Analyse I

Françoise Bernis
Fabrice Dodu

FORMATION CONTINUE : DUT+3

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES : INSA TOULOUSE

2001-2002
Version 1.0

Sommaire

II Les annexes 124

Première partie

Le cours

Ce cours est dispensé à l’INSA–Toulouse pour la Formation Continue DUT+3. Nous remercions aimablement Mme Sandrine Scott pour ces exercices bilan.

1 Fonctions réelles de la variable réelle

1.1 Rappels

Intervalle de $\mathbb{R}$

notion clé :
Intervalle, segment

Définition 1.1

On appelle intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$ ou segment de $\mathbb{R}$ l'ensemble

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}\ .$$

On distingue dans $\mathbb{R}$ plusieurs types d'intervalles :

i) *Intervalle ouvert borné :*
$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

ii) *Intervalle ouvert non borné :*
$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$.
$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.

iii) *Intervalle fermé non borné :*
$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ $a \in \mathbb{R}$.
$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ $a \in \mathbb{R}$.

iv) *Intervalle semi-ouvert borné :*
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a < b\}$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \leq b\}$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Voisinage de x_0

Exemples :
exemple A.1.1

notion clé :
Voisinage

Définition 1.2

i) x_0 *est un réel.*
On dit que $V(x_0)$, *sous-ensemble de* $\mathbb{R}$, *est un voisinage de* x_0 *s'il existe un intervalle* $]a,b[$ *tel* $x_0 \in]a,b[$ *et* $]a,b[\subset V(x_0)$.
Dans la pratique, on prendra : $V(x_0) =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$.

ii) $x_0 = +\infty$.
On dit que $V(+\infty)$, *sous-ensemble de* $\mathbb{R}$, *est un voisinage de* $+\infty$ *s'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel* $]a, +\infty[\subset V(+\infty)$.
Dans la pratique, on prendra : $V(+\infty) =]a, +\infty[$.

iii) $x_0 = -\infty$.
On dit que $V(-\infty)$, *sous-ensemble de* $\mathbb{R}$, *est un voisinage de* $-\infty$ *s'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel* $]-\infty, a[\subset V(-\infty)$.
Dans la pratique, on prendra : $V(-\infty) =]-\infty, a[$.

1.2 Généralités sur les fonctions

Définition

notion clé :
Fonction

Exemples :
exemple A.1.2
exemple A.1.3

Définition 1.3

On appelle fonction réelle de la variable réelle toute relation qui à une valeur réelle x, appelée variable, associe au plus un réel y appelé image.

On désigne la fonction par une lettre f, g, h, ...

Le sous-ensemble D des réels pour lequel $y = f(x)$ existe s'appelle le domaine de définition de f.

Graphe de f

Exercices :
exercice B.1.1

notion clé :
Graphe

Définition 1.4

Le graphe de f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ dans un repère donné que l'on aura choisi, sauf avis contraire, orthonormé.

Fonction monotone

Exemples :
exemple A.1.4

notion clé :
Monotone

Définition 1.5

i) f *définie sur D est monotone croissante sur D si :*

$$\forall (x, x') \in D, \quad (x > x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')).$$

ii) f *définie sur D est monotone strictement croissante sur D si :*

$$\forall (x, x') \in D, \quad (x > x' \Rightarrow f(x) > f(x')).$$

iii) f *définie sur D est monotone décroissante sur D si :*

$$\forall (x, x') \in D, \quad (x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')).$$

iv) f *définie sur D est monotone strictement décroissante sur D si :*

$$\forall (x, x') \in D, \quad (x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')).$$

Fonction majorée-minorée-bornée

Exemples :
exemple A.1.5
exemple A.1.6

notion clé :
Majorée, minorée, bornée

Définition 1.6

$$\begin{aligned}
f \text{ est majorée sur } D &\iff (\exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D,\ f(x) \leq A)\,. \\
f \text{ est minorée sur } D &\iff (\exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D,\ f(x) \geq A)\,. \\
f \text{ est bornée sur } D &\iff \left(\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in D,\ A \leq f(x) \leq B\right)\,. \\
&\iff (\exists C \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D,\ |f(x)| \leq C)\,.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1

f est dite positive sur D si : $\forall x \in D,\ f(x) \geq 0.$

f est dite négative sur D si : $\forall x \in D,\ f(x) \leq 0.$

Fonction paire, fonction impaire

Exemples :
exemple A.1.7

Exercices :
exercice B.1.2

notion clé :
Parité

Définition 1.7

Soit f définie sur D tel que O soit centre de symétrie pour D. Alors

$$\begin{array}{ccc} f \text{ paire} & \Longleftrightarrow & (\forall x \in D,\ f(-x) = f(x))\,. \\ f \text{ impaire} & \Longleftrightarrow & (\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x))\,. \end{array}$$

Remarque 1.2

Le graphe d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Le graphe d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Fonction périodique

Exemples :
exemple A.1.8

Exercices :
exercice B.1.3

notion clé :
Périodicité

Définition 1.8

f est dite périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

On appelle période le plus petit $T > 0$.

Opérations sur les fonctions

Exercices :
exercice B.1.4

notion clé :
Composition

Propriétés 1.1

Soient f et g deux fonctions définies sur D, soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h = f + g &\iff (\forall x \in D,\ h(x) = f(x) + g(x))\,. \\ k = f \times g &\iff (\forall x \in D,\ k(x) = f(x)g(x))\,. \\ m = \lambda f &\iff (\forall x \in D,\ m(x) = \lambda f(x))\,. \end{aligned}$$

Remarque 1.3

L'ensemble des fonctions définies sur D forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Propriétés 1.2

Si f est définie sur D et si g est définie sur D' tel que $f(D) \subset D'$ alors

$$s = g \circ f \iff (\forall x \in D,\ s(x) = g(f(x)))\,.$$

1.3 Limite

Position du problème

Exemples :
exemple A.1.9

notion clé :
Limite

x_0 est un réel ou $\pm\infty$.

On cherchera la limite ℓ d'une fonction au point x_0 quand on voudra étudier le comportement de la fonction au $V(x_0)$ ($x \neq x_0$).

C'est une étude locale.

C'est un problème que l'on posera souvent quand f est définie dans un $V(x_0)$ sauf peut-être en x_0.

On n'aura pas toujours une limite : $x \longrightarrow \sin(x)$ n'a pas de limite en $x_0 = +\infty$.

Si il y a une limite ℓ alors ℓ sera soit un nombre réel, soit $\pm\infty$.

On dira que la *limite est finie* si ℓ est un réel.

On dira que la *limite est infinie* si ℓ est égale à $+\infty$ ou $-\infty$.

On notera $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Limite de f en un point

notion clé :
Limite en un point

Définition 1.9 (Limite de f quand $x \to x_0 \in \mathbb{R}$)

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in V(x_0) - \{x_0\}, \quad (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\Big).$$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in V(x_0) - \{x_0\}, \quad (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - a| > A)\Big).$$

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in V(x_0) - \{x_0\}, \quad (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - a| < -A)\Big).$$

Limite de f en l'infini

notion clé :
Limite en l'infini

Définition 1.10 (Limite de f quand $x \to \pm\infty$)

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in V(+\infty), \quad (x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\Big).$$

ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in V(+\infty), \quad (x > B \Rightarrow f(x) > A)\Big).$$

iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in V(+\infty), \quad (x > B \Rightarrow f(x) < -A)\Big).$$

iv) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in V(-\infty), \quad (x < -A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\Big).$$

v) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in V(-\infty), \quad (x < -B \Rightarrow f(x) > A)\Big).$$

vi) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in V(-\infty), \quad (x < -B \Rightarrow f(x) < -A)\Big).$$

Limite à droite, limite à gauche

Exemples :
exemple A.1.10
exemple A.1.11
exemple A.1.12

notion clé :
Limite à droite, à gauche

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$x \longrightarrow x_0^+ \Longleftrightarrow (x \longrightarrow x_0 \text{ et } x > x_0)\,.$$
$$x \longrightarrow x_0^- \Longleftrightarrow (x \longrightarrow x_0 \text{ et } x < x_0)\,.$$

Définition 1.11

f a une limite finie à droite en x_0 ssi $\exists a' \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a'$.

f a une limite finie à gauche en x_0 ssi $\exists a'' \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a''$.

f a une limite infinie à droite en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

f a une limite infinie à gauche en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Théorème 1.1

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Longleftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \right)$$

Opérations sur les limites

notion clé :
Opérations sue les limites

f, g et h sont des fonctions définies au $V(a)$ sauf peut-être au point a.

Propriétés 1.3

i) Addition.

$$\begin{array}{lcl}
\left(\lim_a f \in \mathbb{R} \textit{ et } \lim_a g \in \mathbb{R}\right) & \Longrightarrow & \lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g. \\
\left(\lim_a f = \pm\infty \textit{ et } \lim_a g \in \mathbb{R}\right) & \Longrightarrow & \lim_a (f+g) = \lim_a f. \\
\left(\lim_a f = +\infty \textit{ et } \lim_a g = +\infty\right) & \Longrightarrow & \lim_a (f+g) = +\infty. \\
\left(\lim_a f = -\infty \textit{ et } \lim_a g = -\infty\right) & \Longrightarrow & \lim_a (f+g) = -\infty. \\
\left(\lim_a f = +\infty \textit{ et } \lim_a g = -\infty\right) & \Longrightarrow & \lim_a (f+g) = ???.
\end{array}$$

Formes indéterminées : $\lim_a f = +\infty$ *et* $\lim_a g = -\infty$.

ii) Multiplication.

$$\begin{array}{lll}
\left(\lim\limits_a f \in \mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_a g \in \mathbb{R}\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f\,g) = \lim\limits_a f \times \lim\limits_a g. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \text{ et } \lim\limits_a g \in \mathbb{R}_+^*\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = \lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = +\infty \text{ et } \lim\limits_a g \in \mathbb{R}_-^*\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = -\lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = +\infty \text{ et } \lim\limits_a g = +\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = +\infty. \\
\left(\lim\limits_a f = -\infty \text{ et } \lim\limits_a g = -\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = +\infty. \\
\left(\lim\limits_a f = +\infty \text{ et } \lim\limits_a g = -\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = -\infty. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \text{ et } \lim\limits_a g = 0\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = ???.
\end{array}$$

Formes indéterminées : $\lim\limits_a f = \pm\infty$ *et* $\lim\limits_a g = 0$.

iii) Multiplication par un scalaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$*,*

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_a f \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & \lim\limits_a \lambda f = \lambda \lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \text{ et } \lambda > 0\right) & \Longrightarrow & (\lim\limits_a \lambda f) = \lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \text{ et } \lambda < 0\right) & \Longrightarrow & (\lim\limits_a \lambda f) = -\lim\limits_a f.
\end{array}$$

iv) Inverse.

On suppose que $0 \notin f\,(V(0))$.

$$\lim_a f = b \in \mathbb{R}^* \quad \Longrightarrow \quad \lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{b}.$$
$$\lim_a f = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_a \frac{1}{f} = 0.$$
$$\left(\lim_a f = 0 \; et \; \forall x \in V(a),\; f(x) > 0\right) \quad \Longrightarrow \quad (\lim_a \frac{1}{f}) = +\infty.$$
$$\left(\lim_a f = 0 \; et \; \forall x \in V(a),\; f(x) < 0\right) \quad \Longrightarrow \quad (\lim_a \frac{1}{f}) = -\infty.$$

Propriétés 1.4 (Comparaison)

i) Si $\forall x \in V(x_0) - \{x_0\},\ f(x) \leq g(x)$ *alors :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty.$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

ii) Si $\forall x \in V(x_0) - \{x_0\},\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *alors :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = b \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = b.$$

1.4 Continuité

Continuité en un point

notion clé :
Continuité en un point

Exemples :
exemple A.1.13
exemple A.1.14

Définition 1.12 (Continuité)

f est continue en $a \in \mathbb{R}$ si f a une limite finie en a égale à $f(a)$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 1.13 (Continuité à droite)

f est continue à droite en $a \in \mathbb{R}$ si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Définition 1.14 (Continuité à gauche)

f est continue à gauche en $a \in \mathbb{R}$ si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Continuité sur un intervalle

Exemples :
exemple A.1.15

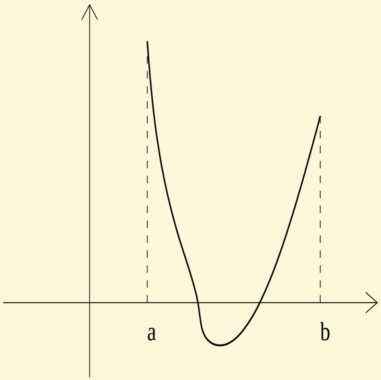
notion clé :
Continuité sur un intervalle

Définition 1.15

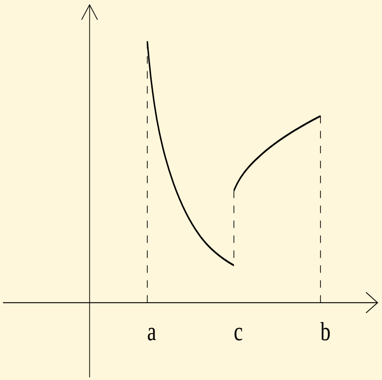
f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout point de I.

Remarque 1.4 *f continue sur $[a, b]$ signifie que f est continue en tout point de $]a, b[$ et que f est continue à droite au point a et à gauche au point b.*

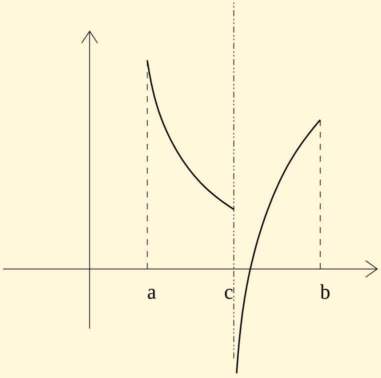
Soit f continue sur $[a, b]$. Posons $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ alors on "trace la courbe représentant f sur $[a, b]$ en allant de A à B sans lever le crayon".



f est continue sur $[a, b]$.



f n'est pas continue au point c
: f est continue par morceau sur $[a, b]$.



f n'est pas continue sur $[a, b]$.

Opérations sur les fonctions continues

notion clé :
Opérations sur les fonctions continues

Propriétés 1.5

i) Si f et g sont continues au point a, il en est de même de :

$$f+g, \quad \lambda f, \quad f \times g, \quad \frac{f}{g} \text{ si } g(a) \neq 0.$$

ii) Si f est continue au point a et si g est continue au point $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est continue au point a.

Maximum-Minimum

notion clé :
Maximum-Minimum

Exemples :
exemple A.1.16
exemple A.1.17

Théorème 1.2

Toute fonction continue sur $[a,b]$ *admet un maximum* M *et un minimum* m*, c'est-à-dire il existe* $c_1 \in [a,b]$ *et* $c_2 \in [a,b]$ *tel que* $M = f(c_1)$ *et* $m = f(c_2)$.

De plus, $f([a,b]) = [m,M]$.

Remarque 1.5 *On remarquera que l'intervalle est fermé et borné.* c_1 *et* c_2 *ne sont pas nécessairement uniques.*

1.5 Fonction différentiable ou dérivable

Définition du nombre dérivée

Exemples :
exemple A.1.18

notion clé :
Dérivée

Définition 1.16

Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0.
On pose $\tau_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
τ_{x_0} est la fonction taux d'accroissement de f au point x_0.

