# Analyse I

*Françoise Bernis*
*Fabrice Dodu*

FORMATION CONTINUE : DUT+3

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES : INSA TOULOUSE

*2001-2002*
*Version 1.0*

# Sommaire


**I Le cours** 1

**1 Fonctions réelles de la variable réelle** 5

1.1 Rappels . . . 6
1.1.1 Intervalle de $\mathbb{R}$ . . . 6
1.1.2 Voisinage de $x_0$ . . . 7
1.2 Généralités sur les fonctions . . . 8
1.2.1 Définition . . . 8
1.2.2 Graphe de $f$ . . . 9
1.2.3 Fonction monotone . . . 10
1.2.4 Fonction majorée-minorée-bornée . . . 11
1.2.5 Fonction paire, fonction impaire . . . 12
1.2.6 Fonction périodique . . . 13
1.2.7 Opérations sur les fonctions . . . 14
1.3 Limite . . . 15
1.3.1 Position du problème . . . 15
1.3.2 Limite de $f$ en un point . . . 16
1.3.3 Limite de $f$ en l'infini . . . 17
1.3.4 Limite à droite, limite à gauche . . . 18
1.3.5 Opérations sur les limites . . . 19
1.4 Continuité . . . 21
1.4.1 Continuité en un point . . . 21
1.4.2 Continuité sur un intervalle . . . 22
1.4.3 Opérations sur les fonctions continues . . . 23
1.4.4 Maximum-Minimum . . . 24
1.5 Fonction différentiable ou dérivable . . . 25
1.5.1 Définition du nombre dérivée . . . 25
1.5.2 Approximation au voisinage d'un point d'une fonction dérivable en ce point, par une fonction affine . . . 26
1.5.3 Différentielle en un point . . . 27

1.5.4 Opérations sur les dérivées . . . 28
1.5.5 Fonction dérivable sur un intervalle, Fonction de classe $n$ sur un intervalle . . 29
1.5.6 Tableau des dérivées . . . 30
1.6 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis . . . 31
1.7 Etude d'une fonction . . . 32

**2 Fonctions usuelles** **32**
2.1 Fonctions réciproques des fonctions circulaires . . . 33
2.1.1 Théorème . . . 33
2.1.2 Fonction Arcsinus . . . 34
2.1.3 Fonction Arccos . . . 36
2.1.4 Fonction Arctan . . . 38
2.2 Fonction logarithme, exponentielle et puissance . . . 40
2.2.1 Fonction logarithme . . . 40
2.2.2 Fonction exponentielle . . . 42
2.2.3 Fonction puissance . . . 44
2.2.4 Comparaisons fonctions logarithme, puissance et exponentielle . . . 45
2.3 Fonctions hyperboliques . . . 46
2.3.1 Fonction sinus hyperbolique . . . 46
2.3.2 Fonction cosinus hyperbolique . . . 47
2.3.3 Fonction tangente hyperbolique . . . 49
2.3.4 Formules hyperboliques . . . 50
2.4 Fonctions réciproques de fonctions hyperboliques . . . 51
2.4.1 Fonction argument sinus hyperbolique . . . 51
2.4.2 Fonction argument cosinus hyperbolique . . . 53
2.4.3 Fonction argument tangente hyperbolique . . . 55

**3 Calcul de limite** **57**
3.1 Formules de Taylor . . . 58
3.1.1 Formule de Taylor Lagrange . . . 58
3.1.2 Formule de Taylor-Young . . . 59
3.2 Développements limité . . . 60
3.2.1 Définition . . . 60
3.2.2 Propriétés . . . 61
3.2.3 Développements limités au V(0) de fonctions usuelles . . . 63
3.2.4 Règles de Calcul . . . 64
3.2.5 Développements limités pour $x_0 \neq 0$. . . . 66
3.2.6 Développements limités généralisés ou asymptotiques . . . 67
3.2.7 Etude des branches infinies d'une courbe . . . 68

3.3 Fonctions équivalentes au voisinage d'un point . . . 69
3.3.1 Définitions . . . 69
3.3.2 Propriétés . . . 71
3.3.3 Pièges avec les équivalents . . . 73
3.3.4 Cas particulier . . . 74
3.3.5 Equivalents de fonctions usuelles . . . 75
3.3.6 Applications . . . 76
3.4 Exercices bilan . . . 77
3.4.1 Exercices bilan : d.l. . . . 77
3.4.2 Exercices bilan : équivalent . . . 78

**II Les annexes 79**

**A Les exemples 81**
A.1 Exemples du chapitre 1 . . . 83
A.1.1 Voisinage d'un point . . . 83
A.1.2 Fonctions réelles . . . 83
A.1.3 Domaine de définition . . . 83
A.1.4 Fonction strictement croissante . . . 83
A.1.5 Fonction bornée . . . 83
A.1.6 Fonction minorée . . . 83
A.1.7 Parité . . . 83
A.1.8 Périodicité . . . 84
A.1.9 Limites de fonctions . . . 84
A.1.10 Limites . . . 84
A.1.11 Limites . . . 84
A.1.12 Limites . . . 84
A.1.13 Continuité . . . 84
A.1.14 Continuité à droite . . . 85
A.1.15 Fonctions continues . . . 85
A.1.16 Maximum, minimum . . . 85
A.1.17 Maximum, minimum . . . 85
A.1.18 Taux d'accroissement . . . 85
A.1.19 Tangente à une courbe . . . 86
A.1.20 Différentielle d'une fonction . . . 86
A.1.21 Fonction de classe $\mathcal{C}^n$ . . . 86
A.2 Exemples du chapitre 2 . . . 87
A.2.1 Réciproque d'une fonction . . . 87

