montre que $\int_a^c \frac{1}{x \ln x} dx$ ne reste pas borné lorsque $c \rightarrow +\infty$. L'intégrale est donc divergente. On utilise maintenant le fait que $1/x^\alpha \ln x > 1/x \ln x$ pour $0 \leq \alpha < 1$ et $x \geq a$ pour en déduire que l'intégrale est divergente pour $\alpha < 1$. L'introduction du terme $\ln x$ ne change rien : la convergence des intégrales précédentes est la même que celle des intégrales de Riemann.

3.1. Convergence absolue. L'importance des critères de convergence sur les intégrales de fonctions positives vient aussi du critère suivant.

THÉORÈME 4.3. *Si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ (resp. $\int_a^b |f(x)| dx$) est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (resp. $\int_a^b f(x) dx$) est convergente. On dit alors que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (resp. $\int_a^b f(x) dx$) est **absolument convergente**.*

DÉMONSTRATION. Examinons là aussi le cas $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, celui correspondant à $\int_a^b f(x) dx$ est tout à fait analogue. Si $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ est convergente, alors

$$\lim_{t, t' \rightarrow +\infty} \int_t^{t'} |f(x)| dx = 0.$$

Comme

$$\left| \int_t^{t'} f(x) dx \right| \leq \int_{\min(t, t')}^{\max(t, t')} |f(x)| dx$$

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ satisfait aussi le critère de Cauchy et est donc convergente. \square

REMARQUE 4.3. *Une intégrale généralisée peut être **convergente sans être absolument convergente**. Considérons l'intégrale généralisée*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

C'est une intégrale simple au voisinage de $x = 0$ car $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$. Le problème ne se pose qu'au voisinage de l'infini. Comme la convergence de l'intégrale ne dépend pas

de la borne $x = 0$, on va étudier celle de

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

pour ne pas introduire une difficulté qui n'en est pas.

On regarde d'abord si cette intégrale est absolument convergente. Comme $|\sin x| \leq 1$, on

a

$$\frac{|\sin x|^2}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}.$$

Mais $|\sin x|^2 = \sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$ et donc

$$\int_{\pi}^a \frac{|\sin x|^2}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{\pi}^a \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_{\pi}^a \frac{\cos(2x)}{x} dx.$$

On calcule la 1^{ère} intégrale et on intègre par parties la seconde

$$\int_{\pi}^a \frac{|\sin x|^2}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(a/\pi) - \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(2a)}{a} + \int_{\pi}^a \frac{\sin(2x)}{x^2} dx \right).$$

Comme $\frac{|\sin(2x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx \text{ est absolument convergente}$$

et donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^a \frac{\sin(2x)}{x^2} dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx \in \mathbb{R}.$$

Il vient donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^a \frac{|\sin x|^2}{x} dx = +\infty - 0 - \frac{1}{4} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx = +\infty.$$

Les critères de comparaison montrent alors que

$$\int_{\pi}^a \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ est divergente}$$

et donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ n'est pas absolument convergente

On regarde maintenant si $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente. Comme ci-dessus, on utilise une intégration par parties

$$\int_{\pi}^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_{x=\pi}^{x=a} - \int_{\pi}^a \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Comme $|\cos x|/x^2 \leq 1/x^2$, l'intégrale correspondante est absolument convergente. Il en résulte que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente et

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Il en résulte que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ n'est pas absolument convergente.

4. Intégrales semi-convergentes

Les intégrales comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ qui sont convergentes sans être absolument convergentes sont dites **semi-convergentes**. Ce ne sont pas de vraies intégrales mais des limites d'intégrales. C'est pourquoi dans le cadre d'une théorie de l'intégration plus élaborée comme l'intégrale de Lebesgue, ces intégrales ne sont pas convergentes. Elles sont cependant importantes et utiles même si on se limite aux outils pratiques nécessaires dans les calculs d'ingénierie.

On se limite ici aux intégrales généralisées du type

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

pour lesquelles on dispose essentiellement du théorème d'Abel suivant.