Si τ_{x_0} a une limite finie c quand $h \to 0$, on dit que f est dérivable au point x_0 et c s'appelle le nombre dérivée au point x_0 et on note $c = f'(x_0)$.

$$\begin{array}{lll}
f \text{ est dérivable au point } x_0 & \Longleftrightarrow & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} c = f'(x_0). \\
f \text{ est dérivable à droite au point } x_0 & \Longleftrightarrow & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} c = f'_d(x_0). \\
f \text{ est dérivable à gauche au point } x_0 & \Longleftrightarrow & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0^-}{\longrightarrow} c = f'_g(x_0) \\
f \text{ est dérivable au point } x_0 & \Longleftrightarrow & f'_g(x_0) = f'_d(x_0)
\end{array}$$

Approximation au voisinage d'un point d'une fonction dérivable en ce point, par une fonction affine

notion clé :
Tangente à une courbe

Exemples :
exemple A.1.19

La définition de la dérivée au point x_0 est équivalente :

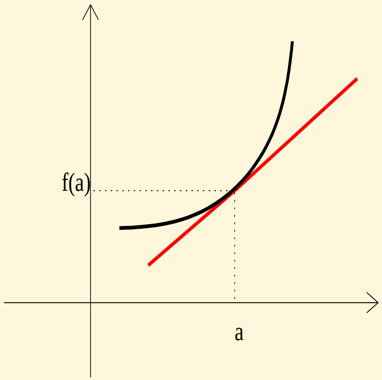
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

En posant $x = x_0 + h$, on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \text{ où } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0.$$

La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ est une approximation locale en x_0 de f. Donc f est approchée par cette fonction affine au voisinage de x_0.

Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.



Tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Différentielle en un point

Exemples :
exemple A.1.20

notion clé :
Différentielle

Quand on fait subir une variation à x autour de x_0 c'est-à-dire x_0 subit une variation de h alors $f(x_0)$ subit une variation de $f(x_0+h)-f(x_0)$.

On prend comme approximation de cette variation $f'(x_0)h$ pour tout h petit (c'est ce que l'on fait souvent en physique).

On a négligé le terme en ε (voir 1.5.2).

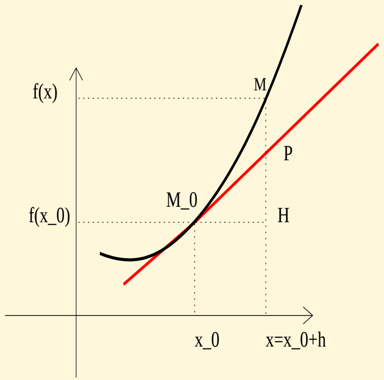
On note $dx(h)=h$, par suite $df_{x_0}=f'(x_0)dx$: c'est la différentielle de f en x_0.

On fait ceci pour tout $x_0 \in I$ où f est dérivable et on écrit

$$df=f'(x)dx.$$

Interprétation graphique

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h)-f(x_0) &= \overline{HM} \\
df_{x_0}(h) &= \overline{HP} \\
\overline{HM}-\overline{HP}=\overline{PM} &= h\varepsilon(h)
\end{aligned}
$$



Opérations sur les dérivées

notion clé : *Opérations sur les dérivées*

Propriétés 1.6

Soient f et g deux fonctions dérivables au point x_0 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
i) $f+g$ *est dérivable au point* x_0 : $(f+g)' = f' + g'$.
ii) λf *est dérivable au point* x_0 : $(\lambda f)' = \lambda f'$.
iii) $f \times g$ *est dérivable au point* x_0 : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
iv) $\dfrac{f}{g}$ *est dérivable au point* x_0 *si* $g(x_0) \neq 0$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Propriétés 1.7

Si f est dérivable au point x_0 et si g est dérivable au point $f(x_0)$. Alors, on a : $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

Fonction dérivable sur un intervalle, Fonction de classe *n* sur un intervalle

notion clé :
Classe $\mathcal{C}^n$

Exemples :
exemple A.1.21

Définition 1.17

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f admet n dérivées successives sur I et de plus $f^{(n)}$ est continue sur I.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I.

Remarque 1.6 *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Tableau des dérivées

notion clé :
Tableau des dérivées

Exercices :
exercice B.1.5
exercice B.1.6
exercice B.1.7
exercice B.1.8
exercice B.1.9
exercice B.1.10

On dérive par rapport à la variable x réelle.

u et v désignent des fonctions de x dérivables sur un intervalle.

u' et v' désignent les fonctions dérivées respectives : $u' = \dfrac{du}{dx}$ et $v' = \dfrac{dv}{dx}$.

a désigne une constante réelle.

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad (a\,u)' = a\,u'$ $\quad (uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad (u \circ v)' = u'(v)\,v'$ $\quad u = cte \Rightarrow u' = 0$

$(x^\alpha)' = \alpha\,x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ $\quad (\sin(x))' = \cos(x)$ $\quad (\cos(x))' = -\sin(x)$

$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ $\quad (\mathrm{ch}\,(x))' = \mathrm{sh}\,(x)$ $\quad (\mathrm{sh}\,(x))' = \mathrm{ch}\,(x)$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\quad (\mathrm{Arcsin}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (\mathrm{Arccos}\,(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

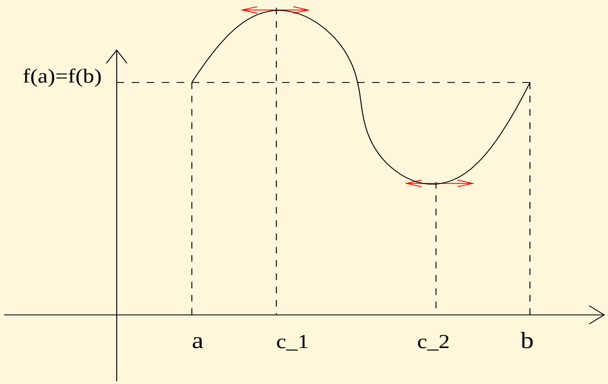
$(\mathrm{Arctan}\,(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad (\mathrm{Argth}\,(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ $\quad (\mathrm{Argsh}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\mathrm{Argch}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad (\mathrm{th}\,(x))' = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$

1.6 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Théorème 1.3 (Rolle)

$$\left.\begin{array}{c} f \textit{ continue sur } [a,b] \\ f \textit{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in]a,b[\mid f'(c)=0.$$

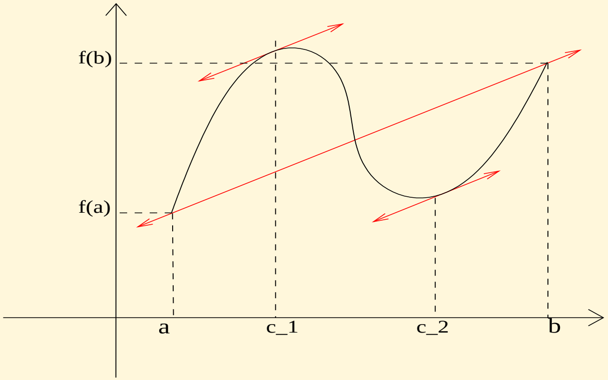


$f'(c_1)=f'(c_2)=0.$

Remarque 1.7 *Si f désigne un mouvement rectiligne, le théorème signifie que si f est continue et dérivable entre le temps a et le temps b ($b > a$) et si on se situe au même lieu au temps a et au temps b alors à un moment donné à un instant c ($a < c < b$) du parcours, la vitesse est nulle.*

Théorème 1.4 (Accroissements finies)

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ continue sur } [a,b] \\ f \textit{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in]a,b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$



Remarque 1.8 *Si f désigne un mouvement rectiligne, le théorème signifie que si f est continue et dérivable entre le temps a et le temps b ($b > a =$) alors il existe un instant c ($a < c < b$) du parcours où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne entre a et b.*

1.7 Etude d'une fonction

On détermine :
i) D domaine de définition de la fonction.

ii) D' domaine de continuité de la fonction.

iii) Les propriétés particulières de la fonction (paire, impaire, périodique).

iv) D'' domaine de définition de la dérivée.

On étudie les variations de f sur les intervalles I de continuité de f :
i) si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.

ii) si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.

Si la dérivée s'annule en un point x_0 intérieur à l'intervalle I en changeant de signe alors f admet un extremum local en ce point.

Quand $f'(x_0) = 0$, la tangente à la courbe au point $(x_0, f(x_0))$ est horizontale.
Quand $\tau_{x_0}(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$, la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est verticale.
On recherche ensuite les asymptotes à la courbe (voir 3.2).

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

Théorème

Exemples :
exemple A.2.1

notion clé :
Réciproque

Théorème 2.1

Toute fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle I admet une fonction g continue et strictement croissante sur $f(I)$.

Toute fonction f continue et strictement décroissante sur un intervalle I admet une fonction g continue et strictement décroissante sur $f(I)$.

On dit que g est la fonction réciproque de f.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonction Arcsinus

Exercices :
exercice B.2.1
exercice B.2.2

notion clé :
Arcsin

Définition 2.1

Soit f la restriction de la fonction $\sin$ *à l'intervalle* $I = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Soit $J = f(I) = [-1, 1]$.

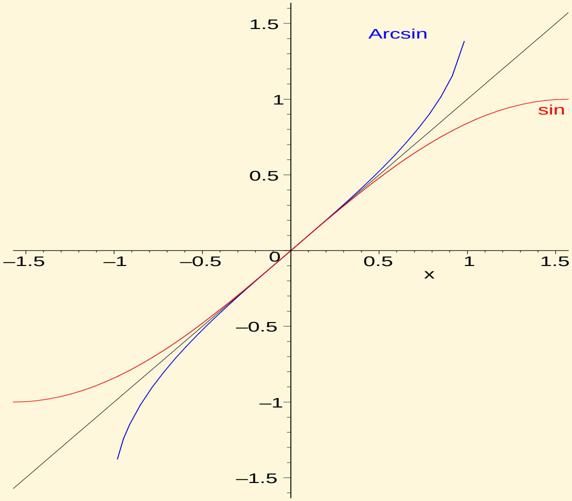
On a : f continue et strictement croissante sur un intervalle I.
Alors f admet une fonction g réciproque continue et strictement croissante sur J.

On appelle g Arcsinus et on note $g = \operatorname{Arcsin}$.

$$y = \operatorname{Arcsin}(x) \iff \left(x = \sin(y) \text{ et } y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$$

$\forall x \in]-1, 1[, \quad (\operatorname{Arcsin}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Arcsin *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1, 1[$ *et de classe* $\mathcal{C}^0$ *sur* $[-1, 1]$.
Arcsin *est impaire.*



$$\mathrm{Arcsin}\,(0) = 0,\ \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\ \mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\ \mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},\ \mathrm{Arcsin}\,(1) = \frac{\pi}{2}.$$

◀◀◀

Fonction Arccos

Exercices :
exercice B.2.3

notion clé :
Arccos

Définition 2.2

Soit f la restriction de la fonction $\cos$ à l'intervalle $I = [0, \pi]$.
Soit $J = f(I) = [-1, 1]$.

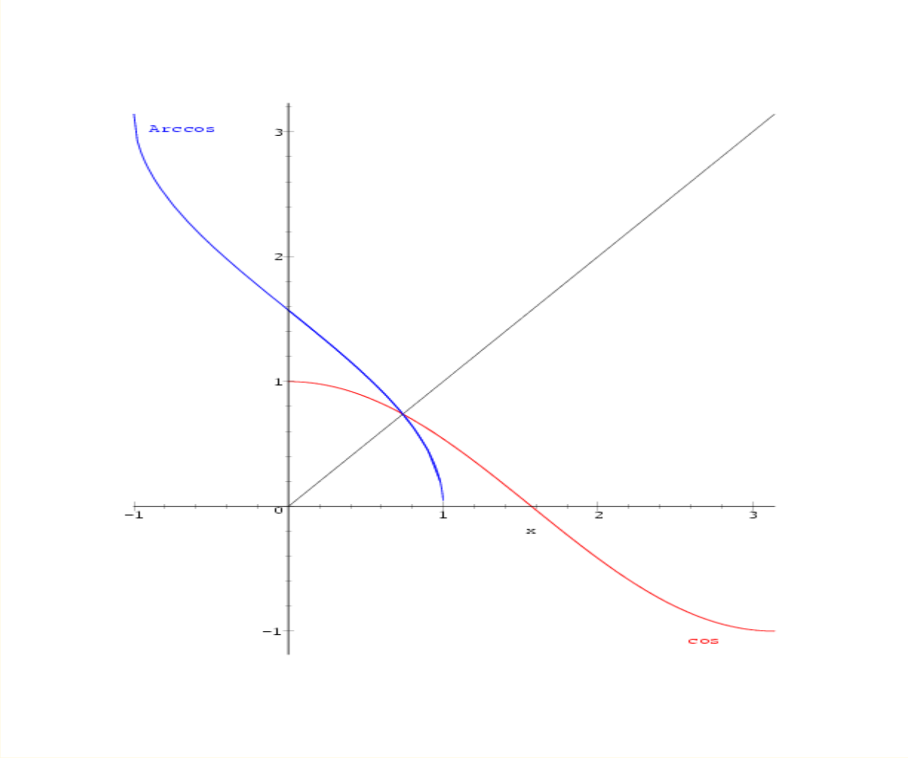
On a : f continue et strictement décroissante sur un intervalle I.
Alors f admet une fonction g réciproque continue et strictement décroissante sur J.

On appelle g Arccosinus et on note $g = \operatorname{Arccos}$.

$$y = \operatorname{Arccos}(x) \Longleftrightarrow (x = \cos(y) \text{ et } y \in [0, \pi])$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (\operatorname{Arccos}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Arccos *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[-1, 1]$.*



$\mathrm{Arccos}\,(1) = 0,\ \mathrm{Arccos}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},\ \mathrm{Arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\ \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ \mathrm{Arccos}\,(0) = \frac{\pi}{2}.$

Fonction Arctan

notion clé :
Arctan

Exercices :
exercice B.2.4
exercice B.2.5

Définition 2.3

Soit f la restriction de la fonction $\tan$ à l'intervalle $I =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Soit $J = f(I) = \mathbb{R}$.

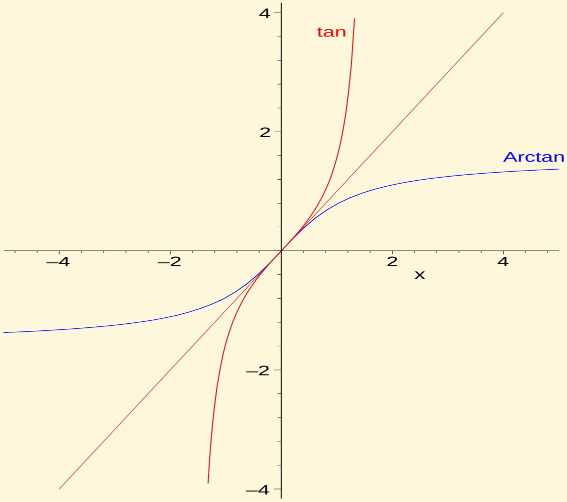
On a : f continue et strictement croissante sur un intervalle I.
Alors f admet une fonction g réciproque continue et strictement croissante sur J.