A.2.2 Comparaison de fonction . . . . . 87
A.2.3 Comparaison de fonction . . . . . 87
A.3 Exemples du chapitre 3 . . . . . 89
A.3.1 Formule de Taylor-Lagrange . . . . . 89
A.3.2 Formule de Mac-Laurin Lagrange . . . . . 89
A.3.3 Approximation de e . . . . . 89
A.3.4 Formule de Mac-Laurin Young . . . . . 90
A.3.5 Formule de Mac-Laurin Young . . . . . 90
A.3.6 D.l . . . . . 90
A.3.7 d.l. . . . . . 90
A.3.8 d.l. et primitive . . . . . 91
A.3.9 Addition de d.l. . . . . . 91
A.3.10 Produit de d.l. . . . . . 91
A.3.11 Composition de d.l. . . . . . 91
A.3.12 Quotient de d.l. . . . . . 92
A.3.13 Quotient de d.l. . . . . . 92
A.3.14 D.l. en un point non nul . . . . . 93
A.3.15 D.l. à l'infini . . . . . 93
A.3.16 D.l généralisé . . . . . 94
A.3.17 D.l. généralisé . . . . . 94
A.3.18 Asymptote . . . . . 94
A.3.19 Equivalent . . . . . 95
A.3.20 Opérations sur les équivalents . . . . . 95
A.3.21 Opérations sur les équivalents . . . . . 96
A.3.22 Somme de deux équivalents . . . . . 96
A.3.23 Composition de deux équivalents . . . . . 97
A.3.24 Fonctions négligeables . . . . . 97
A.3.25 Equivalent . . . . . 97

**B Les exercices** **99**
B.1 Exercices du chapitre 1 . . . . . 101
B.1.1 Graphes de fonctions . . . . . 101
B.1.2 Fonctions monotones . . . . . 101
B.1.3 Périodicité . . . . . 101
B.1.4 Opération sur des fonctions . . . . . 101
B.1.5 Calcul de dérivées . . . . . 102
B.1.6 Calcul de dérivées . . . . . 102
B.1.7 Calcul de dérivées . . . . . 102
B.1.8 Calcul de dérivées . . . . . 102

B.1.9 Calcul de dérivées . . . 102
B.1.10 Calcul de dérivées . . . 102
B.2 Exercices du chapitre 2 . . . 103
B.2.1 Simplification Arcsinus . . . 103
B.2.2 Simplification Arcsinus . . . 103
B.2.3 Simplification Arccos . . . 103
B.2.4 Simplification Arctan . . . 103
B.2.5 Simplification Arctan . . . 103
B.2.6 Logarithme . . . 104
B.2.7 Equation logarithmique . . . 104
B.2.8 Dérivée de fonction logarithmique . . . 104
B.2.9 Equation exponentielle . . . 104
B.2.10 Inéquation exponentielle . . . 104
B.2.11 Dérivée sous forme d'exponentielle . . . 104
B.2.12 Equation hyperbolique . . . 104
B.2.13 Equation hyperbolique . . . 105
B.3 Exercices du chapitre 3 . . . 106
B.3.1 Produit de d.l. . . . 106
B.3.2 D.l en un point non nul . . . 106
B.3.3 D.l en un point non nul . . . 106
B.3.4 Asymptote . . . 106
B.3.5 Asymptote . . . 106
B.3.6 Equivalent . . . 106
B.3.7 Equivalent . . . 106
B.3.8 Equivalent . . . 107
B.3.9 Equivalent . . . 107
B.3.10 Calcul de limite . . . 107
B.3.11 Calcul de limite . . . 107
B.3.12 Calcul d'équivalent . . . 107
B.3.13 Asymptote à une courbe . . . 108
B.3.14 Asymptote à une courbe . . . 108
B.3.15 Exo bilan . . . 108
B.3.16 Exo bilan . . . 108
B.3.17 Exo bilan . . . 108
B.3.18 Exo bilan . . . 108
B.3.19 Exo bilan . . . 108
B.3.20 Exo bilan . . . 109
B.3.21 Exo bilan . . . 109
B.3.22 Exo bilan . . . 109

B.3.23 Exo bilan . . . . . . . . . . 109
B.3.24 Exo bilan . . . . . . . . . . 109
B.3.25 Exo bilan . . . . . . . . . . 109
B.3.26 Exo bilan . . . . . . . . . . 109
B.3.27 Exo bilan . . . . . . . . . . 109
B.3.28 Exo bilan . . . . . . . . . . 109
B.3.29 Exo bilan . . . . . . . . . . 110
B.3.30 Exo bilan . . . . . . . . . . 110

**C Les documents** **111**
C.1 Documents du chapitre 2 . . . . . . . . . . 112
C.1.1 Démonstration des fonctions comparées . . . . . . . . . . 112
C.1.2 Formule hyperbolique . . . . . . . . . . 112
C.1.3 Expression de Argsh en fonction du logarithme . . . . . . . . . . 113
C.1.4 Expression de Argch en fonction du logarithme . . . . . . . . . . 113
C.1.5 Expression de Argth en fonction du logarithme . . . . . . . . . . 113
C.2 Documents du chapitre 3 . . . . . . . . . . 115
C.2.1 Quotient de d.l. . . . . . . . . . . 115
C.2.2 Démonstration sur la composition des équivalents particuliers . . . . . . . . . . 115

# Première partie

# Le cours

Ce cours est dispensé à l'INSA–Toulouse pour la Formation Continue DUT+3. Nous remercions aimablement Mme Sandrine Scott pour ces exercices bilan.

# 1 Fonctions réelles de la variable réelle


1.1 Rappels . . . 6
1.2 Généralités sur les fonctions . . . 8
1.3 Limite . . . 15
1.4 Continuité . . . 21
1.5 Fonction différentiable ou dérivable . . . 25
1.6 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis . . . 31

## 1.1 Rappels

**Intervalle de $\mathbb{R}$**

notion clé :
*Intervalle, segment*

**Définition 1.1**

*On appelle intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$ ou segment de $\mathbb{R}$ l'ensemble*

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}\,.$$

On distingue dans $\mathbb{R}$ plusieurs types d'intervalles :

i) *Intervalle ouvert borné :*
$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

ii) *Intervalle ouvert non borné :*
$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$ $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$.
$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$ $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.

iii) *Intervalle fermé non borné :*
$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$ $a \in \mathbb{R}$.
$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}$ $a \in \mathbb{R}$.

iv) *Intervalle semi-ouvert borné :*
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a < b\}$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a \leq b\}$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

**Voisinage de $x_0$**

*Exemples* :
exemple A.1.1

notion clé :
*Voisinage*

**Définition 1.2**

*i)* $x_0$ *est un réel.*
*On dit que* $V(x_0)$, *sous-ensemble de* $\mathbb{R}$, *est un voisinage de* $x_0$ *s'il existe un intervalle* $]a, b[$ *tel* $x_0 \in ]a, b[$ *et* $]a, b[ \subset V(x_0)$.
*Dans la pratique, on prendra :* $V(x_0) = ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$.