THÉORÈME 4.4. *Soient u et v deux fonctions satisfaisant les conditions générales de considération de l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} u(x)v(x) dx$. S'il existe une constante M telle que : pour tout t et $t' \geq a$, on a*

$$\left| \int_t^{t'} v(x) dx \right| \leq M$$

et si u est décroissante sur $[a, +\infty[$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$$

Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} u(x)v(x) dx$$

est convergente.

DÉMONSTRATION. On va montrer que cette intégrale satisfait le critère de Cauchy. Pour cela, considérons $a \leq t \leq t'$. Le second théorème de la moyenne donne : il existe ξ , $t \leq \xi \leq t'$ tel que

$$\int_t^{t'} u(x)v(x) dx = u(t^+) \int_t^\xi v(x) dx + u(t'^-) \int_\xi^{t'} v(x) dx.$$

L'inégalité triangulaire donne alors

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t'} u(x)v(x) dx \right| &\leq u(t^+) \left| \int_t^\xi v(x)dx \right| + u(t'^-) \left| \int_\xi^{t'} v(x)dx \right| \\ &\leq M(u(t^+) + u(t'^-)) \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t^+) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t'^-) = 0,$$

l'inégalité précédente montre que l'intégrale vérifie le critère de Cauchy et est ainsi convergente. \square

REMARQUE 4.4. *Le théorème assurant que les intégrales*

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ et } \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

sont de même nature si f et g sont équivalentes lorsque x tend vers $+\infty$ (rappelons que cela veut dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$) n'est pas vrai si f et g ne gardent pas un signe constant. En effet, si $f(x) = \sin(x)/\sqrt{x}$, le théorème ci-dessus assure que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

est convergente. Considérons alors la fonction g définie par

$$g(x) = f(x)(1 + f(x)).$$

Les opérations sur les limites et les intégrales montrent que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx$$

sera convergente si et seulement si

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$$

est convergente. On a vu ci-dessus que

$$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

est divergente. Les intégrales de f et de g sont de nature différente bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$.

EXERCICE 4.1. (1) *Montrer que l'intégrale généralisée*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

est semi-convergente.

(2) *En utilisant le changement de variable $x = u^2$, en déduire que l'intégrale de Fresnel*

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

est convergente. En déduire que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ peut être convergente sans que $f(x)$ tende vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

5. Test d'auto-évaluation

- (1) Qu'est-ce qu'une intégrale généralisée ?
- (2) Soit f continue sur $[a, b]$. Donner la définition de " $\int_a^b f(t)dt$ converge". En cas de convergence, qu'elle est la valeur de $\int_a^b f(t)dt$.
- (3) Qu'est-ce que l'absolue convergence d'une intégrale généralisée ?
- (4) Quel lien existe-t-il entre la convergence absolue et la convergence d'une intégrale généralisée ?
- (5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale de Riemann généralisée en 0 converge ?
- (6) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale de Riemann généralisée en $a \in \mathbb{R}^*$ converge ?
- (7) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale de Riemann généralisée en $+\infty$ converge ?
- (8) Soit f continue sur $[a, +\infty[$. Que dire de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$?
- (9) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Donner trois critères permettant de déduire la nature de $\int_a^b f(t)dt$ connaissant la nature de $\int_a^b g(t)dt$.
- (10) Soit une fonction f continue sur $]a, +\infty[$. Soient b et c tels que $a < b < c$.
- (a) Vrai ou faux : " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \implies \int_c^{+\infty} f(t)dt$ CV".
- (b) Vrai ou faux : " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \implies \int_a^b f(t)dt$ DV".
- (c) Vrai ou faux : " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \implies \int_a^b f(t)dt$ CV".
- (11) Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.
- (a) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{ch}(x)}{x} dx$.
- (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\frac{3}{2}} + \cos(x)} dx$.
- (c) $\int_0^1 \frac{\text{ch}(x) - \cos(x)}{x^{\frac{5}{2}}} dx$.
- (d) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+2)^3} dt$.
- (e) $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{(2-t)^{\frac{1}{6}}} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.