On appelle g Arctangente et on note $g = \operatorname{Arctan}$.

$$y = \operatorname{Arctan}(x) \Longleftrightarrow \left(x = \tan(y) \text{ et } y \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{Arctan}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

Arctan *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
Arctan *est impaire.*



$$\mathrm{Arctan}\,(0) = 0,\ \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},\ \mathrm{Arctan}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},\ \mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.2 Fonction logarithme, exponentielle et puissance

Fonction logarithme

notion clé :
Ln

Exercices :
exercice B.2.6
exercice B.2.7
exercice B.2.8

Définition 2.4

La fonction $x \ :\longrightarrow \frac{1}{x}$ *continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ *admet une primitive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(voir cours sur les primitives).*

La primitive qui s'annule pour $x = 1$ *s'appelle la fonction logarithme.*

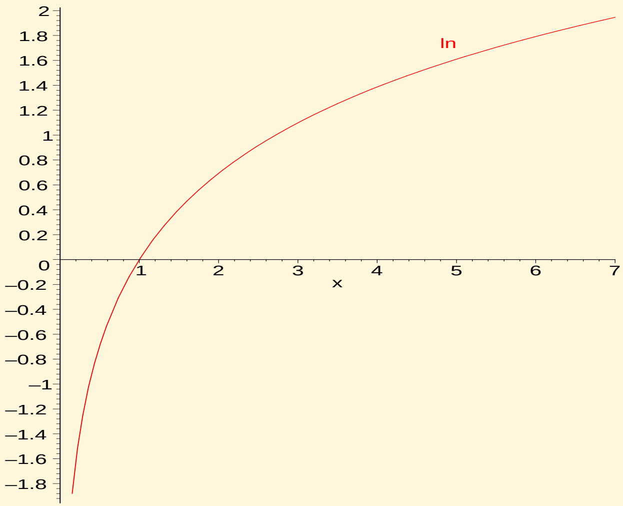
on la note : $x \longrightarrow \ln x$*.*

Propriétés 2.1

i) $f \ : \ x \longrightarrow \ln x$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
ii) si $a > 0$ *et* $b > 0$ *alors :* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$*.*
En conséquence $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.
iii) $\ln$ *est une fonction strictement croissante non majorée.*

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

iv) $\ln 1 = 0$ *et il existe un seul réel* $c > 0$ *tel que* $\ln c = 1$.
Ce réel c s'appelle e : $e \simeq 2.718$ *par défaut à* 10^{-3} *près.*



Fonction exponentielle

notion clé :
Exp

Exercices :
exercice B.2.9
exercice B.2.10
exercice B.2.11

Définition 2.5

$y \longrightarrow x = \ln y$ *est continue et strictement croissante sur* $I = \mathbb{R}_+^*$, *elle admet donc une fonction réciproque que l'on appelle exponentielle définie sur* $J = \mathbb{R}$.

$$\exp\ :\ x \longrightarrow \exp x = \mathrm{e}^{x}.$$

Propriétés 2.2

$f\ :\ x \longrightarrow \mathrm{e}^{x}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \mathrm{e}^{x}$.
f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et non majorée.*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x} > 0, \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b}.$$

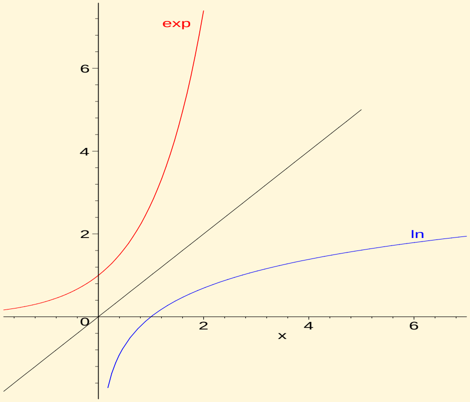
►►►

i) $\mathrm{e}^{0} = 1$.

ii) $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^{x}) = x$.

iv) $\forall x > 0,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.



Remarque 2.1 $f(x) = u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{\,v(x)\ln(u(x))}$.

Chaque fois que l'on étudiera une fonction qui aura la variable dans l'exposant, on la mettra sous la forme d'une exponentielle.

Fonction puissance

notion clé :
Puissance

Propriétés 2.3

Soit $a \in \mathbb{R}$*, la fonction* $x \ :\longrightarrow x^a$ *est définie pour* $x > 0$ *par*

$$x^a = \mathrm{e}^{\,a \ln x}$$

C'est la fonction puissance.

Les règles d'opérations sur les fonctions puissances marchent.
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x > 0,$

i) $x^a = \mathrm{e}^{\,a \ln x}$.

ii) $x^{a+b} = x^a x^b$.

ii) $x^{ab} = (x^a)^b = \left(x^b\right)^a$.

iv) $x^a y^a = (xy)^a$.

ATTENTION : Ces règles ne marchent quelque soit a réel que si $x > 0$.

Comparaisons fonctions logarithme, puissance et exponentielle

Exemples :
exemple A.2.2
exemple A.2.3

Documents :
document C.1.1

notion clé :
Comparaison fonction

Propriétés 2.4

i) au $V(+\infty)$

a) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \quad \forall\alpha > 0,\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,x} = +\infty.$

b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0, \quad \forall\alpha > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^\alpha} = +\infty.$

$$\forall(\alpha > 0,\ \beta > 0), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\beta x}}{x^\alpha} = +\infty.$$

Conséquence :

$\forall\alpha > 0,\ \exists V(+\infty),\ \forall x \in V(+\infty), \quad 1 < \ln x < x^\alpha < \mathrm{e}^{\,x}.$

$\forall\,(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0)\,,\ \exists V(+\infty),\ \forall x \in V(+\infty), \quad 1 < (\ln x)^\alpha < x^\beta < \mathrm{e}^{\,\gamma x}.$

$\forall\,(\alpha > 0,\ \beta > 0)\,,\ \exists V(+\infty),\ \forall x \in V(+\infty), \quad \mathrm{e}^{\,-\beta x} < \dfrac{1}{x^\alpha}.$

ii) au $V(0^+)$

a) $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty, \quad \forall\alpha > 0,\ \lim_{x\to0^+} x^\alpha = 0.$

b) $\lim_{x\to0^+} x \ln x = 0^-, \quad \forall\alpha > 0,\ \lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0^-$

$$\forall\,(\alpha > 0,\ \beta > 0)\,, \quad x^{\alpha}|\ln x|^{\beta} = 0^{+}.$$

Conséquence :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists V(0^{+}),\ \ \forall x \in V(0^{+}), \quad 1 < |\ln x| < \frac{1}{x^{\alpha}}.$$

Pour démontrer, on utilise les résultats au $V(+\infty)$ en posant $t = \frac{1}{x}$.

Ces résultats seront utilisés dans le calcul de limite et dans les intégrales généralisées.

2.3 Fonctions hyperboliques

Fonction sinus hyperbolique

Définition 2.6 *On pose*

$$\mathrm{sh} \ : \ x \longrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x.$$

notion clé :
Sh

Propriétés 2.5

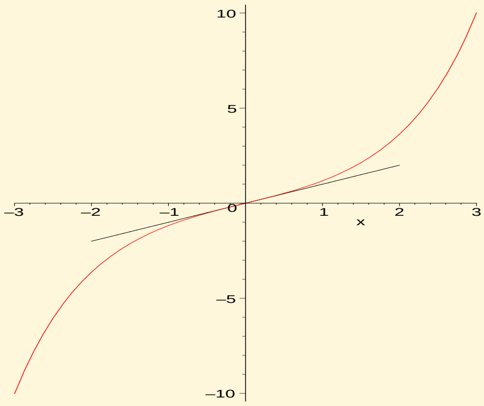
i) sh *est une fonction impaire :* $\mathrm{sh}\,(-x) = -\mathrm{sh}\,(x)$.

ii) sh *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}}{2}.$$

$\mathrm{sh}'(x) > 0$ *pour tout x réel.*

iii) sh *est une fonction croissante sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule si et seulement si* $x = 0$.


10
5
0
–5
–10
–3
–2
–1
1
2
3
x

◀◀◀

Fonction cosinus hyperbolique

Documents :
document C.1.2

notion clé :
Ch

Définition 2.7 *On pose*

$$\operatorname{ch} \; : \; x \longrightarrow \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x = \operatorname{sh}'(x).$$

Propriétés 2.6

i) ch *est une fonction paire :* $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$.

ii) ch *est de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *sur* $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

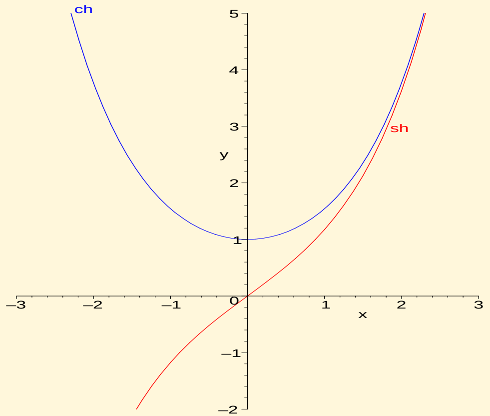
$\operatorname{ch}'(x) \geq 0$ *pour tout x réel positif ou nul.*

$$\operatorname{ch}' x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

ch *est une fonction strictement croissante sur* $\mathbb{R}_{+}$ *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_{-}$.

iii) •*)* $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x > \operatorname{sh} x$ *car* $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} > 0$.

••*)* $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.



Fonction tangente hyperbolique

notion clé :
Th

Définition 2.8 *On pose*

$$\mathrm{th} \;:\; x \longrightarrow \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}.$$

On a aussi : $\mathrm{th}\, x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Propriétés 2.7

i) th *est une fonction impaire :* $\mathrm{th}\,(-x) = -\mathrm{th}\,(x)$.

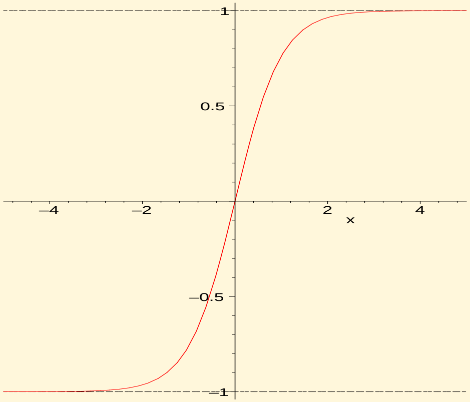
ii) th *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x.$$

$\mathrm{th}'(x) > 0$ *pour tout x réel.*

iii) th *est une fonction strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et s'annule si et seulement si* $x = 0$.

iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}\, x = 1, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}\, x = -1.$


1
0.5
−4
−2
2
4
x
−0.5
−1

Formules hyperboliques

Exercices :
exercice B.2.12
exercice B.2.13

notion clé :
Formules hyperboliques

Propriétés 2.8

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{ch}^2 a - \mathrm{sh}^2 a = 1.$$

$$\mathrm{ch}(a \pm b) = \mathrm{ch}\, a \,\mathrm{ch}\, b \pm \mathrm{sh}\, a \,\mathrm{sh}\, b.$$

$$\mathrm{sh}(a \pm b) = \mathrm{sh}\, a \,\mathrm{ch}\, b \pm \mathrm{ch}\, a \,\mathrm{sh}\, b.$$

$$\mathrm{th}(a \pm b) = \frac{\mathrm{th}\, a \pm \mathrm{th}\, b}{1 \pm \mathrm{th}\, a \,\mathrm{th}\, b}.$$

$$\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a = 2\mathrm{ch}^2 a - 1 = 2\mathrm{sh}^2 a + 1.$$

$$\mathrm{sh}(2a) = 2\mathrm{sh}\, a \,\mathrm{ch}\, a.$$

$$\mathrm{th}(2a) = \frac{2\mathrm{th}\, a}{1 + \mathrm{th}^2 a}.$$

2.4 Fonctions réciproques de fonctions hyperboliques

Fonction argument sinus hyperbolique

Documents :
document C.1.3

notion clé :
Argsh

Définition 2.9

Sachant que sh *est une fonction de* $I = \mathbb{R}$ *dans* $J = \operatorname{sh}(I) = \mathbb{R}$ *qui est continue et strictement croissante, elle admet une fonction réciproque g que l'on appelle argument sinus hyperbolique.*

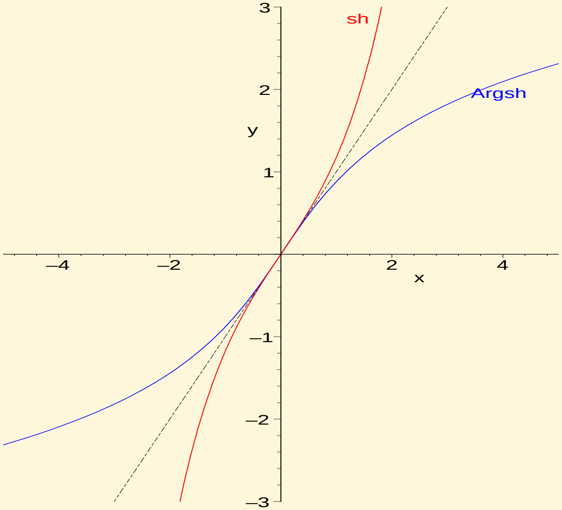
g se note Argsh.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y = \operatorname{Argsh} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{sh} y.$$

Propriétés 2.9

i) Argsh *est impaire.*

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$



iii) $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$

◀◀◀

Fonction argument cosinus hyperbolique

Documents :
document C.1.4

notion clé :
Argch

Définition 2.10

Soit f la restriction à $I = \mathbb{R}_+$ de ch.

On a : $J = \operatorname{ch}(I) = [1, +\infty[$.

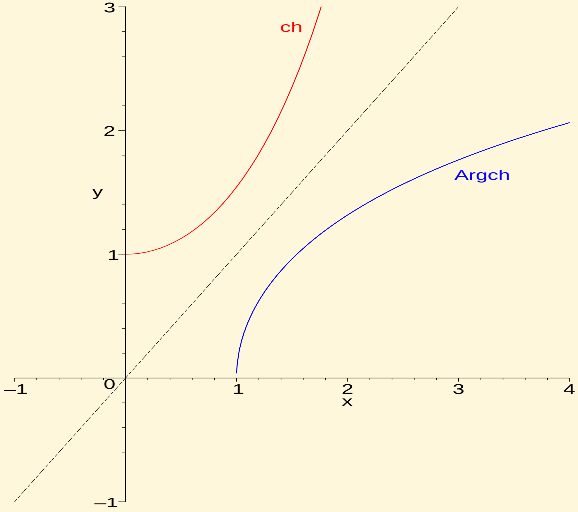
f est continue et strictement croissante, elle admet une fonction réciproque g que l'on appelle argument cosinus hyperbolique.

g se note Argch.

$$\forall x \geq 1,\ y = \operatorname{Argch} x \quad \Longleftrightarrow \quad (x = \operatorname{ch} y \textit{ et } y \geq 0)\,.$$

Propriétés 2.10

i) $\forall x \in]1, +\infty[,\ \operatorname{Argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.



ii) $\forall x \geq 1,\ \operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$

Fonction argument tangente hyperbolique

Documents :
document C.1.5

notion clé :
Argth

Définition 2.11

th *est une fonction de* $I = \mathbb{R}$ *dans* $J = \text{th}\,(I) =]-1,1[$.

th *est continue et strictement croissante sur* I*, elle admet une fonction réciproque* g *que l'on appelle argument tangente hyperbolique.*

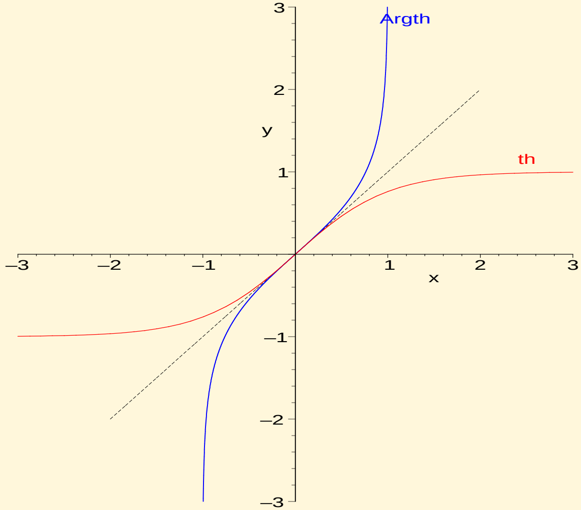
g *se note* Argth.

$$\forall x \in]-1,1[,\ y = \text{Argth}\, x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \text{th}\, y.$$

Propriétés 2.11

i) $\forall x \in]-1,1[,\ \text{Argth}\,' x = \dfrac{1}{1-\text{th}^{\,2} y} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

ii) Argth *est impaire.*



ii) $\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right).$

Remarque 2.2 *On doit connaître les expressions sous formes logarithme des fonctions*

Argsh, Argch *et* Argth *car elles apparaissent dans le calcul de primitives.*

3 Calcul de limite

3.1 Formules de Taylor

Formule de Taylor Lagrange

Exemples :
exemple A.3.1
exemple A.3.2
exemple A.3.3

notion clé :
Taylor

Définition 3.1 (Taylor-Lagrange)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$. Alors :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Et même : pour tout $x \in]a,b]$, il existe $c_n(x) \in]a,x[$ tel que :

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_n(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ ou $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_n(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ s'appellent reste de Lagrange.

▶▶▶

Définition 3.2 (Mac-Laurin Lagrange)

C'est la formule de Taylor-Lagrange pour $a = 0$.