*ii)* $x_0 = +\infty$.
*On dit que* $V(+\infty)$, *sous-ensemble de* $\mathbb{R}$, *est un voisinage de* $+\infty$ *s'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel* $]a, +\infty[ \subset V(+\infty)$.
*Dans la pratique, on prendra :* $V(+\infty) = ]a, +\infty[$.

*iii)* $x_0 = -\infty$.
*On dit que* $V(-\infty)$, *sous-ensemble de* $\mathbb{R}$, *est un voisinage de* $-\infty$ *s'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel* $] - \infty, a[ \subset V(-\infty)$.
*Dans la pratique, on prendra :* $V(-\infty) = ] - \infty, a[$.

## 1.2 Généralités sur les fonctions

**Définition**

notion clé :
*Fonction*

*Exemples* :
exemple A.1.2
exemple A.1.3

**Définition 1.3**

*On appelle fonction réelle de la variable réelle toute relation qui à une valeur réelle $x$, appelée variable, associe au plus un réel $y$ appelé image.*

*On désigne la fonction par une lettre $f,\ g,\ h, \ldots$.*

*Le sous-ensemble $D$ des réels pour lequel $y = f(x)$ existe s'appelle le domaine de définition de $f$.*

**Graphe de $f$**

*Exercices* :
exercice B.1.1

notion clé :
*Graphe*

**Définition 1.4**

*Le graphe de $f$ est l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x, f(x))$ dans un repère donné que l'on aura choisi, sauf avis contraire, orthonormé.*

**Fonction monotone**

*Exemples* :
exemple A.1.4

notion clé :
*Monotone*

**Définition 1.5**

*i) $f$ définie sur $D$ est monotone croissante sur $D$ si :*

$$\forall (x,x') \in D, \quad (x > x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')).$$

*ii) $f$ définie sur $D$ est monotone strictement croissante sur $D$ si :*

$$\forall (x,x') \in D, \quad (x > x' \Rightarrow f(x) > f(x')).$$

*iii) $f$ définie sur $D$ est monotone décroissante sur $D$ si :*

$$\forall (x,x') \in D, \quad (x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')).$$

*iv) $f$ définie sur $D$ est monotone strictement décroissante sur $D$ si :*

$$\forall (x,x') \in D, \quad (x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')).$$

**Fonction majorée-minorée-bornée**

*Exemples* :
exemple A.1.5
exemple A.1.6

notion clé :
*Majorée, minorée, bornée*

**Définition 1.6**

$$
\begin{aligned}
f \text{ est majorée sur } D &\iff \left(\exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D,\ f(x) \leq A\right). \\
f \text{ est minorée sur } D &\iff \left(\exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D,\ f(x) \geq A\right). \\
f \text{ est bornée sur } D &\iff \left(\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in D,\ A \leq f(x) \leq B\right). \\
&\iff \left(\exists C \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D,\ |f(x)| \leq C\right).
\end{aligned}
$$

**Remarque 1.1**

*$f$ est dite positive sur $D$ si :* $\forall x \in D,\ f(x) \geq 0$.

*$f$ est dite négative sur $D$ si :* $\forall x \in D,\ f(x) \leq 0$.

**Fonction paire, fonction impaire**

*Exemples* :
exemple A.1.7

*Exercices* :
exercice B.1.2

notion clé :
*Parité*

**Définition 1.7**

*Soit $f$ définie sur $D$ tel que $O$ soit centre de symétrie pour $D$. Alors*

$$\begin{array}{rcl} f \text{ paire} & \Longleftrightarrow & (\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)) \, . \\ f \text{ impaire} & \Longleftrightarrow & (\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)) \, . \end{array}$$

**Remarque 1.2**

*Le graphe d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.*

*Le graphe d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme centre de symétrie.*

**Fonction périodique**

*Exemples* :
exemple A.1.8

*Exercices* :
exercice B.1.3

notion clé :
*Périodicité*

**Définition 1.8**

*$f$ est dite périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

*On appelle période le plus petit $T > 0$.*

**Opérations sur les fonctions**

*Exercices* :
exercice B.1.4

notion clé :
*Composition*

**Propriétés 1.1**

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{aligned} h = f + g &\iff (\forall x \in D,\ h(x) = f(x) + g(x)) . \\ k = f \times g &\iff (\forall x \in D,\ k(x) = f(x)g(x)) . \\ m = \lambda f &\iff (\forall x \in D,\ m(x) = \lambda f(x)) . \end{aligned}$$

**Remarque 1.3**

*L'ensemble des fonctions définies sur $D$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

**Propriétés 1.2**

*Si $f$ est définie sur $D$ et si $g$ est définie sur $D'$ tel que $f(D) \subset D'$ alors*

$$s = g \circ f \iff (\forall x \in D,\ s(x) = g(f(x))) .$$

## 1.3 Limite

**Position du problème**

*Exemples* :
exemple A.1.9

notion clé :
*Limite*

$x_0$ est un réel ou $\pm\infty$.

On cherchera la limite $\ell$ d'une fonction au point $x_0$ quand on voudra étudier le comportement de la fonction au $V(x_0)$ ($x \neq x_0$).

C'est une étude locale.

C'est un problème que l'on posera souvent quand $f$ est définie dans un $V(x_0)$ sauf peut-être en $x_0$.

On n'aura pas toujours une limite : $x \longrightarrow \sin(x)$ n'a pas de limite en $x_0 = +\infty$.

Si il y a une limite $\ell$ alors $\ell$ sera soit un nombre réel, soit $\pm\infty$.

On dira que la *limite est finie* si $\ell$ est un réel.

On dira que la *limite est infinie* si $\ell$ est égale à $+\infty$ ou $-\infty$.