Pour tout $x \in]0, b]$, *il existe* $c_n(x) \in]0, x[$ *tel que :*

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Remarque 3.1 *Ces formules seront utilisées*

i) pour encadrer une fonction par des fonctions polynômes.

ii) pour le développement d'une fonction en série entière (voir dans un autre regroupement).

Formule de Taylor-Young

Exemples :
exemple A.3.4
exemple A.3.5

notion clé :
Taylor-Young

Définition 3.3 (Formule de Taylor-Young)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction ε_n avec $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \varepsilon_n(x-a) = 0$ tel que

$$f(x) = f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_n(x-a).$$

Définition 3.4 (Formule de Mac-Laurin Young)

C'est la formule de Taylor-Young pour $a = 0$.

$\forall n,\ \exists \varepsilon_n$ *avec* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \varepsilon_n(x) = 0$ *tel que*

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon_n(x).$$

Remarque 3.2 *Ce développement est essentiellement local ; il interviendra dans le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point.*

3.2 Développements limité

Définition

Exemples :
exemple A.3.6

notion clé :
Développement limité

Définition 3.5

C'est l'approche quand c'est possible d'une fonction par une fonction polynôme au voisinage d'un point x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$).

i) $x_0 = 0$.

Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 sauf peut-être en 0 ; on dit que f admet un développement limité (d.l.) à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au $V(0)$ s'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

La partie polynomiale d'un développement limité s'appelle la partie régulière.

ii) $x_0 \in \mathbb{R}$.

On pose $t = x - x_0$ alors $f(x) = f(t + x_0) = g(t)$ et $t \in V(0)$.

f aura un d.l. à l'ordre n au $V(x_0)$ si et seulement si g admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre n

$$\begin{aligned} g(t) &= P_n(t) + t^n \varepsilon(t) \\ f(x) &= P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \end{aligned}$$

iii) $x_0 = \pm\infty$.

On pose $t = \frac{1}{x}$ *alors* $f(x) = f(\frac{1}{t}) = g(t)$ *et* $t \in V(0)$.

f *aura un d.l. à l'ordre* n *au* $V(+\infty)$ *(resp.* $V(-\infty)$*) si et seulement si* g *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre* n

$$\begin{aligned} g(t) &= P_n(t) + t^n \varepsilon(t) \\ f(x) &= P_n(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{1}{x^n}\varepsilon(\tfrac{1}{x}) \end{aligned}$$

Par la suite, on étudiera les propriétés et les règles pour $x_0 = 0$.

Remarque 3.3 *Si* f *est définie au* $V(x_0^+)$ *(resp.* $V(x_0^-)$*), on dit que* f *admet un d.l. à l'ordre* n *au* $V(x_0^+)$ *(resp.* $V(x_0^-)$*).*

Propriétés

Exemples :
exemple A.3.7
exemple A.3.8

notion clé :
Propriétés sur les d.l.

Propriétés 3.1

i) Unicité.

Si $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x) = B_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *avec deg* $A_n \leq n$ *et deg* $b_n \leq n$ *alors* $A_n = B_n$

ii) Troncature.

$$\text{Si } f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \longrightarrow 0 \text{ alors}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^{+} x^p \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0, \text{ pour tout } p,\ 0 \leq p \leq n$$

iii) Parité.

Si f *est paire, alors le polynôme* A_n *est pair.*
Si f *est impaire, alors le polynôme* A_n *est impair.*

iv) Limite.

Si f admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre n avec $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors f admet une limite en 0 qui est a_0.
f est donc prolongeable par continuité en 0.
f admet une limite finie en 0 est donc une condition nécessaire pour que f admette un d.l. en 0.

v) Dérivabilité.

Si f admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n \geq 1$ avec $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et si g est le prolongement par continuité de f en 0 alors g est dérivable en 0 et $g'(0) = a_1$.

vi) Primitive.

Si f admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre n avec $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et si f admet une primitive F au $V(0)$ alors F admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n+1$ avec
$$A_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + F(0).$$

Développements limités au V(0) de fonctions usuelles

notion clé :
Tableau de d.l.

Toutes les fonctions qui vérifient la formule de Mac-Laurin Young ont pour tout n un d.l. au $V(0)$ à l'ordre n qui est donné par cette formule.

Ce sera le cas pour les fonctions qui figurent dans ce tableau.

$$
\begin{array}{lcllll}
e^{x} & = & 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+ & \cdots & +\dfrac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x) \\
\operatorname{ch} x & = & 1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+ & \cdots & +\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\operatorname{sh} x & = & x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+ & \cdots & +\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\cos x & = & 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+ & \cdots & +(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\sin x & = & x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+ & \cdots & +(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\dfrac{1}{1+x} & = & 1-x+x^2- & \cdots & +(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x) \\
\dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+ & \cdots & +x^n+x^n\varepsilon(x) \\
\ln(1+x) & = & x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}- & \cdots & +(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) \\
\ln(1-x) & = & -x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}- & \cdots & -\dfrac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) \\
\operatorname{Arctan} x & = & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}- & \cdots & +(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\operatorname{Argth} x & = & x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+ & \cdots & +\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
(1+x)^{\alpha} & = & 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+ & \cdots & +\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon
\end{array}
$$

Remarque 3.4 *Les développements de* Arcsin *et* Argsh *s'obtiennent à partir des développements de* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et* $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Règles de Calcul

notion clé :
Règles de Calcul des d.l.

Exemples :
exemple A.3.9
exemple A.3.10
exemple A.3.11
exemple A.3.12
exemple A.3.13

Exercices :
exercice B.3.1

Documents :
document C.2.1

Propriétés 3.2

i) Somme.
Si $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et si* $g(x) = B_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *alors* $h = (f+g)$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre* n

$$h(x) = (A_n(x) + B_n(x)) + x^n\varepsilon(x).$$

ii) Multiplication par un scalaire.
Si $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $h = \lambda f$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre* n

$$h(x) = \lambda A_n(x) + x^n\varepsilon(x).$$

iii) Produit.
Si $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et si* $g(x) = B_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *alors* $h = fg$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre* n

$$h(x) = C_n(x) + x^n\varepsilon(x).$$

►►►

$C_n(x)$ est le produit $A_n(x) \times B_n(x)$ en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

iv) Composition.
Soit $u(x) = A_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ au $V(0)$ tel que $u = u(x) \longrightarrow 0$.
Soit $f(u) = B_n(u) + u^n \varepsilon(u)$ alors : $g = f \circ u$ admet un d.l. à l'ordre n

$$g(x) = C_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où C_n est formé par les termes de degré au plus n de la fonction polynôme $B_n(A_n(x))$.

***Attention :** bien s'assurer que $u \in V(0)$ pour pouvoir utiliser les d.l. connus dans le tableau des d.l. au $V(0)$.*

v) Inverse et quotient.
Soient $f(x) = A_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ et $g(x) = B_n(x) + x^n \varepsilon(x)$
a) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq 0$ alors
$h = \dfrac{f}{g}$ admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre n :

$$h(x) = C_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

C_n est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A_n par B_n.

b) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

- *•)* $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ *alors h n'a pas de limite finie et par suite* $h = \frac{f}{g}$ *n'a pas de d.l.*
- *••)* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ *alors h aura un d.l. si et seulement si* $\lim_{x\to 0} h(x)$ *est finie.*

La démonstration sera donnée dans le document annexe, il y a aussi un exemple qui l'illustre.

Développements limités pour $x_0 \neq 0$.

Exemples :
exemple A.3.14
exemple A.3.15

Exercices :
exercice B.3.2
exercice B.3.3

notion clé :
D.l. près d'un point

Définition 3.6

i) $x_0 \in \mathbb{R}^*$

En général, on pose $t = x - x_0$ *et* $f(x) = f(t + x_0) = g(t)$.

f *admet un d.l. au* $V(x_0)$ *à l'ordre n si et seulement si* g *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre n.*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

Attention *La partie polynomiale est en puissance de* $(x - x_0)$*. On ne développe pas.*

ii) $x_0 = \pm\infty$

On pose $t = \frac{1}{x}$ *et* $f(x) = f(\frac{1}{t}) = g(t)$ *alors* $t \in V(0)$.

f admet un d.l. au $V(\pm\infty)$ à l'ordre n si et seulement si g admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre n.

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

***Attention** La partie polynomiale est en puissance de $\frac{1}{x}$, on ne doit pas réduire au même dénominateur.*

Développements limités généralisés ou asymptotiques

Exemples :
exemple A.3.16
exemple A.3.17

notion clé :
D.l. Généralisé ou asymptotique

Définition 3.7

Soit f une fonction définie au $V(0)$ et de limite infinie en 0.

On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n au $V(0)$ lorsque la fonction g définie par

$$g(x) = x^p f(x)$$

admet un d.l. limité à l'ordre $n+p$ au $V(0)$ c'est-à-dire on a :

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+p} x^{n+p} + x^{n+p} \varepsilon(x)$$

d'où

$$f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \cdots + a_p + \cdots + a_{n+p} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

On peut encore dire si f est de la forme $\dfrac{g(x)}{x^p}$ et g a un d.l. en 0 à l'ordre $n+p$ alors f a un d.l. généralisé à l'ordre n en 0.

Remarque 3.5 *On peut remarquer qu'un d.l. généralisé au* $V(0)$ *a comme partie régulière une fonction polynôme en x et un nombre fini de termes (au maximum p) en puissances négatives de x.*

On peut remarquer qu'un d.l. généralisé au $V(\pm\infty)$ *a comme partie régulière une fonction polynôme en* $\frac{1}{x}$ *et un nombre fini de termes (au maximum p) en puissances négatives de* $\frac{1}{x}$ *donc un nombre fini de termes (au maximum p) en puissances positives de x. Au* $V(\pm\infty)$*, on dit aussi développement asymptotique.*

Si f *admet un d.l. généralisé en 0, alors il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x^p f(x)$ *a une limite finie en 0.*

Etude des branches infinies d'une courbe

Exemples :
exemple A.3.18

Exercices :
exercice B.3.4
exercice B.3.5

notion clé :
Asymptote

Définition 3.8

On étudie au $V(+\infty)$.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$.

La droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ quand x est au $V(+\infty)$.

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

La droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ quand x est au $V(a)$.

iii $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.

Si f admet un développement généralisé au voisinage de $+\infty$ c'est-à-dire :

$$f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p + a_{p+1}\frac{1}{x} + \cdots + a_{n+p}\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

alors la courbe $\mathcal{C}_g$ où $g(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ quand x est au $V(+\infty)$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$

Le signe de $f(x) - g(x)$ *au voisinage de* $+\infty$ *permet d'avoir la position de* $\mathcal{C}_f$ *par rapport à* $\mathcal{C}_g$.

Si $f(x) - g(x) > 0, \mathcal{C}_f$ *est au dessus de* $\mathcal{C}_g$ *au* $V(+\infty)$.

Si $f(x) - g(x) < 0, \mathcal{C}_f$ *est au dessous de* $\mathcal{C}_g$ *au* $V(+\infty)$.

Il en serait de même pour x *au voisinage de* $-\infty$.

3.3 Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

Définitions

Exemples :
exemple A.3.19

Exercices :
exercice B.3.6
exercice B.3.7

notion clé :
Equivalent

I désigne un intervalle qui est $V(x_0)$ ou $V(x_0^+)$ ou $V(x_0^-)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$.

Définition 3.9

f est équivalente à g au voisinage de x_0 et on note

$$f \underset{x_0}{\sim} g$$

si

$$\exists I,\ \forall x \in I, \quad f(x) = g(x)\,(1+\varepsilon(x)) = g(x) + g(x)\varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to x_0$$

Si $I = V(x_0^+)$, on note $f \underset{x_0^+}{\sim} g$ et ε a une limite à droite égale à 0.

Si $I = V(x_0^-)$, on note $f \underset{x_0^-}{\sim} g$ et ε a une limite à gauche égale à 0.

Définition 3.10 (la plus souvent utilisée)

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

▶▶▶

Pour une fonction f donnée, il y aura plusieurs fonctions équivalentes à f au $V(x_0)$: on cherchera toujours, si possible, la plus simple.

Définition 3.11

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, *on dit que f est un infiniment grand au voisinage de x_0.*

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, *on dit que f est un infiniment petit au voisinage de x_0.*

Equivalent d'une fonction qui admet un d.l. au $V(x_0)$.

Propriétés 3.3

i) $x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = a_p(x-x_0)^p + a_{p+1}(x-x_0)^{p+1} + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x), \quad a_p \neq 0$

alors

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$

f est équivalent au terme **non nul** *du d.l. de degré le plus bas par rapport à x.*

b) $x_0 = \pm\infty$

$f(x) = a_p\frac{1}{x^p} + a_{p+1}\frac{1}{x^{p+1}} + \cdots + a_n\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x), \quad a_p \neq 0$

alors

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_p\frac{1}{x^p}$$

*f est équivalent au terme **non nul** du d.l. de degré le plus bas par rapport à $\frac{1}{x}$.*

Propriétés

Exemples :
exemple A.3.20
exemple A.3.21

notion clé :
Propriétés des équivalents

Propriétés 3.4

i) "$\sim$" est une relation d'"équivalence sur l'ensemble des fonctions définies sur $I - \{x_0\}$ c'est-à-dire :

a) $f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$.

b) Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *alors* $g(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$.

c) Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$ *alors* $f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$.

ii) $\left(u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \text{ et } \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} u(x) = a \right) \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} v(x) = a$

c'est-à-dire deux fonctions qui sont équivalentes au voisinage d'un point ont même limite en ce point.

On utilisera souvent cette propriété ; quand on voudra trouver la limite d'une fonction en un point, on essaiera souvent de trouver une fonction équivalente au voisinage de ce point.

Attention ! ! ! *La réciproque n'est pas vraie.*
$u(x) = x$ *et* $v(x) = x^2$, $x_0 = 0$.

On a u qui n'est pas équivalente à v car (seconde définition) $\dfrac{v(x)}{u(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ *et pourtant elles ont même limite.*

iii) $\left(u(x) \underset{x_0}{\sim} u_1(x) \text{ et } v(x) \underset{x_0}{\sim} v_1(x)\right) \Longrightarrow u(x)v(x) \underset{x_0}{\sim} u_1(x)v_1(x)$

Si de plus : $\forall x \in I,\ x \neq x_0,\ v(x) \neq 0,\ \left(u(x) \underset{x_0}{\sim} u_1(x) \text{ et } v(x) \underset{x_0}{\sim} v_1(x)\right) \Longrightarrow \dfrac{u(x)}{v(x)} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{u_1(x)}{v_1(x)}$
c'est-à-dire l'équivalent d'un produit est le produit des équivalents et l'équivalent d'un quotient est le quotient des équivalents.

On appliquera cette propriété chaque fois que l'on fera l'étude locale d'une fonction f *qui se présentera sous la forme d'un produit ou d'un quotient.*

iv) $u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \Longrightarrow (\forall x \in I,\ u(x) \text{ et } v(x) \text{ ont le même signe})$
c'est-à-dire l'étude locale du signe de u est amenée à l'étude locale du signe de v.

v) si $u(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$ *alors* $u(x) \underset{x_0}{\sim} a$.

Pièges avec les équivalents

Exemples :
exemple A.3.22
exemple A.3.23

notion clé :
Pièges avec les équivalents

ATTENTION

i) $u(x) \underset{x_0}{\sim} 0$! ! ! est faux sauf si $\forall x \in V(x_0), \quad u(x) = 0$: cas qui ne présente aucun intérêt.

ii) $\left.\begin{array}{l} u_1(x) \underset{0}{\sim} v_1(x) \\ u_2(x) \underset{0}{\sim} v_2(x) \end{array}\right\}$ n'implique pas $u_1(x) + u_2(x) \underset{0}{\sim} v_1(x) + v_2(x)$
On ne peut le faire que pour le produit ou le quotient mais pas pour la somme.

iii) $u(x) \underset{0}{\sim} v(x)$ n'implique pas $f\,(u(x)) \underset{0}{\sim} f\,(v(x))$.
En général, on ne peut pas composer les équivalents.

Cas particulier

Exemples :
exemple A.3.24

Exercices :
exercice B.3.8
exercice B.3.9

Documents :
document C.2.2

notion clé :
Négligeable

Propriétés 3.5

i) Somme

Si au $V(x_0)$, f est négligeable par rapport à g alors

$$(f(x)+g(x)) \underset{x_0}{\sim} g(x)$$

Remarque

On dit que f est négligeable au $V(x_0)$ par rapport à g si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

$f(x) = x$ *et* $g(x) = x^2$.

f *est négligeable par rapport à* g *au* $V(+\infty)$ *car* $f(x) = g(x)\times\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

g *est négligeable par rapport à* f *au* $V(0)$ *car* $g(x) = f(x)\times x$, $\lim_{x\to 0} x = 0$.

ii) Composition

a) $\left(u(x)\underset{x_0}{\sim}v(x) \text{ et } \left(\lim_{x\to x_0} u(x) \neq 1 \text{ ou } \lim_{x\to x_0} u(x) = \pm\infty\right)\right) \Longrightarrow \left(\ln u(x)\underset{x_0}{\sim}\ln v(x)\right)$

►►►

On peut composer les équivalents avec $\ln$ *à condition que* $u \notin V(1)$.

$$\textit{b)}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \left(u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \textit{ et } u(x) > 0 \right) \Longrightarrow u(x)^{\alpha} \underset{x_0}{\sim} v(x)^{\alpha}.$$

$$\textit{c)}\ \left(u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \textit{ et } \lim_{x \to x_0} u(x) - v(x) = 0 \right) \Longrightarrow \mathrm{e}^{u(x)} \underset{x_0}{\sim} \mathrm{e}^{v(x)}.$$

Equivalents de fonctions usuelles

Exemples :
exemple A.3.25

notion clé :
Equivalents de fonctions usuelles

Propriétés 3.6

i) $x \in V(0)$

$$\sin x \underset{0}{\sim} x, \quad (\mathrm{e}^{x}-1) \underset{0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \quad (\cos x - 1) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$((1+x)^{\alpha}-1) \underset{0}{\sim} \alpha x, \quad \tan x \underset{0}{\sim} x, \quad \operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x, \quad \operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} x, \quad (\operatorname{ch} x - 1) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

ii) $x \in V(1)$

$$\ln x \underset{1}{\sim} (x-1), \quad x^{\alpha} - 1 \underset{1}{\sim} \alpha(x-1)$$

Attention ! !

i) $x \in V(+\infty),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \left(\ln x \underset{+\infty}{\not\sim} x^{\alpha} \text{ et } \mathrm{e}^{x} \underset{+\infty}{\not\sim} x^{\alpha}\right)$

ii) $x \in V(0),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \ln x \underset{0}{\not\sim} x^{\alpha}$

Applications

notion clé :
Applications

Exercices :
exercice B.3.10
exercice B.3.11
exercice B.3.12
exercice B.3.13
exercice B.3.14

Les développements limités et les équivalents sont des outils puissants utilisés **localement** pour la recherche d'équivalents, le calcul de limite et le comportement asymptotique (branche infinies) d'une fonction en un lieu.

On essaiera au maximum d'utiliser les équivalents car c'est plus rapide que les d.l. à condition de pouvoir appliquer les règles sur les équivalents sinon on passera par les d.l.

Ils serviront aussi dans ce regroupement pour l'étude d'intégrale généralisée et dans un autre regroupement pour l'étude des suites ou séries numériques.

3.4 Exercices bilan

Exercices bilan : d.l.

notion clé :
Exercices bilan d.l.

Exercices :
exercice B.3.15
exercice B.3.16
exercice B.3.17
exercice B.3.18

Exercices :
exercice B.3.19
exercice B.3.20
exercice B.3.21
exercice B.3.22

Dans tous les exercices ci-dessus,

$DL_n(x_0)$ de f signifie d.l. de f en x_0 à l'ordre n.

Exercices bilan : équivalent

notion clé :
Exercices bilan équivalent

Exercices :
exercice B.3.23
exercice B.3.24
exercice B.3.25
exercice B.3.26

Exercices :
exercice B.3.27
exercice B.3.28
exercice B.3.29
exercice B.3.30

Deuxième partie

Les annexes

Annexe A

Les exemples

Table des exemples

A.1 Exemples du chapitre 1

Exemple A.1.1 Voisinage d'un point

$\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[$, $]-1.1,-0.9[$ sont des $V(-1)$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.2 Fonctions réelles

$$f \ : \ x \longrightarrow x^2, \quad g \ : \ x \longrightarrow \sqrt{x}, \quad h \ : \ x \longrightarrow \sin(x).$$

f, g et h sont trois fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.3 Domaine de définition

$f_1 \ : \ x \longrightarrow 2x+1.$ $D=\mathbb{R}$, fonction affine.
$f_2 \ : \ x \longrightarrow x^3+3x^2+1.$ $D=\mathbb{R}$, fonction polynôme.
$f_3 \ : \ x \longrightarrow \frac{x^2+1}{x}.$ $D=\mathbb{R}-\{0\}$, fonction rationnelle.
$f_4 \ : \ x \longrightarrow \sin(x).$ $D=\mathbb{R}.$
$f_5 \ : \ x \longrightarrow \sqrt{x^2-1}.$ $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 1 \text{ ou } x\leq -1\}.$

Retour au grain ▲

Exemple A.1.4 Fonction strictement croissante

$f : x \longrightarrow x^2$ est strictement croissante sur $[1,2]$ mais n'est pas monotone sur $[-1,2]$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.5 Fonction bornée

$f(x) = \sin(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.6 Fonction minorée

$g(x) = x^2 - 1$ est minorée sur $\mathbb{R}$ car $g(x) \geq -1$ mais n'est pas majorée.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.7 Parité

$f(x) = 2 + x^2 - 3x^4$ est paire sur $\mathbb{R}$.
$g(x) = x^3 + x$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.8 Périodicité

$f(x) = \sin(x)$: la période de f est 2π.
$g(x) = \sin(3x)$: la période de g est $\frac{2\pi}{3}$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.9 Limites de fonctions

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9, \quad \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Retour au grain ▲

Exemple A.1.10 Limites

$k(x) = x^2$.

On a $\lim_{x \to 2^+} k(x) = \lim_{x \to 2^-} k(x) = 4$. k a une limite au point $x = 2$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.11 Limites

$f(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$.

On a $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.
f a une limite à droite différente de la limite à gauche au point $x = 1$ donc f n'a pas de limite au point $x = 1$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.12 Limites

$g(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$.

On a $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 1, \quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = -1$.
g a une limite à droite différente de la limite à gauche au point $x = 1$ donc g n'a pas de limite au point $x = 1$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.13 Continuité

$f(x) = x^2$.
On a $f(2) = 4$ et $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. Donc f est continue au point $x = 2$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.14 Continuité à droite

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1), \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 \neq f(1).$$

f est donc continue à droite en $x = 1$ mais n'est pas continue à gauche, par suite f n'est pas continue en $x = 1$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.15 Fonctions continues

a) Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

b) Les fonctions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sont continues sur $\mathbb{R} - \{x \mid Q(x) = 0\}$.

c) Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

d) Les fonctions $\sqrt{P(x)}$ où P est une fonction polynôme sont continues sur $\{x \mid P(x) \geq 0\}$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.16 Maximum, minimum

$f(x) = x^2, \quad f([-1,2]) = [0,4]$.
On a : $m = f(0) = 0$ et $M = f(2) = 4$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.17 Maximum, minimum

$f(x) = \sin(x), \quad f([0, \frac{5\pi}{4}]) = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1].$
On a : $m = f(\frac{5\pi}{4})$ et $M = f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.18 Taux d'accroissement

$f(x) = x^2, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$
Alors $\tau_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{2hx_0+h^2}{h} = 2x_0 + h.$

$\lim_{h\to 0} \tau_{x_0}(h) = 2x_0$. d'où $f'(x_0) = 2x_0$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.19 Tangente à une courbe

$f(x) = x^2, \quad x_0 = 2.$
Au point $x_0 = 2$, on a : $f'(2) = 4$, $f(2) = 4$.
La droite d'équation $y = 4+4(x-2) = 4x-4$ est une approximation au $V(2)$ de la parabole d'équation $f(x) = x^2$.
C'est donc la tangente à la courbe au point $A(2,4)$.

Retour au grain ▲

Exemple A.1.20 Différentielle d'une fonction

$f(x) = x^2, \quad df = 2xdx.$

Retour au grain ▲

Exemple A.1.21 Fonction de classe $\mathcal{C}^n$

a) $f_1 \;:\; x \longrightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. f_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $f_1'(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$.

b) $f_2 \;:\; x \longrightarrow \sin(x)$. f_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $f_2'(x) = \cos(x)$.

c) $f_3 \;:\; x \longrightarrow \cos(x)$. f_3 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $f_3'(x) = -\sin((x)$.

d) $f_4 \;:\; x \longrightarrow \sqrt{x}$. f_4 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$. $f_4'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Retour au grain ▲

A.2 Exemples du chapitre 2

Exemple A.2.1 Réciproque d'une fonction

Soit $I = \mathbb{R}^+$ et $f(x) = x^2$.

f est continue et strictement croissante sur un intervalle I alors f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}^+$.

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Retour au grain ▲

Exemple A.2.2 Comparaison de fonction

On va montrer que

$$\forall x \in V(+\infty), \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x} x^3 < \frac{1}{x^2}$$

On a :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists V(+\infty),\ \ \forall x \in V(+\infty), \quad e^{-x} < \frac{1}{x^\alpha}$$

Alors $f(x) < \dfrac{x^3}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-3}}$.
Si on applique ce résultat en particulier pour $\alpha = 5$, on a donc

$$\exists V(+\infty) \text{ tel que } \forall x \in V(+\infty), \quad f(x) < \frac{1}{x^2}$$

Retour au grain ▲

Exemple A.2.3 Comparaison de fonction

Montrer qu'au $V(0^+)$,

$$f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$$

et

$$f(x) > \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Au $V(+\infty)$, on a : $|\ln x| > 1$ donc $f(x) > \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On sait que $\forall \alpha > 0,\ \exists V(0^+),\ \ \forall x \in V(0^+), \quad |\ln x| < \dfrac{1}{x^{\alpha}}$

donc $f(x) < \dfrac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}$, on aura $f(x) < \dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$ si on prend $\alpha = \frac{3}{4}$.

Retour au grain ▲

A.3 Exemples du chapitre 3

Exemple A.3.1 Formule de Taylor-Lagrange

$f(x) = e^x$. On prend $a = 1$, $b = x$ et $n = 3$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, x]$.
$f^{(n)}(x) = e^x$ d'où $e^x = 1 + e\,(x-1) + \frac{1}{2!}e\,(x-1)^2 + \frac{1}{3!}e\,(x-1)^3 + \frac{1}{4!}e^{c_x}(x-1)^4$, $c_x \in]1, x[$.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.2 Formule de Mac-Laurin Lagrange

Soit $f(x) = \ln(1+x)$ alors pour $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

En effet en appliquant Mac-Laurin Lagrange sur $[0, x]$ pour $n = 1$.
Sachant que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$
$\exists c_1(x) \in]0, x[, \ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+c_1(x))^2}$
Comme $c_1(x) > 0$, on a : $0 \leq \frac{1}{(1+c_1(x))^2} \leq 1$
d'où $x \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.3 Approximation de e

On va montrer que le nombre e peut être approché par le nombre $\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!}$ avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

On applique la formule de Mac-Laurin Lagrange à la fonction exponentielle sur $]0,1]$ pour $x = 1$ avec $n = 5$.

On a $\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{\mathrm{e}^{c}}{6!}$ avec $c \in]0,1[$

$$0 < e - \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{c}}{6!} \leq \frac{\mathrm{e}}{6!} \leq \frac{1}{2(5)!} = \frac{1}{240} < 10^{-2}$$

On a

$$0 < \mathrm{e} - \frac{326}{120} < 10^{-2}$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.4 Formule de Mac-Laurin Young

On applique la formule de Mac-Laurin Young à la fonction $f\ :\ x \longrightarrow \mathrm{e}^{x}$.
f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ au $V(0)$ alors sachant que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 1$, on a :

$$\mathrm{e}^{x} = P_n(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.5 Formule de Mac-Laurin Young

On applique la formule de Mac-Laurin Young à la fonction $f \ : \ x \longrightarrow \sin x$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au $V(0)$ alors sachant que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, on a :

$$\sin x = P_{2n+1}(x) + x^{2n+2}\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.6 D.l

Soit $f(x) = 1 + x^2 - 5x^3 + x^5$.
Le d.l. de f à l'ordre 3 au $V(0)$ est

$$f(x) = 1 + x^2 - 5x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = x^2 \longrightarrow 0$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.7 d.l.

$f(x) = 1 + 3x + 5x^3 + x^3\varepsilon(x)$.
Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 1 + 3x + x^2\varepsilon_1(x) \\ f(x) & = & 1 + 3x + x\varepsilon_2(x) \\ f(x) & = & 1 + \varepsilon_3(x) \end{array}.$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.8 d.l. et primitive

Soit f admettant une primitive F au $V(0)$ avec $F(0) = 3$.
On suppose que f admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre 3 tel que :

$$f(x) = 1 - x + 2x^2 - 4x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

on a alors F qui admet un d.l. à l'ordre 4 au $V(0)$ tel que :

$$F(x) = 3 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.9 Addition de d.l.

d.l. de $f(x) = \sin x - 2\mathrm{sh}\, x$ en $x_0 = 0$ et $n = 3$.
On a : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ et $\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$.

Alors $f(x) = -x - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.10 Produit de d.l.

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x \cos(2x)$.
On cherche le d.l. de f pour $x_0 = 0$ et $n = 4$.

*R*éponse :
$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$.
$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Donc $f(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.11 Composition de d.l.

On cherche le d.l. de $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ pour $x_0 = 0$ et $n = 4$.

*R*éponse :
$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$ avec $u = u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
$f(x) = \mathrm{e}^{u}$ avec $u \in V(0)$.

$$f(x) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + u^4\varepsilon(u) \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x) \\ u^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x) \\ u^3 &= x^3 + x^4\varepsilon(x) \\ u^4 &= x^4 + x^4\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Par suite en remplacant dans (A.1), on a :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.12 Quotient de d.l.

On cherche le d.l. de $f(x) = \dfrac{1+x}{\mathrm{e}^{x}}$ pour $x_0 = 0$ et $n = 3$.

*R*éponse :
$\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x), \quad \mathrm{e}^{0} = 1 \neq 0$
Le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $1+x$ par $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}$ à l'ordre 3 est $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ donc

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.13 Quotient de d.l.

On va donner s'il existe le d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n = 3$ des quotients suivants.

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1+x}{e^x - 1 - x}$

Ici $g(0) = 0$ et $f(0) = 1$: il n'y a pas de d.l.

b) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{e^x - 1 - x}$

Ici $g(0) = f(0) = 0$. On a :

$$h(x) = \frac{x}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + x^2\varepsilon(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$f_1(0) = 1$ et $g_1(0) = 0$: il n'y a pas de d.l.

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\cos x - 1}{e^x - 1 - x}$.

Ici $g(0) = f(0) = 0$. On a :

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

donc $h(x) = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = \dfrac{-\frac{1}{2} + x\varepsilon(x)}{\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + x\varepsilon(x)}$ après avoir simplifié par x^2.
$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -1$. Il y a un d.l. mais on l'a à l'ordre 1 car on a le d.l. de f_1 et de g_1 à l'ordre 1. Cela vient de la simplification par x^2 qui a abaissé l'ordre de 2 donc si on veut le d.l. de h à l'ordre 3, il faut prendre g et f à l'ordre 5.

$$h(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + x^3\varepsilon(x)}{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{120} + x^3\varepsilon(x)}$$

On calcule le quotient obtenu en faisant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}$ par $\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{120}$.