On notera $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\rightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

**Limite de $f$ en un point**

notion clé :
*Limite en un point*

**Définition 1.9 (Limite de $f$ quand $x \to x_0 \in \mathbb{R}$)**

*i)* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in V(x_0) - \{x_0\}, \quad (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\Big).$$

*ii)* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in V(x_0) - \{x_0\}, \quad (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - a| > A)\Big).$$

*iii)* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in V(x_0) - \{x_0\}, \quad (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - a| < -A)\Big).$$

**Limite de $f$ en l'infini**

notion clé :
*Limite en l'infini*

**Définition 1.10 (Limite de $f$ quand $x \to \pm\infty$)**

*i)* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$
$$\iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in V(+\infty), \quad (x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\Big).$$

*ii)* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in V(+\infty), \quad (x > B \Rightarrow f(x) > A)\Big).$$

*iii)* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in V(+\infty), \quad (x > B \Rightarrow f(x) < -A)\Big).$$

*iv)* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$
$$\iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in V(-\infty), \quad (x < -A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\Big).$$

*v)* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in V(-\infty), \quad (x < -B \Rightarrow f(x) > A)\Big).$$

*vi)* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
$$\iff \Big(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in V(-\infty), \quad (x < -B \Rightarrow f(x) < -A)\Big).$$

**Limite à droite, limite à gauche**

*Exemples* :
exemple A.1.10
exemple A.1.11
exemple A.1.12

notion clé :
*Limite à droite, à gauche*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$x \to x_0^+ \Longleftrightarrow (x \to x_0 \text{ et } x > x_0)$.

$x \to x_0^- \Longleftrightarrow (x \to x_0 \text{ et } x < x_0)$.

**Définition 1.11**

*$f$ a une limite finie à droite en $x_0$ ssi $\exists a' \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a'$.*

*$f$ a une limite finie à gauche en $x_0$ ssi $\exists a'' \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a''$.*

*$f$ a une limite infinie à droite en $x_0$ ssi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.*

*$f$ a une limite infinie à gauche en $x_0$ ssi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.*

**Théorème 1.1**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Longleftrightarrow \left( \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \right)$$

**Opérations sur les limites**

notion clé : *Opérations sue les limites*

$f$, $g$ et $h$ sont des fonctions définies au $V(a)$ sauf peut-être au point $a$.

**Propriétés 1.3**

*i) Addition.*

$$\begin{array}{lll}
\left(\lim\limits_a f \in \mathbb{R} \textit{ et } \lim\limits_a g \in \mathbb{R}\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \textit{ et } \lim\limits_a g \in \mathbb{R}\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = +\infty \textit{ et } \lim\limits_a g = +\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f+g) = +\infty. \\
\left(\lim\limits_a f = -\infty \textit{ et } \lim\limits_a g = -\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f+g) = -\infty. \\
\left(\lim\limits_a f = +\infty \textit{ et } \lim\limits_a g = -\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f+g) = ???.
\end{array}$$

*Formes indéterminées :* $\lim\limits_a f = +\infty$ *et* $\lim\limits_a g = -\infty$.

*ii) Multiplication.*

$$\begin{array}{lll}
\left(\lim\limits_a f \in \mathbb{R} \textit{ et } \lim\limits_a g \in \mathbb{R}\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f\,g) = \lim\limits_a f \times \lim\limits_a g. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \textit{ et } \lim\limits_a g \in \mathbb{R}_+^*\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = \lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = +\infty \textit{ et } \lim\limits_a g \in \mathbb{R}_-^*\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = -\lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = +\infty \textit{ et } \lim\limits_a g = +\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = +\infty. \\
\left(\lim\limits_a f = -\infty \textit{ et } \lim\limits_a g = -\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = +\infty. \\
\left(\lim\limits_a f = +\infty \textit{ et } \lim\limits_a g = -\infty\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = -\infty. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \textit{ et } \lim\limits_a g = 0\right) & \Longrightarrow & \lim\limits_a (f \times g) = ???.
\end{array}$$

*Formes indéterminées :* $\lim\limits_a f = \pm\infty$ *et* $\lim\limits_a g = 0$.

*iii) Multiplication par un scalaire.*

*Soit* $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_a f \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & \lim\limits_a \lambda f = \lambda \lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \textit{ et } \lambda > 0\right) & \Longrightarrow & (\lim\limits_a \lambda f) = \lim\limits_a f. \\
\left(\lim\limits_a f = \pm\infty \textit{ et } \lambda < 0\right) & \Longrightarrow & (\lim\limits_a \lambda f) = -\lim\limits_a f.
\end{array}$$

*iv) Inverse.*

*On suppose que* $0 \notin f\,(V(0))$.

$$\begin{array}{lcl}
\lim\limits_{a} f = b \in \mathbb{R}^* & \Longrightarrow & \lim\limits_{a} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{b}. \\
\lim\limits_{a} f = \pm\infty & \Longrightarrow & \lim\limits_{a} \dfrac{1}{f} = 0. \\
\left( \lim\limits_{a} f = 0 \textit{ et } \forall x \in V(a),\ f(x) > 0 \right) & \Longrightarrow & (\lim\limits_{a} \dfrac{1}{f}) = +\infty. \\
\left( \lim\limits_{a} f = 0 \textit{ et } \forall x \in V(a),\ f(x) < 0 \right) & \Longrightarrow & (\lim\limits_{a} \dfrac{1}{f}) = -\infty.
\end{array}$$

**Propriétés 1.4 (Comparaison)**

*i) Si* $\forall x \in V(x_0) - \{x_0\},\ f(x) \leq g(x)$ *alors :*

$$\begin{array}{lcl}
\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty & \Longrightarrow & \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty. \\
\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty & \Longrightarrow & \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty.
\end{array}$$

*ii) Si* $\forall x \in V(x_0) - \{x_0\},\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *alors :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = b \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = b.$$

## 1.4 Continuité

**Continuité en un point**

notion clé :
*Continuité en un point*

*Exemples* :
exemple A.1.13
exemple A.1.14

**Définition 1.12 (Continuité)**

*$f$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si $f$ a une limite finie en $a$ égale à $f(a)$ c'est-à-dire :* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

**Définition 1.13 (Continuité à droite)**

*$f$ est continue à droite en $a \in \mathbb{R}$ si* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

**Définition 1.14 (Continuité à gauche)**

*$f$ est continue à gauche en $a \in \mathbb{R}$ si* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