On trouve : $-1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} - \frac{x^3}{135}$.
Par suite

$$h(x) = -1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} - \frac{x^3}{135} + x^3\varepsilon(x)$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.14 D.l. en un point non nul

$f(x) = \ln x, \;\; x_0 = 1$ et $n = 3$.

On pose $t = x - 1$ alors $f(x) = g(t) = \ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t), \quad t \in V(0)$.

Donc $f(x) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\,\varepsilon(x-1)$.

On ne développe pas.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.15 D.l. à l'infini

$h(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + 2x^2}, \quad x_0 = +\infty$ et $n = 3$.

On pose $t = \frac{1}{x}$ alors $h(x) = g(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + 2}, \quad t \in V(0)$.

On cherche un d.l. de g en faisant une division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3.
On trouve

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{4} + t^3\varepsilon(t)$$

Par suite $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{1}{4x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(\dfrac{1}{x})$.

On ne doit pas réduire au même dénominateur.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.16 D.l généralisé

La fonction définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ admet un d.l. généralisé au $V(0)$ à l'ordre 3 car : $g(x) = x^2 f(x) = e^x$ admet un d.l. à l'ordre 5 au $V(0)$.
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$.
Par suite,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + x^3\varepsilon(x)$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.17 D.l. généralisé

La fonction définie par $f(x) = x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ admet un d.l. généralisé au $V(\pm\infty)$ à l'ordre 1.

En effet, en posant $t = \frac{1}{x}$, on a :$g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{t} - 1}{t^2}, \quad t \in V(0)$.
Comme $\mathrm{e}^{t} - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$, on a :

$$g(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \frac{t}{6} + t\varepsilon(t)$$

Par suite

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.18 Asymptote

$f(x) = x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$: étude au $V(+\infty)$.

On a déjà déterminé le d.l. généralisé de cette fonction dans l'exemple A.3.17. On avait trouvé

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x), \quad x \in V(+\infty)$$

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f car

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$$

De plus, $f(x) - y = \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}) > 0$
la courbe est au dessus de l'asymptote au $V(+\infty)$.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.19 Equivalent

Au $V(0)$, on a

$$(\mathrm{e}^{x}-1)\underset{0}{\sim}x$$

En effet : $\mathrm{e}^{x}-1=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)=x+x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)+x^3\varepsilon(x)=x+x\alpha(x)$
avec $\alpha(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+x^2\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$
On retrouve la première définition.

On peut aussi le voir en utilisant la seconde définition :

$$\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=\frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)}{x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+x^2\varepsilon(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$$

Par suite, on utilisera le fait que $\mathrm{e}^{x}-1$ admet un d.l. au $V(0)$ donc

$$(\mathrm{e}^{x}-1)\underset{0}{\sim}x$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.20 Opérations sur les équivalents

Sachant que $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on désire déterminer la limite en 0, si elle existe, de $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x \ln(x+1)}$.

On commence par chercher un équivalent ce qui est facile parce que la fonction se présente sous la forme de produit et quotient.

On a $f(x) \underset{0}{\sim} g(x) = \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Les fonctions f et g sont équivalentes en 0 donc elles ont même limites par suite

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.21 Opérations sur les équivalents

Sachant que $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on détermine un équivalent de $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1-2x^2}-1\right)\cos(2x)}{\sin x}$ au $V(0)$.

$\sqrt{1-2x^2} = \left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ avec $2x^2 \in V(0)$ donc

$$\sqrt{1-2x^2} - 1 \underset{0}{\sim} -x^2$$

$\lim\limits_{x\to 0} \cos(2x) = 1$ donc $\cos(2x) \underset{0}{\sim} 1$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$
f est sous forme de produit et de quotient de ces fonctions donc :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.22 Somme de deux équivalents

Ceci est un contre-exemple pour montrer que l'on ne peut pas, en général, ajouter les équivalents.

Soit $f(x) = g(x) - h(x) + k(x)$ où

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x+1} \\ h(x) &= \frac{1}{(x+1)^2} \\ k(x) &= \frac{x}{x+2} \end{aligned}$$

$x_0 = 0$.

On a

$$g(x) \underset{0}{\sim} g_1(x) = 1, \quad h(x) \underset{0}{\sim} h_1(x) = 1, \quad k(x) \underset{0}{\sim} k_1(x) = \frac{x}{2}$$

On a $g_1(x) - h_1(x) + k_1(x) = \frac{x}{2}$.

On a aussi $f(x) = \dfrac{x\left(x^2+3x+3\right)}{(x+1)^2\,(x+2)} \underset{0}{\sim} \dfrac{3x}{2}$

Or $\frac{x}{2}$ n'est pas équivalent à $\frac{3x}{2}$.

Par suite, on n'a pas $f(x) \underset{0}{\sim} g_1(x) - h_1(x) + k_1(x)$.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.23 Composition de deux équivalents

On montre sur deux contre-exemples que l'on ne peut pas, en général, composer les équivalents.

a) $x_0 = +\infty, \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}$.

b) $x_0 = 0, \quad f(x) = \ln(\cos x)$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = x^2 - x$.

On a : $u(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais on n'a pas $f(x) = \mathrm{e}^{u} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x^2}$ car $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2-x}}{\mathrm{e}^{x^2}} = \mathrm{e}^{-x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq 1$

b) $f(x) = \ln u$ avec $u(x) = \cos x$.

On a : $u(x) \underset{0}{\sim} 1$ mais on n'a pas $f(x) = \ln u \underset{0}{\sim} \ln 1 = 0$!!! car f n'est pas la fonction nulle.

Retour au grain ▲

Exemple A.3.24 Fonctions négligeables

a) $f(x) = x + \ln x, \quad x \in V(+\infty)$.
On a $\ln x$ qui est négligeable par rapport à x (comparaison entre la fonction $\ln$ et la fonction puissance au $V(+\infty)$) donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$$

b) $g(x) = x^2 - 2x^3$.
au $V(0)$, $-2x^3$ est négligeable par rapport à x^2 donc

$$g(x) \underset{0}{\sim} x^2$$

au $V(+\infty)$, x^2 est négligeable par rapport à $-2x^3$ donc

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} -2x^3$$

Retour au grain ▲

Exemple A.3.25 Equivalent

On cherche un équivalent au $V(0)$ de $\ln(\cos x)$.

On pose $u = \cos x$ alors $u \in V(1)$.
Or $\ln u \underset{u \in V(1)}{\sim} (u-1)$ donc $\ln(\cos x) \underset{x \in V(0)}{\sim} (\cos x - 1)$.
De plus, $(\cos x - 1) \underset{x \in V(0)}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc

$$\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Retour au grain ▲

Annexe B

Les exercices

Table des exercices

B.1 Exercices du chapitre 1

Exercice B.1.1 Graphes de fonctions

Tracer avec la calculatrice le graphe des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 2x + 1$.
$f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
$f_3(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
$f_4(x) = \sin(x)$.
$f_5(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Retour au grain ▲

Exercice B.1.2 Fonctions monotones

Donner, à partir des graphes des fonctions suivantes, les intervalles les plus grands sur lesquels chacune de ces fonctions est croissante (respectivement décroissante).

a) $f_1(x) = 2x + 1$.
b) $f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
c) $f_3(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
d) $f_4(x) = \sin(x)$.
e) $f_5(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.1.3 Périodicité

Déterminer la période des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(3x) - \cos(x)$.

b) $g(x) = \sin(3x) + 2\cos(6x)$.

c) $h(x) = |\sin(x)|$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.1.4 Opération sur des fonctions

Soient $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^2$.
Déterminer : $f+g,\ f\times g,\ f\circ g$ et $g\circ f$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.1.5 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^5 - 2x^4 + x^2 - 1.$

b) $g(x) = 4\sin^5(x) - 2\sin^4(x) + \sin^2(x) - 1.$

c) $h(x) = 4\mathrm{e}^{5x} - 2\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{2x} - 1.$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.1.6 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos^2(x)$.

b) $g(x) = \cos(x^2)$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.1.7 Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de $f : f(x) = \sin^2(2x+1)\cos(x^2+3x)$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.1.8 Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de f : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2x^3 + x\right)$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.1.9 Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de f : $f(x) = \frac{e^{x^2}(x+1)}{e^{2x}+1}$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.1.10 Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de $f : f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$.

Retour au grain ▲

Solution

B.2 Exercices du chapitre 2

Exercice B.2.1 Simplification Arcsinus

Simplifier :
a) $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right)$.

b) $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{7\pi}{2}\right)$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.2 Simplification Arcsinus

Simplifier :

a) $\sin(\text{Arcsin}\, x)$.

b) $\cos(\text{Arcsin}\, x)$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.3 Simplification Arccos

Simplifier :

a) $\text{Arccos}\,(\cos(-\frac{\pi}{2}))$.

b) $\cos(\text{Arccos}\,x)$.

c) $\sin(\text{Arccos}\,x)$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.4 Simplification Arctan

Simplifier :
a) Arctan $(\tan(\frac{5\pi}{4}))$.

b) Arctan $(\tan(\frac{5\pi}{3}))$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.5 Simplification Arctan

Simplifier :
a) $\tan(\text{Arctan}\, x)$.

b) $\cos(\text{Arctan}\, x)$.

c) $\sin(\text{Arctan}\, x)$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.6 Logarithme

Calculer

a) $\ln \frac{1}{e}$.

b) $\ln e^{3}$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.7 Equation logarithmique

Résoudre $\ln(1-x) - 2\ln(x+1) = 0$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.8 Dérivée de fonction logarithmique

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{\ln(\sin x)}{x}$ et donner le domaine de définition de la dérivée.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.9 Equation exponentielle

Résoudre $\mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x} - 5 = 0$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.10 Inéquation exponentielle

Résoudre $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2}{\mathrm{e}^{x} - 1} \geq 1$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.11 Dérivée sous forme d'exponentielle

Calculer la dérivée de $f(x) = (x+1)^{\sin x}$ et donner le domaine de définition.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.12 Equation hyperbolique

Résoudre $3\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 4$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.2.13 Equation hyperbolique

Résoudre $\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} x = 1$.

Retour au grain ▲

Solution

B.3 Exercices du chapitre 3

Exercice B.3.1 Produit de d.l.

Donner le d.l. de g à l'ordre 4 au $V(0)$: $g(x) = (\mathrm{e}^{x} - 1)(\cos(2x) - 1)$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.2 D.l en un point non nul

Donner le d.l. de $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x_0 = 2$ et $n = 3$.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.3 D.l en un point non nul

Donner le d.l. de $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ pour $x_0 = 2$ et $n = 3$.
On utilisera les résultats de l'exercice B.3.2.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.4 Asymptote

Soit $f(x) = x^2 \text{Arctan}\,\dfrac{1}{x-1}$.

Rechercher l'existence d'asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au $V(\pm\infty)$ et étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.5 Asymptote

Etude des branches infinies de $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{x^2-1}}$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.6 Equivalent

Donner un équivalent au $V(0)$ de $f(x) = \mathrm{e}^x + \cos x - 2 - x$ en utilisant un d.l. de f.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.7 Equivalent

Donner un équivalent au $V(0)$ de $f(x) = \ln(\cos x)$ en utilisant un d.l. de f.

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.8 Equivalent

Déterminer un équivalent de

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x^2 \cos^2 x}\right), \quad x \in V(0^+)$$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.9 Equivalent

Déterminer un équivalent de

$$f(x) = (1 - \cos x)^{\alpha}, \quad x \in V(0^{+}),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.10 Calcul de limite

Déterminer la limite en 0 de

$$f(x) = \frac{\sin x \left(\ln(1+x^2)\right)}{x \tan x}$$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.11 Calcul de limite

Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}\right)}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.12 Calcul d'équivalent

Donner un équivalent au $V(0)$ de

$$f(x) = e^x - \sqrt{1+2x}$$

En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.13 Asymptote à une courbe

Asymptote et position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote.

$$f(x) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, \quad x \in V(\pm\infty)$$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.14 Asymptote à une courbe

Asymptote et position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote.

$$f(x) = \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2-1}$$

Retour au grain ▲

Solution

Exercice B.3.15 Exo bilan

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+\sin x}$.

Retour au grain ▲

Solution : à regarder en dernier ! !

Aide 1

Exercice B.3.16 Exo bilan

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{x}{\sin x}$.

Retour au grain ▲

Solution : à regarder en dernier ! !

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice B.3.17 Exo bilan

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto e^{\cos x}$.

Retour au grain ▲

Solution : à regarder en dernier ! !

Aide 1 Aide 2

Exercice B.3.18 Exo bilan

$DL_3(0)$ de $x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Retour au grain ▲

Solution : à regarder en dernier ! !

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice B.3.19 Exo bilan

$DL_3(+\infty)$ de $t \longmapsto \dfrac{1+t}{2+t^2}$.

Retour au grain ▲

Solution : à regarder en dernier ! !

Aide 1

Exercice B.3.20 Exo bilan

$DL_2(+\infty)$ de $x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$.

Retour au grain ▲

Solution : à regarder en dernier ! !

Aide 1

Exercice B.3.21 Exo bilan

$DL_3(2)$ de $x \longmapsto \sin x$

Retour au grain ▲

Solution : à regarder en dernier ! !

Aide 1

Exercice B.3.22 Exo bilan

$DL_4(1)$ de $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$

Retour au grain ▲

Solution : à regarder en dernier ! !

Aide 1

Exercice B.3.23 Exo bilan

Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^m-1}$ avec $m \neq 0$.

Retour au grain ▲

Solution

Aide 1

Exercice B.3.24 Exo bilan

Calculer $\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x$.

Retour au grain ▲

Solution

Aide 1

Exercice B.3.25 Exo bilan

Calculer $\lim_{x \to +\infty} (cos\frac{1}{x} - 1)x^2$

Retour au grain ▲

Solution

Aide 1

Exercice B.3.26 Exo bilan

Calculer $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

Retour au grain ▲

Solution

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice B.3.27 Exo bilan

Calculer $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

Retour au grain ▲

Solution

Aide 1 Aide 2

Exercice B.3.28 Exo bilan

Donner un équivalent de $(1+\frac{1}{n})^n - e$.

Retour au grain ▲

Solution

Aide 1

Exercice B.3.29 Exo bilan

Etude des branches infinies de la fonction

$$f(t) = \frac{t^2 - 2t - 1}{t} e^{\frac{1}{t}}$$

1. Poser $x = \frac{1}{t}$ et g telle que $g(x) = f(\frac{1}{x})$. Alors $g(x)$?
2. Déterminer α tel que $x^\alpha g(x)$ admette une limite finie non nulle quand x tend vers 0.
3. Ecrire le d.l. de $xg(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
4. En déduire l'existence d'une droite Δ d'équation $y = at + b$ telle que $\lim\limits_{t \to \pm\infty} (f(t) - (at + b)) = 0$. Donner un équivalent en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(t) - (at + b)$, étudier le signe de cet équivalent et préciser la position relative entre la courbe et la droite Δ à l'infini. La droite Δ est appelée l'asymptote de la courbe de f.

Retour au grain ▲

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1
Question 4 Aide 1 Aide 2

Exercice B.3.30 Exo bilan

Etude des branches infinies de la fonction

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

Retour au grain ▲

Solution

Aide 1

Annexe C

Les documents

Table des documents

C.1 Documents du chapitre 2

Document C.1.1 Démonstration des fonctions comparées

Démonstration au $V(+\infty)$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

$\forall t\geq 1,\quad \dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ d'où $\forall x>1,\quad \displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}dt\leq\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt.$

Alors $x>1,\quad 0<\ln x\leq 2\left(\sqrt{x}-1\right)\iff 0<\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$

b) $\forall\alpha>0,\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

Posons $t=x^\alpha$ alors $t\to+\infty$ quand $x\to+\infty$ (car $\alpha>0$).