**Continuité sur un intervalle**

*Exemples* :
exemple A.1.15

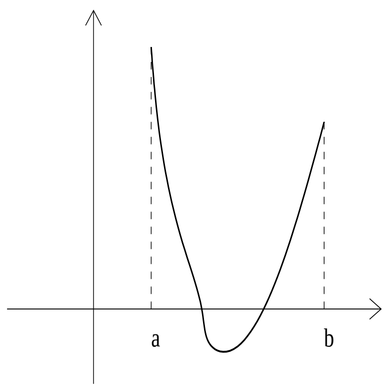
notion clé :
*Continuité sur un intervalle*

**Définition 1.15**

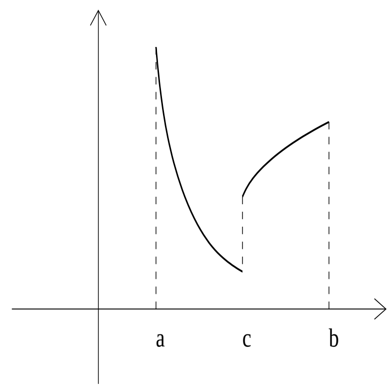
*$f$ est continue sur un intervalle $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$.*

**Remarque 1.4** *$f$ continue sur $[a,b]$ signifie que $f$ est continue en tout point de $]a,b[$ et que $f$ est continue à droite au point $a$ et à gauche au point $b$.*

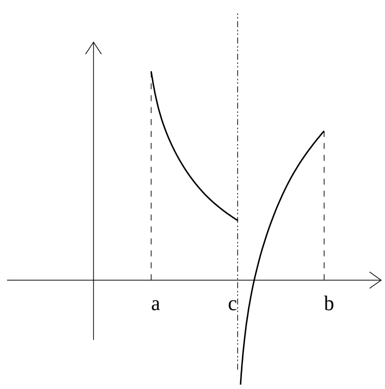
Soit $f$ continue sur $[a,b]$. Posons $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$ alors on “trace la courbe représentant $f$ sur $[a,b]$ en allant de $A$ à $B$ sans lever le crayon”.




$f$ est continue sur $[a,b]$.




$f$ n’est pas continue au point $c$
: $f$ est continue par morceau sur $[a,b]$.




$f$ n’est pas continue sur $[a,b]$.

**Opérations sur les fonctions continues**

notion clé :
*Opérations sur les fonctions continues*

**Propriétés 1.5**

*i) Si $f$ et $g$ sont continues au point $a$, il en est de même de :*

$$f+g, \quad \lambda f, \quad f\times g, \quad \frac{f}{g} \text{ si } g(a)\neq 0.$$

*ii) Si $f$ est continue au point $a$ et si $g$ est continue au point $b=f(a)$ alors $g\circ f$ est continue au point $a$.*

**Maximum-Minimum**

*Exemples* :
exemple A.1.16
exemple A.1.17

notion clé :
*Maximum-Minimum*

**Théorème 1.2**

*Toute fonction continue sur $[a,b]$ admet un maximum $M$ et un minimum $m$, c'est-à-dire il existe $c_1 \in [a,b]$ et $c_2 \in [a,b]$ tel que $M = f(c_1)$ et $m = f(c_2)$.*

*De plus, $f([a,b]) = [m,M]$.*

**Remarque 1.5** *On remarquera que l'intervalle est fermé et borné. $c_1$ et $c_2$ ne sont pas nécessairement uniques.*

## 1.5 Fonction différentiable ou dérivable

**Définition du nombre dérivée**

*Exemples* :
exemple A.1.18

notion clé :
*Dérivée*

**Définition 1.16**

*Soit $f$ une fonction définie dans un voisinage de $x_0$.*
*On pose $\tau_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.*
*$\tau_{x_0}$ est la fonction taux d'accroissement de $f$ au point $x_0$.*

*Si $\tau_{x_0}$ a une limite finie $c$ quand $h \to 0$, on dit que $f$ est dérivable au point $x_0$ et $c$ s'appelle le nombre dérivée au point $x_0$ et on note $c = f'(x_0)$.*

$$
\begin{array}{lcl}
f \text{ est dérivable au point } x_0 & \Longleftrightarrow & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} c = f'(x_0). \\
f \text{ est dérivable à droite au point } x_0 & \Longleftrightarrow & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} c = f'_d(x_0). \\
f \text{ est dérivable à gauche au point } x_0 & \Longleftrightarrow & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0^-}{\longrightarrow} c = f'_g(x_0) \\
f \text{ est dérivable au point } x_0 & \Longleftrightarrow & f'_g(x_0) = f'_d(x_0)
\end{array}
$$

**Approximation au voisinage d'un point d'une fonction dérivable en ce point, par une fonction affine**

*Exemples* :
exemple A.1.19

La définition de la dérivée au point $x_0$ est équivalente :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

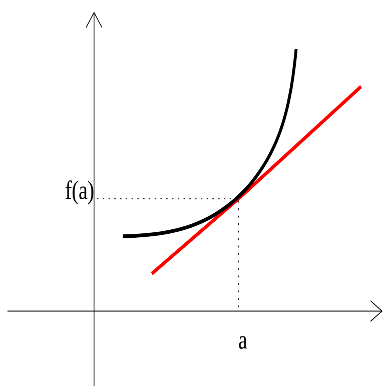
notion clé :
*Tangente à une courbe*

En posant $x = x_0 + h$, on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \text{ où } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0.$$

La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ est une approximation locale en $x_0$ de $f$. Donc $f$ est approchée par cette fonction affine au voisinage de $x_0$.

Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ .




Tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.

**Différentielle en un point**

*Exemples* :
exemple A.1.20

notion clé :
*Différentielle*

Quand on fait subir une variation à $x$ autour de $x_0$ c'est-à-dire $x_0$ subit une variation de $h$ alors $f(x_0)$ subit une variation de $f(x_0+h)-f(x_0)$.

On prend comme approximation de cette variation $f'(x_0)h$ pour tout $h$ petit (c'est ce que l'on fait souvent en physique).

On a négligé le terme en $\varepsilon$ (voir 1.5.2).

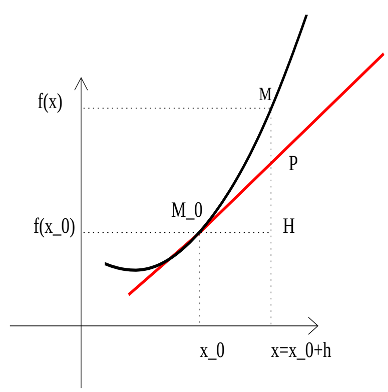
On note $dx(h)=h$, par suite $df_{x_0}=f'(x_0)dx$ : c'est la différentielle de $f$ en $x_0$.

On fait ceci pour tout $x_0 \in I$ où $f$ est dérivable et on écrit

$$df = f'(x)dx.$$

**Interprétation graphique**

$$\begin{array}{lcl} f(x_0+h)-f(x_0) & = & \overline{HM} \\ df_{x_0}(h) & = & \overline{HP} \\ \overline{HM}-\overline{HP}=\overline{PM} & = & h\varepsilon(h) \end{array}$$



**Opérations sur les dérivées**

notion clé : *Opérations sur les dérivées*

**Propriétés 1.6**

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables au point $x_0$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*
*i)* $f+g$ *est dérivable au point* $x_0$ *:* $(f+g)' = f' + g'$.
*ii)* $\lambda f$ *est dérivable au point* $x_0$ *:* $(\lambda f)' = \lambda f'$.
*iii)* $f \times g$ *est dérivable au point* $x_0$ *:* $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
*iv)* $\dfrac{f}{g}$ *est dérivable au point* $x_0$ *si* $g(x_0) \neq 0$ *:* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

**Propriétés 1.7**

*Si $f$ est dérivable au point $x_0$ et si $g$ est dérivable au point $f(x_0)$. Alors, on a :* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

**Fonction dérivable sur un intervalle, Fonction de classe $n$ sur un intervalle**

notion clé :
*Classe $\mathcal{C}^n$*

*Exemples* :
exemple A.1.21

**Définition 1.17**

*$f$ est dérivable sur $I$ si $f$ est dérivable en tout point de $I$.*

*$f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ si $f$ admet $n$ dérivées successives sur $I$ et de plus $f^{(n)}$ est continue sur $I$.*

*$f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ si $f$ est indéfiniment dérivable sur $I$.*

**Remarque 1.6** *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

**Tableau des dérivées**

notion clé :
*Tableau des dérivées*

*Exercices* :
exercice B.1.5
exercice B.1.6
exercice B.1.7
exercice B.1.8
exercice B.1.9
exercice B.1.10

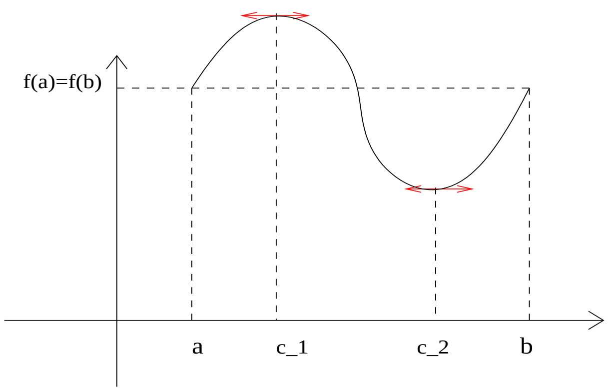
On dérive par rapport à la variable $x$ réelle.
$u$ et $v$ désignent des fonctions de $x$ dérivables sur un intervalle.
$u'$ et $v'$ désignent les fonctions dérivées respectives : $u' = \dfrac{du}{dx}$ et $v' = \dfrac{dv}{dx}$.
$a$ désigne une constante réelle.

| | | |
|---|---|---|
| $(u+v)' = u' + v'$ | $(a\,u)' = a\,u'$ | $(uv)' = u'v + uv'$ |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ | $(u \circ v)' = u'(v)\,v'$ | $u = cte \Rightarrow u' = 0$ |
| $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ | $(\sin(x))' = \cos(x)$ | $(\cos(x))' = -\sin(x)$ |
| $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ | $(\mathrm{ch}\,(x))' = \mathrm{sh}\,(x)$ | $(\mathrm{sh}\,(x))' = \mathrm{ch}\,(x)$ |
| $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ | $(\mathrm{Arcsin}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\mathrm{Arccos}\,(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\mathrm{Arctan}\,(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ | $(\mathrm{Argth}\,(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ | $(\mathrm{Argsh}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $(\mathrm{Argch}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $(\mathrm{th}\,(x))' = 1 - \mathrm{th}^{\,2}(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^{\,2}(x)}$ | |

## 1.6 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

**Théorème 1.3 (Rolle)**

$$\left.\begin{array}{c} f \textit{ continue sur } [a,b] \\ f \textit{ dérivable sur } ]a,b[ \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in ]a,b[ \mid f'(c)=0.$$

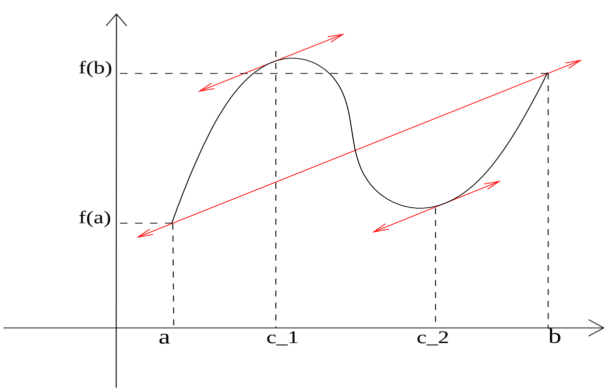



$f'(c_1) = f'(c_2) = 0.$

**Remarque 1.7** *Si $f$ désigne un mouvement rectiligne, le théorème signifie que si $f$ est continue et dérivable entre le temps $a$ et le temps $b$ ($b > a$) et si on se situe au même lieu au temps $a$ et au temps $b$ alors à un moment donné à un instant $c$ ($a < c < b$) du parcours, la vitesse est nulle.*

**Théorème 1.4 (Accroissements finies)**

$$\left.\begin{array}{c} f \textit{ continue sur } [a,b] \\ f \textit{ dérivable sur } ]a,b[ \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in ]a,b[ \mid f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$



**Remarque 1.8** *Si $f$ désigne un mouvement rectiligne, le théorème signifie que si $f$ est continue et dérivable entre le temps $a$ et le temps $b$ ($b > a =$) alors il existe un instant $c$ ($a < c < b$) du parcours où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne entre $a$ et $b$.*

## 1.7 Etude d'une fonction

On détermine :
i) $D$ domaine de définition de la fonction.

ii) $D'$ domaine de continuité de la fonction.

iii) Les propriétés particulières de la fonction (paire, impaire, périodique).

iv) $D''$ domaine de définition de la dérivée.