Donc $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\dfrac{\alpha\ln t}{t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0.$

c) $\forall(\alpha > 0,\ \beta > 0),\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$

$$\frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ d'après } b).$$

d) $\forall\alpha > 0, \forall\beta > 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^{\alpha}} = +\infty.$

Posons $t = \mathrm{e}^{x}$ alors $t \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

$$\frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^{\alpha}} = \frac{t^{\beta}}{(\ln t)^{\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ d'après } c).$$

Retour au grain ▲

Document C.1.2 Formule hyperbolique

Démonstration de : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{x}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{-x}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Retour au grain ▲

Document C.1.3 Expression de Argsh en fonction du logarithme

Démonstration de : $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Soit $y = \operatorname{Argsh} x$ alors $x = \operatorname{sh} y,\ x \in \mathbb{R}$.

Or $\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y = \mathrm{e}^{y}$ et $\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y = 1 + x^2$.

Comme $\operatorname{ch} y \geq 0$, on a : $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2}$.

Par suite,

$$\mathrm{e}^{y} = \sqrt{1+x^2} + x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Retour au grain ▲

Document C.1.4 Expression de Argch en fonction du logarithme

Démonstration de : $\forall x \geq 1,\ \operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

Soit $y = \operatorname{Argch} x$ alors $x = \operatorname{ch} y$ et $y \geq 0$

Or $\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y = \mathrm{e}^y$ et $\operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1 = x^2 - 1$.

Comme $y > 0$, on a : $\operatorname{sh} y \geq 0$ et $\operatorname{sh} y = \sqrt{x^2-1}$.

Par suite,

$$\mathrm{e}^y = \sqrt{x^2-1} + x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Retour au grain ▲

Document C.1.5 Expression de Argth en fonction du logarithme

Démonstration de : $\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Argth} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right).$

$\forall x \in]-1,1[,\ y = \operatorname{Argth} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{th} y = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}.$

Posons $t = e^{2y}$ alors $x = \dfrac{t-1}{t+1} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \dfrac{1-x}{1+x}.$

Par suite,

$$e^{2y} = \frac{1-x}{1+x} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Retour au grain ▲

C.2 Documents du chapitre 3

Document C.2.1 Quotient de d.l.

On suppose $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ et que f et g admettent un d.l. à l'ordre n au $V(0)$ alors :

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x), \quad p \geq 1, \quad a_p \neq 0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m+1} x^{p+1} + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon(x), \quad m \geq 1, \quad b_m \neq 0$$

Si $p < m$, on a : $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est infinie, il n'y a donc pas de d.l.

Si $p \geq m$, on a : $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est finie ; on va montrer que dans ce cas $h = \frac{f}{g}$ admet un d.l. à l'ordre $n - m$.

Posons $s = p - m$ alors $s \geq 0$ et $p = m + s$.
En simplifiant la fraction par x^m

$$h(x) = \frac{a_p x^s + a_{p+1} x^{s+1} + \cdots + a_n x^{n-m} + x^{n-m}\varepsilon(x)}{b_m + b_{m+1} x + \cdots + b_n x^{n-m} + x^{n-m}\varepsilon(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

►►►

f_1 et g_1 ont un d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n-m$ avec $g_1(0) = b_m \neq 0$.
On est donc ramené au cas *i)* dans le d.l. d'un quotient.

Remarque C.1 *Pour avoir le d.l. de* h *à l'ordre* n*, il faudra prendre le d.l. de* f *et* g *à l'ordre* $n+m$*.*

Retour au grain ▲

Document C.2.2 Démonstration sur la composition des équivalents particuliers

Démonstration des résultats sur la composition.

On va utiliser la seconde définition de l'équivalent.

Si on a $u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x)$ alors $\dfrac{u(x)}{v(x)} = 1 + \varepsilon(x), \quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1.$
Alors

i) $\dfrac{\ln u(x)}{\ln v(x)} = \dfrac{\ln\left(v(x)(1+\varepsilon(x))\right)}{\ln v(x)} = \dfrac{\ln v(x) + \ln(1+\varepsilon(x))}{\ln v(x)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\varepsilon(x))}{\ln v(x)}$
Or si $\ln v(x)$ n'a pas comme limite 0, on a

$$\frac{\ln(1+\varepsilon(x))}{\ln v(x)} \underset{x_0}{\sim} \frac{\varepsilon(x)}{\ln v(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

et par suite

$$\ln u(x) \underset{x_0}{\sim} \ln v(x)$$

ii) si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)^{\alpha} = 1$

Par suite

$$\left(u(x)\right)^{\alpha} \underset{x_0}{\sim} \left(v(x)\right)^{\alpha}$$

iii) $\dfrac{\mathrm{e}^{\,u(x)}}{\mathrm{e}^{\,v(x)}} = \mathrm{e}^{\,u(x)-v(x)} \longrightarrow 1$ si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) - v(x) = 0$

Retour au grain ▲

Entrées canoniques

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

V

Solution de l'exercice B.1.2

a) f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.
b) f_2 est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[\frac{4}{3}, +\infty[$ et est décroissante sur $[0, \frac{4}{3}]$.
c) f_3 est croissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ et est décroissante sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$.
d) f_4 est croissante sur $I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}$.
f_4 est décroissante sur $J_k = \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}$.
e) f_5 est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et est croissante sur $]1, \infty[$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.3

a) $\sin(3x)$ a comme période $\frac{2\pi}{3}$ et $\cos(x)$ a comme période 2π donc f a comme période 2π.

b) $\sin(3x)$ a comme période $\frac{2\pi}{3}$ et $\cos(6x)$ a comme période $\frac{2\pi}{6}$ donc g a comme période $\frac{2\pi}{3}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x+\pi)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$. Donc la période de h est π.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.4

$$(f+g)(x) = x^2+\sin(x), \quad (f\times g)(x) = x^2\sin(x) \quad (f\circ g)(x) = \sin(x^2), \quad (g\circ f)(x) = \sin^2(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.1.5

a) $f'(x) = 20x^4 - 8x^3 + 2x$.

b) $g(x) = 4u^5 - 2u^4 + u^2 - 1$ et $u = \sin(x)$ donc $g'(x) = (20u^4 - 8u^3 + 2u) \times u'$.
$g'(x) = \left(20\sin^4(x) - 8\sin^3(x) + 2\sin(x)\right)\cos(x)$.

c) $h(x) = 20\mathrm{e}^{5x} - 8\mathrm{e}^{4x} + 2\mathrm{e}^{2x}$.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.6

a) $f(x) = u^2$ avec $u = \cos(x)$.
$f'(x) = 2u\,u' = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x)$.

b) $g(x) = \cos(u)$ avec $u = x^2$.
$g'(x) = -u'\sin(u) = -2x\sin(x^2)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.7

$f(x) = u \times v$ avec $u = \sin^2(2x+1)$ et $v = \cos(x^2+3x)$.
$f'(x) = u'v + uv'$.

$u' = 2\cos(2x+1)\sin(2x+1) \times 2 = 2\sin(4x+2)$.

$v' = -\sin(x^2+3x) \times (2x+3)$.

Donc $f'(x) = 2\sin(4x+2)\cos(x^2+3x) - (2x+3)\sin(x^2+3x)\sin^2(2x+1)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.8

$f(x) = u \times v$ avec $u = \mathrm{e}^{-x}$ et $v = \left(2x^3 + x\right)$.
$f'(x) = u'v + uv'$.

$u' = -\mathrm{e}^{-x}$.

$v' = 6x^2 + 1$.

Donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-2x^3 - x + 6x^2 + 1\right)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.9

$f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = e^{x^2}(x+1)$ et $v = e^{2x} + 1$.

$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$u' = e^{x^2}\left(2x^2 + 2x + 1\right)$.

$v' = 2e^{2x}$.

On remplace.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.10

$f(x) = \ln(u)$ avec $u = \frac{x^2+1}{2x-1}$.

$f'(x) = \frac{u'}{u}$.

$u' = \frac{2x(2x-1)-2(x^2+1)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}$.

$f'(x) = \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.1

a) $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

b) $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{7\pi}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(\sin \frac{-\pi}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(-1\right) = \frac{-\pi}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.2

a) $\sin(\text{Arcsin}\, x)$ est définie pour $x \in [-1, 1]$.
$\sin(\text{Arcsin}\, x) = x$ pour $x \in [-1, 1]$.

b) $\cos(\text{Arcsin}\, x)$ est définie pour $x \in [-1, 1]$.
On a : $\cos^2(\text{Arcsin}\, x) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}\, x) = 1 - x^2$ d'où $|\cos(\text{Arcsin}\, x)| = \sqrt{1 - x^2}$.
Comme $\text{Arcsin}\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\cos(\text{Arcsin}\, x) \geq 0$ d'où $\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.3

a) $\text{Arccos}\left(\cos(-\frac{\pi}{2})\right) = \text{Arccos}\, 0 = \frac{\pi}{2}$.

b) $\cos(\text{Arccos}\, x)$ est définie pour $x \in [-1, 1]$.
$\cos(\text{Arccos}\, x) = x$ pour $x \in [-1, 1]$.

c) $\sin(\text{Arccos}\, x)$ est définie pour $x \in [-1, 1]$.
On a : $\sin^2(\text{Arccos}\, x) = 1 - \cos^2(\text{Arccos}\,(x)) = 1 - x^2$ d'où $|\sin(\text{Arccos}\, x)| = \sqrt{1 - x^2}$.
Comme $\text{Arccos}\, x \in [0, \pi]$, on a : $\sin(\text{Arccos}\, x) \geq 0$ d'où $\sin(\text{Arccos}\, x)\sqrt{1 - x^2}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.4

a) $\text{Arctan}\,(\tan(\frac{5\pi}{4})) = \text{Arctan}\,(\tan(\frac{\pi}{4})) = \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$.

b) $\text{Arctan}\,(\tan(\frac{5\pi}{3})) = \text{Arctan}\,(\tan(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.5

a) $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b) Sachant que $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, on a :
$\cos^2(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan} x))} = \frac{1}{1+x^2}$
donc $|\cos(\operatorname{Arctan} x)| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Comme $\operatorname{Arctan} x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\cos(\operatorname{Arctan} x) > 0$.

Donc $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

c) $\sin^2(\operatorname{Arctan} x) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arctan} x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ d'après b).
Donc $|\sin(\operatorname{Arctan} x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.

Or si $x \geq 0$, on a : $\operatorname{Arctan} x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\sin(\operatorname{Arctan} x) \geq 0$.
Si $x < 0$, on a : $\operatorname{Arctan} x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, donc $\sin(\operatorname{Arctan} x) < 0$..
Par suite, $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.6

a) $\ln \frac{1}{\mathrm{e}} = -\ln \mathrm{e} = -1.$

b) $\ln \mathrm{e}^3 = 3 \ln \mathrm{e} = 3.$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.7

On cherche les réels x solution de cette équation.

Si x existe alors $x < 1$ et $x > -1$, donc on cherche $x \in]-1,1[$ qui vérifie l'équation $\ln(1-x) = \ln(x+1)^2$.

Comme $\ln$ est une fonction croissante, l'équation sera vérifiée si et seulement si

$$(1-x) = (x+1)^2 \quad \Longleftrightarrow x^2 + 3x = 0 \quad \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = -3)\,.$$

Comme on doit avoir $x \in]-1,1[$, on n'a qu'une solution $x = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.8

La dérivée existe pour x tels que $x \neq 0$ et $\sin x > 0$.

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k \text{ où } I_k =]2k\pi, \pi + 2k\pi[.$$

Pour $x \in D$, $\quad f'(x) = \dfrac{\frac{\cos x}{\sin x} x - \ln(\sin x)}{x^2}.$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.9

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0$ alors $e^{x} \neq 0$.

On a :

$$e^{x} - 4e^{-x} - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0.$$

Posons $t = e^{x}$, alors $t > 0$.

$$e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \left(t^2 - 5t + 4 = 0 \text{ et } t > 0\right).$$

$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 4)$. Donc $e^{x} = 1$ ou $e^{x} = 4$.

Les solutions sont donc $x = 0$ ou $x = \ln 4$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.10

$x \longrightarrow \dfrac{e^{2x} - 2}{e^{x} - 1}$ est définie pour $e^{x} \neq 1 \iff x \neq 0$.

Posons $t = e^{x}$ alors $t > 0$ et $t \neq 1$.
On va donc résoudre

$$\frac{t^2 - 2}{t - 1} \geq 1 \quad \text{et } t > 0 \quad \text{et } t \neq 1.$$

$$\frac{t^2 - 2}{t - 1} \geq 1 \iff \frac{t^2 - t - 1}{t - 1} \geq 0.$$

Les racines de $t^2 - t - 1 = 0$ sont $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
donc $\frac{t^2-t-1}{t-1} \geq 0 \iff t \in [t_2, 1[\cup[t_1, +\infty[$.

Par suite

$$\left(\frac{t^2 - 2}{t - 1} \geq 1 \text{ et } t > 0 \text{ et } t \neq 1\right) \iff t \in]0, 1[\cup[t_1, +\infty[.$$

donc $x \in] -\infty, 0[\cup[\ln(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}), +\infty[$.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.11

$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x \ln(x+1)}$: on a donc $D =]-1, +\infty[$.

$f(x) = \mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = \sin x \ln(x+1)$.

Par suite $f'(x) = u'\mathrm{e}^{u} = \left(\cos x \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1}\right) \mathrm{e}^{\sin x \ln(x+1)}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.12

$$3\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 4 \iff 5e^{x} + e^{-x} = 8 \iff 5e^{2x} - 8e^{x} + 1 = 0.$$

On pose $t = e^{x}$ alors $t > 0$.

On a : $5t^2 - 8t + 1 = 0 \iff \left(t = \frac{8+2\sqrt{11}}{10} \text{ ou } t = \frac{8-2\sqrt{11}}{10}\right)$.

Ces deux racines sont positives donc on a :

$x = \ln\left(\frac{8+2\sqrt{11}}{10}\right)$ ou $x = \ln\left(\frac{8-2\sqrt{11}}{10}\right)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.13

On a : $\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{sh}^2 x + 1$.

D'où $\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} x = 1 \iff 2\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh} x = 1 \iff \left(\operatorname{sh} x = 0 \text{ ou } \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\right)$.

$\operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0$.

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} \iff e^x - e^{-x} = 1 \iff e^{2x} - e^x - 1 = 0$.

On pose $t = e^x$ alors $t > 0$.

$t^2 - t - 1 = 0 \iff \left(t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Une seule des deux racines est positive donc les solutions de l'équation sont : $x = 0$ ou $x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.1

$$\begin{aligned}
e^{x} - 1 &= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x) \\
\cos(2x) - 1 &= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + x^4 \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Par suite $g(x) = -2x^3 - x^4 + x^4 \varepsilon(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.2

On pose $t = x - 2$.

Alors $f(x) = u(t) = \sqrt{t+2} = (t+2)^{\frac{1}{2}}, \quad t \in V(0)$.

Dans le tableau des d.l. au $V(0)$, on a : $(1+t)^{\alpha}$.

Ici $\alpha = \frac{1}{2}$ mais on a $(2+t)$ et non $(1+t)$. On va donc faire apparaître 1 en mettant 2 en facteur.

$$\sqrt{2+t} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{t}{2}} \text{ avec toujours } \frac{t}{2} \in V(0)$$

Or $(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 + t^3\varepsilon(t)$

donc

$(2+t)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{32}t^2 + \dfrac{1}{128}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)$

et par suite

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + (x-2)^3\varepsilon(x-2) \text{ avec } \lim_{x\to 2}\varepsilon(x-2) = 0$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.3

On pose $t = x - 2$.

Alors $g(x) = h(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{t+2}} = \mathrm{e}^{u}$ avec $u(t) = \sqrt{t+2} = (2+t)^{\frac{1}{2}}$ et $t \in V(0)$.
C'est une fonction composée. On va utiliser la règle de la composition.

Attention Ici $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = \sqrt{2} \neq 0$. On ne pourra pas utiliser le d.l. que l'on connaît de la fonction exponentielle car u n'est pas au $V(0)$.