On étudie les variations de $f$ sur les intervalles $I$ de continuité de $f$ :
i) si $f' > 0$ sur $I$ alors $f$ est strictement croissante sur $I$.

ii) si $f' < 0$ sur $I$ alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

Si la dérivée s'annule en un point $x_0$ intérieur à l'intervalle $I$ en changeant de signe alors $f$ admet un extremum local en ce point.

Quand $f'(x_0) = 0$, la tangente à la courbe au point $(x_0, f(x_0))$ est horizontale.
Quand $\tau_{x_0}(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \pm \infty$, la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est verticale.
On recherche ensuite les asymptotes à la courbe (voir 3.2).

# 2 Fonctions usuelles


| | | |
|---|---|---|
| 1.7 | Etude d'une fonction | 32 |
| 2.1 | Fonctions réciproques des fonctions circulaires | 33 |
| 2.2 | Fonction logarithme, exponentielle et puissance | 40 |
| 2.3 | Fonctions hyperboliques | 46 |
| 2.4 | Fonctions réciproques de fonctions hyperboliques | 51 |

# 2.1 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

**Théorème**

notion clé :
*Réciproque*

*Exemples* :
exemple A.2.1

**Théorème 2.1**

*Toute fonction $f$ continue et strictement croissante sur un intervalle $I$ admet une fonction $g$ continue et strictement croissante sur $f(I)$.*

*Toute fonction $f$ continue et strictement décroissante sur un intervalle $I$ admet une fonction $g$ continue et strictement décroissante sur $f(I)$.*

*On dit que $g$ est la fonction réciproque de $f$.*

*La courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

**Fonction Arcsinus**

notion clé :
*Arcsin*

*Exercices* :
exercice B.2.1
exercice B.2.2

**Définition 2.1**

*Soit $f$ la restriction de la fonction* $\sin$ *à l'intervalle* $I = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

*Soit* $J = f(I) = [-1, 1]$.

*On a : $f$ continue et strictement croissante sur un intervalle $I$.*

*Alors $f$ admet une fonction $g$ réciproque continue et strictement croissante sur $J$.*

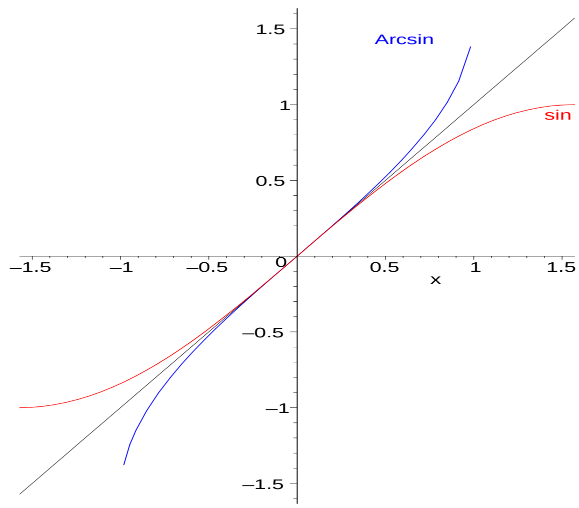
*On appelle $g$ Arcsinus et on note* $g = \text{Arcsin}$.

$$y = \text{Arcsin}\,(x) \Longleftrightarrow \left(x = \sin(y) \text{ et } y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$$

$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (\text{Arcsin}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Arcsin *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1, 1[$ *et de classe* $\mathcal{C}^0$ *sur* $[-1, 1]$.

Arcsin *est impaire.*




$\operatorname{Arcsin}(0) = 0,\ \operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\ \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\ \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},\ \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}.$

**Fonction Arccos**

*Exercices* :
exercice B.2.3

notion clé :
*Arccos*

**Définition 2.2**

*Soit $f$ la restriction de la fonction $\cos$ à l'intervalle $I = [0, \pi]$.*
*Soit $J = f(I) = [-1, 1]$.*

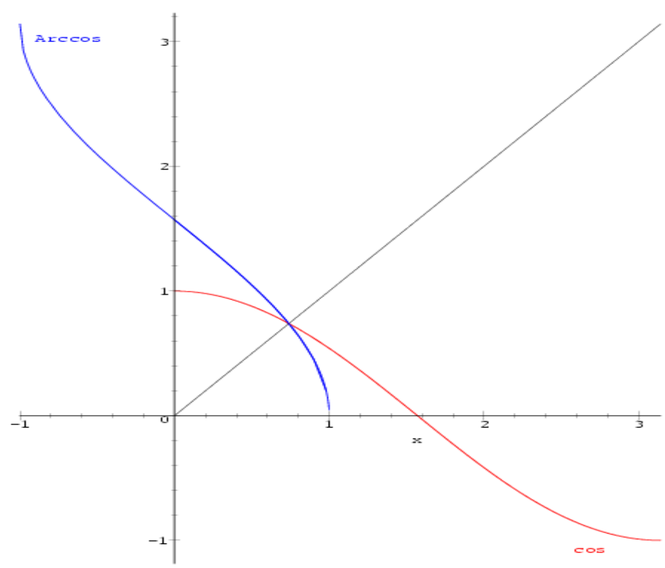
*On a : $f$ continue et strictement décroissante sur un intervalle $I$.*
*Alors $f$ admet une fonction $g$ réciproque continue et strictement décroissante sur $J$.*

*On appelle $g$ Arccosinus et on note $g = \mathrm{Arccos}$.*

$$y = \mathrm{Arccos}\,(x) \iff (x = \cos(y) \text{ et } y \in [0, \pi])$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad (\mathrm{Arccos}\,(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Arccos *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[-1, 1]$.*



Arccos $(1) = 0$, Arccos $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, Arccos $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, Arccos $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, Arccos $(0) = \frac{\pi}{2}$.