On connaît le d.l. de $u(t)$ établi dans l'exercice B.3.2.

$$u(t) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{128}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)$$

On pose $v(t) = v = u - \sqrt{2}$ alors $v \in V(0)$.
$v(t) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{128}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)$ et on a $h(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{2}+v} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{v}$.
Comme $v \in V(0)$, on a :

$$h(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{2}}\left(1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + v^3\varepsilon(v)\right)$$

avec

$$v = \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{128}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)$$

$$v^2 = 2\left(\frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{64}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)$$

$$v^3 = \frac{\sqrt{2}}{32}t^2 + t^3\varepsilon(t)$$

Donc en remplaçant dans $h(t)$

$$h(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}{4}t + \mathrm{e}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{2}}{32}\right)t^2 + \frac{5\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{384}t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

Par suite

$$\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}{4}(x-2) + \mathrm{e}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{2}}{32}\right)(x-2)^2 + \frac{5\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{384}(x-2)^3 + (x-2)^3\varepsilon(x-2)$$

avec

$$\lim_{x\to 2}\varepsilon(x-2) = 0.$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.4

a) La fonction f a peut-être un d.l. généralisé au $V(+\infty)$.
Posons $t = \frac{1}{x}$ alors $t \in V(0)$.

$$f(x) = g(t) = \frac{1}{t^2}\text{Arctan}\left(\frac{t}{1-t}\right)$$

La fonction $t \longrightarrow \text{Arctan}\left(\frac{t}{1-t}\right)$ a un d.l. au $V(0)$.
On prend à l'ordre 3, alors g aura un d.l. généralisé à l'ordre 1 puisque on divise par t^2.

b) Cherchons le d.l. de $h(t) = \text{Arctan}\left(\frac{t}{1-t}\right)$.
C'est une fonction composée.

$$h(t) = \text{Arctan}\, u \text{ avec } u(t) = \frac{t}{1-t} = t + t^2 + t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

On a $u \in V(0)$ alors $\text{Arctan}\, u = u - \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u)$.
Par suite

$$\text{Arctan}\left(\frac{t}{1-t}\right) = t + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

c) On va déterminer l’asymptote.

$g(t) = \frac{h(t)}{t^2} = \frac{1}{t} + 1 + \frac{2}{3}t + t\varepsilon(t), \quad t \in V(0)$

alors

$f(x) = x + 1 + \frac{2}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}), \quad x \in V(\pm\infty)$

La droite $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f et on a

$$f(x) - y = \frac{2}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

$f(x) - y > 0$ au $V(+\infty)$: la courbe est donc au dessus de l’asymptote.

$f(x) - y < 0$ au $V(-\infty)$: la courbe est donc au dessous de l’asymptote.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.5

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$

On va chercher l'existence d'un d.l. généralisé pour f au $V(0)$.

On pose $t = \frac{1}{x}$, $\quad t \in V(0)$.

Alors

$$f(x) = g(t) = \frac{1}{t^2} e^{\frac{t}{1-t^2}} = \frac{h(t)}{t^2}.$$

h admet un d.l.

a) d.l. de h au $V(0)$ à l'ordre 3.

h est une fonction composée.

$$h(t) = e^{u}, \quad u(t) = \frac{t}{1-t^2} = t + t^3 + t^3 \varepsilon(t)$$

Comme $u \in V(0)$, $e^{u} = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon(u)$

par suite

$$h(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{7}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

b) Asymptote.

On a : $g(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6t} + \frac{1}{t}\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right)$

Le d.l. généralisé au $V(\pm\infty)$ de f est donc

$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{7}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit la parabole d'équation $y = x^2 + x + \frac{1}{2}$: c'est l'asymptote à la courbe au $V(\pm\infty)$ car

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - y) = 0$$

De plus, $f(x) - y = \frac{7}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$.

La différence est positive au $V(+\infty)$ donc la courbe est au dessus de la parabole au $V(+\infty)$.

La différence est négative au $V(-\infty)$ donc la courbe est au dessous de la parabole au $V(-\infty)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.6

Si on fait le d.l. de f à l'ordre 2, on trouve la partie polynôme nulle. On n'est pas allé assez loin pour trouver un équivalent.

Choisissons l'ordre 3 pour le d.l.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Par suite

$$f(x) = \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

et

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.7

On a une fonction composée. On choisit l'ordre 2 en espérant que la partie polynôme de f soit non nulle sinon on prendra un ordre plus élevé.

$f(x) = \ln(1+u)$ avec $u(x) = \cos x - 1 = \frac{-x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et $u \in V(0)$ quand $x \in V(0)$.

Pour $u \in V(0)$, $\quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$

Donc

$$f(x) = \frac{-x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

et par suite

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.8

$f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) \underset{0^+}{\sim} v(x) = \frac{x}{x^2 \times 1} = x \to 0 \neq 1$

On peut composer par suite

$$f(x) \underset{0^+}{\sim} \ln x$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.9

On a $f(x) = (u(x))^{\alpha}$ avec $u(x) = 1 - \cos x$ et $x \in V(0)$.

$$u(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} > 0$$

donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^{2\alpha}}{2^{\alpha}}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.10

C’est une forme indéterminée.

$\sin x \underset{0}{\sim} x, \quad \ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2, \quad \tan x \underset{0}{\sim} x$

En appliquant la règle sur le produit et le quotient, on a :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{x^2} = x$$

En appliquant la règle que deux fonctions équivalentes en un même point ont la même limite, on en déduit

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.11

C'est une forme indéterminée.

On commence par se ramener au $V(0^+)$ en posant $x = \frac{1}{t}$.
Alors $f(x) = g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,t} - \cos t}{1 - \sqrt{1 - t^2}}, \quad t \in V(0^+)$
g se présente sous la forme d'un quotient $g(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$, on pourra appliquer la règle des équivalents sur un quotient.

On va donc chercher un équivalent de $N(t)$ et un équivalent de $D(t)$ au $V(0^+)$.

$N(t)$ est sous la forme d'une somme ; comme on n'a pas de règle sur les sommes, on va passer par les d.l.

$$\mathrm{e}^{\,t} = 1 + t + t\varepsilon(t), \quad \cos t = 1 + t\varepsilon(t)$$

donc $N(t) = t + t\varepsilon(t)$.

Par suite

$$N(t) \underset{0^+}{\sim} t$$

Pour $D(t)$, on sait que $((1+x)^\alpha - 1) \underset{0}{\sim} \alpha x$

Par suite

$$g(t) \underset{0^+}{\sim} -\frac{t^2}{2}$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} g(t) = -\infty$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.12

Comme f est présentée sous la forme d’une somme, on va passer par des d.l. Pour gagner du temps, il faut essayer de trouver l’ordre minimum qui donnera un premier terme non nul. D’après le d.l. de ces fonctions, il semble que l’ordre 2 suffit.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{3}{8}(2x)^2 + x^2\varepsilon(x)$$

donc

$$f(x) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{0}{\sim} 2x^2$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2} = 2$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.13

On pose $x = \frac{1}{t}$ alors $t \in V(0)$ et $f(x) = g(t) = \frac{1}{t(1+\mathrm{e}^{t})} = \frac{h(t)}{t}$ où $h(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^{t}+1}$.

h admet un d.l. à l'ordre $n+1$ alors g admet un d.l. généralisé ou développement asymptotique à l'ordre n. On prend $n = 2$

$$h(t) = \frac{1}{2 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + t^2\varepsilon(t)$$

Le coefficient du terme t^2 est nul, si on veut avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote il faudra choisir $n = 3$.

$$h(t) = \frac{1}{2 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{t^3}{24} + t^3\varepsilon(t)$$

$$g(t) = \frac{1}{2t} - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{24} + t^2\varepsilon(t)$$

et

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

En conclusion, la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe au $V(\pm\infty)$.

$$f(x) - y = \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{24x^2} > 0$$

La courbe est au dessus de l'asymptote au $V(+\infty)$ et au $V(-\infty)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.14

On doit étudier f au $V(\pm\infty)$.

On pose $x = \frac{1}{t}$ alors $t \in V(0)$.

$$f(x) = g(t) = \frac{(1+2t)\sqrt{1-t^2}}{2t|t|} = \frac{(1+2t)\sqrt{1-t^2}}{2\alpha t^2}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \Longleftrightarrow t \in V(0^+) \Longleftrightarrow x \in V(+\infty) \\ \alpha &= -1 \Longleftrightarrow t \in V(0^-) \Longleftrightarrow x \in V(-\infty) \end{aligned}$$

$h(t) = (1+2t)\sqrt{1-t^2}$ a un d.l. en 0 à l'ordre $n+2$. Alors g a un d.l. généralisé ou développement asymptotique à l'ordre n au $V(0)$.

On prend $n = 3$.

$$\sqrt{1-t^2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon(t)$$

donc

$$h(t) = 1 + 2t - \frac{1}{2}t^2 - t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

Par suite
$$g(t) = \frac{1}{2\alpha t^2} + \frac{1}{\alpha t} - \frac{1}{4\alpha} - \frac{t}{2\alpha} + t\varepsilon(t)$$
et finalement
$$f(x) = \frac{x^2}{2\alpha} + \frac{x}{\alpha} - \frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{2\alpha x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$
En conclusion,

a) au $V(+\infty)$

La parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$
$$f(x) - y = -\frac{1}{2\alpha x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x} < 0$$
La courbe est en dessous de la parabole au $V(+\infty)$.

b) au $V(+\infty)$

La parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$
$$f(x) - y = \frac{1}{2\alpha x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x} < 0$$
La courbe est en dessous de la parabole au $V(-\infty)$.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.15

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{384}x^4+x^4\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.15

Composer le $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+u}$ avec le $DL_4(0)$ de $\sin x$ car $\sin 0 = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.16

$$1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+x^4\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.16

Si votre coefficient de x^4 est $\frac{1}{36}$, relisez dans le cours les règles pour calculer un d.l. en effectuant une division selon les puissances croissantes et essayez à nouveau.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice B.3.16

Le d.l. de $\sin x$ en 0 commence par x or pour effectuer la division selon les puissances croissantes, il faut que le terme au dénominateur ne s'annule pas. Il est donc nécessaire de simplifier par x avant d'effectuer la division selon les puissances croissantes.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice B.3.16

Pour que le d.l. soit juste jusqu'a l'ordre 4, il faut qu'au moment ou vous effectuez la division selon les puissances croissantes, le numérateur et le dénominateur soient à l'ordre 4. Bilan, il faut écrire le d.l. de $\sin x$ en 0 à l'ordre 5, simplifier par x et effectuer la division selon les puissances croissantes.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.17

$$\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.17

Votre d.l. commence par 1.

Que vaut $e^{\cos 0}$? Relire le cours sur la composition des d.l. et refaire les calculs.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice B.3.17

Soit $\cos x = P(x) + x^4\varepsilon_1(x)$.
Ecrire $e^{\cos x} = e^{1+\cos x - 1} = ee^{\cos x - 1}$ et poser $u = \cos x - 1$.
Cette fois, lorsque x est proche de 0, u est proche de 0.
Il suffit donc d'écrire le d.l. de e^{u} en 0 à l'ordre 4 : $\mathrm{e}^{u} = Q(u) + u^4\varepsilon_2(u)$, et on obtient le d.l. recherché en écrivant : $\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{\cos x - 1} = \mathrm{e}\,(Q(P(x) - 1)) + x^4\varepsilon_3(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.18

$$\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 - \frac{7\mathrm{e}}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.18

Vous avez utilisé le d.l. de $(1+x)^{\alpha}$. C'est faux, car α doit être indépendant de x. Il faut écrire la fonction sous forme exponentielle.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice B.3.18

Vous avez écrit la fonction sous forme exponentielle mais votre d.l. commence par 1, revoir l'exercice précédent.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice B.3.18

Vous avez écrit la fonction sous forme exponentielle mais le terme de degré 3 est faux. A quel ordre faut-il écrire le d.l. de $\ln(1 + x)$ pour que le d.l. recherché soit à l'ordre 3 ?

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.19

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} - \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^4}\varepsilon(\frac{1}{t}).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.19

Poser $x = \frac{1}{t}$ pour vous ramener en 0 et effectuer la division selon les puissances croissantes ou si $g(x) = f(\frac{1}{x})$, interpréter g comme le produit de deux fonctions dont vous multiplierez les d.l. en 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.20

$$1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.20

Poser $u = \frac{1}{x}$ pour vous ramener en 0 et si $g(u) = f(\frac{1}{u})$, écrire le d.l. de g à l'ordre 2.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.21

$$\sin x = \sin 2 + (x-2)\cos 2 - \frac{1}{2}(x-2)^2 \sin 2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 \cos 2 + (x-2)^3 \varepsilon(x-2).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.21

Utiliser la formule de Taylor Young.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.22

$$\frac{\ln x}{x} = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 - \frac{25}{12}(x-1)^4 + (x-1)^4\varepsilon(x-1).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.22

Poser $x = 1 + u$ pour vous ramener en 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.23

$$\frac{1}{m}$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.23

Poser $t = x - 1$ pour vous ramener en 0 et utiliser la feuille sur les équivalents.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.24

2

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.24

Poser $t = x - \frac{\pi}{2}$ et exprimer $\tan\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ en fonction de $\tan t$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.25

$$-\frac{1}{2}$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.25

Poser $t = \frac{1}{x}$ pour vous ramener en 0 et donner un équivalent de la fonction.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.26

$$e^{-\frac{1}{2}}$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.26

Ecrire la fonction sous forme exponentielle.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice B.3.26

Trouver $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice B.3.26

On rappelle que $\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} (\cos x - 1)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.27

$$e$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.27

Revoir les cas d'indétermination.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice B.3.27

Mettre sous forme exponentielle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice B.3.28

$$-\frac{e}{n}$$

On rappelle que l’équivalent d’une fonction ne peut jamais être 0 (sauf pour la fonction identiquement nulle).

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.28

Voir exercice B.3.18 des d.l..

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, question 1, Exercice B.3.29

$$g(x) = (\frac{1}{x} - 2 - x)e^x$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, question 2, Exercice B.3.29

$\alpha = 1.$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, question 3, Exercice B.3.29

$$xg(x) = 1 - x - \frac{5}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, question 4, Exercice B.3.29

L'equation de Δ est $y = t - 1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, question 4, Exercice B.3.29

On déduit de la question précédente que $f(t) = t - 1 - \frac{5}{2t} + \frac{1}{t}\varepsilon(\frac{1}{t})$.
Ainsi, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \{f(t) - (t-1)\} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} -\frac{5}{2t} = 0$. La droite Δ d'équation $y = t - 1$ est asymptote à la courbe. Comme $\{f(t) - (t-1)\} \underset{\pm\infty}{\sim} -\frac{5}{2t}$, on obtient en étudiant le signe de $-\frac{5}{2t}$ la position relative de la courbe et de son asymptote : au voisinage de $+\infty$, $-\frac{5}{2t}$ est négatif donc $f(t) - (t-1) \leq 0$ et la courbe est au-dessous de son asymptote, au voisinage de $-\infty$, $-\frac{5}{2t}$ est positif donc $f(t) - (t-1) \geq 0$ et la courbe est au-dessus de son asymptote.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.30

Posons $t = \frac{1}{x}$. On a $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{t}{1-t} = t(1+t+t\varepsilon(t)) = t+t^2+t^2\varepsilon(t)$.

$\frac{t}{1-t}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 donc on compose le d.l. de $\frac{t}{1-t}$ avec le d.l. de e^x en 0 :
$e^{\frac{t}{1+t}} = 1+(t+t^2)+\frac{(t+t^2)^2}{2}+t^2\varepsilon(t) = 1+t+t^2+\frac{1}{2}t^2+t^2\varepsilon(t) = 1+t+\frac{3}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)$.
Par suite $e^{\frac{1}{x-1}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$ et $(x-1)e^{\frac{1}{x-1}} = x+1+\frac{3}{2x}-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}) = x+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$.

L'asymptote à la courbe est donc la droite d'équation $y = x$ et leur position relative dépend du signe de $\frac{1}{2x}$. Ainsi, au voisinage de $+\infty$, $f(x)-x \geq 0$ et la courbe est au-dessus de son asymptote, au voisinage de $-\infty, f(x)-x \leq 0$ et la courbe est au-dessous de son asymptote.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.3.30

S'inspirer de l'exercice précédent. B.3.29

Retour à l'exercice ▲