**Fonction Arctan**

*Exercices* :
exercice B.2.4
exercice B.2.5

notion clé :
*Arctan*

**Définition 2.3**

*Soit $f$ la restriction de la fonction* $\tan$ *à l'intervalle* $I = ]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

*Soit* $J = f(I) = \mathbb{R}$.

*On a : $f$ continue et strictement croissante sur un intervalle $I$.*

*Alors $f$ admet une fonction $g$ réciproque continue et strictement croissante sur $J$.*

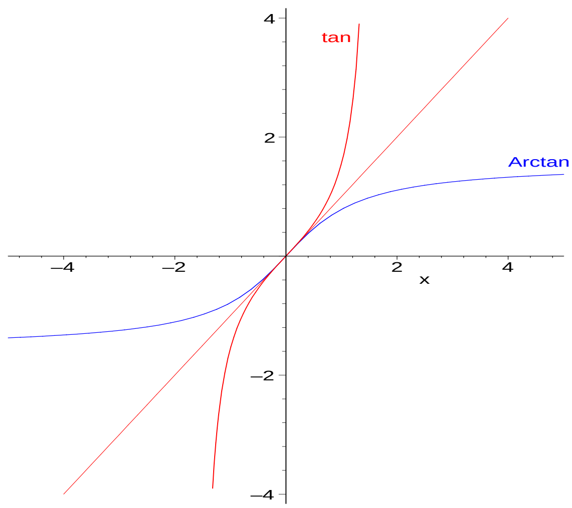
*On appelle $g$ Arctangente et on note* $g = \text{Arctan}$.

$$y = \text{Arctan}\,(x) \iff \left(x = \tan(y) \textit{ et } y \in ]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{Arctan}\,(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

Arctan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

Arctan *est impaire.*




$$\operatorname{Arctan}(0) = 0,\ \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},\ \operatorname{Arctan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},\ \operatorname{Arctan}1 = \frac{\pi}{4}.$$

## 2.2 Fonction logarithme, exponentielle et puissance

**Fonction logarithme**

notion clé :
*Ln*

*Exercices* :
exercice B.2.6
exercice B.2.7
exercice B.2.8

**Définition 2.4**

*La fonction $x \ :\longrightarrow \frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir cours sur les primitives).*

*La primitive qui s'annule pour $x = 1$ s'appelle la fonction logarithme.*

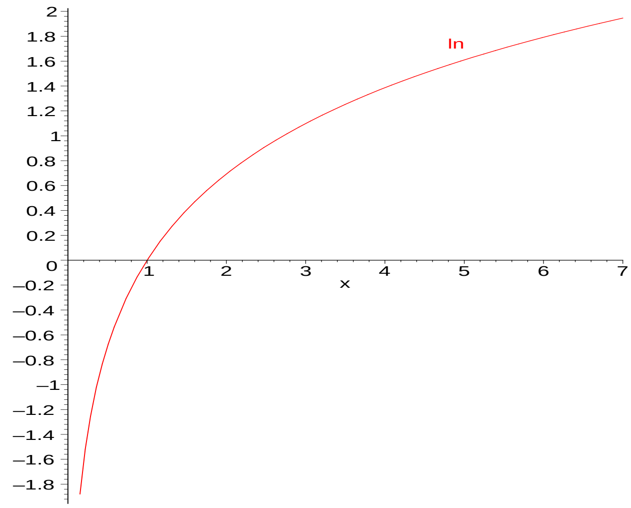
*on la note : $x \longrightarrow \ln x$.*

**Propriétés 2.1**

*i) $f \ : \ x \longrightarrow \ln x$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
*ii) si $a > 0$ et $b > 0$ alors : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.*
*En conséquence $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.*
*iii) $\ln$ est une fonction strictement croissante non majorée.*

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

*iv) $\ln 1 = 0$ et il existe un seul réel $c > 0$ tel que $\ln c = 1$.*
*Ce réel $c$ s'appelle $\mathrm{e}$ : $e \simeq 2.718$ par défaut à $10^{-3}$ près.*


ln
x
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
−1.4
−1.6
−1.8
1
2
3
4
5
6
7

**Fonction exponentielle**

notion clé :
*Exp*

*Exercices* :
exercice B.2.9
exercice B.2.10
exercice B.2.11

**Définition 2.5**

*$y \longrightarrow x = \ln y$ est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}_+^*$, elle admet donc une fonction réciproque que l'on appelle exponentielle définie sur $J = \mathbb{R}$.*

$$\exp\ :\ x \longrightarrow \exp x = \mathrm{e}^{x}.$$

**Propriétés 2.2**

*$f\ :\ x \longrightarrow \mathrm{e}^{x}$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.*

*$f'(x) = \mathrm{e}^{x}$.*

*$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et non majorée.*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0.$$

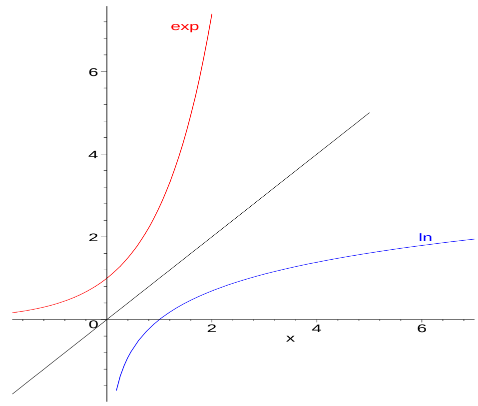
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x} > 0, \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b}.$$

*i)* $\mathrm{e}^{0} = 1.$

*ii)* $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}.$

*iii)* $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^{x}) = x.$

*iv)* $\forall x > 0,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$




**Remarque 2.1** $f(x) = u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{\,v(x)\ln(u(x))}$.

*Chaque fois que l'on étudiera une fonction qui aura la variable dans l'exposant, on la mettra sous la forme d'une exponentielle.*

**Fonction puissance**

notion clé :
*Puissance*

**Propriétés 2.3**

*Soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \ :\longrightarrow x^a$ est définie pour $x > 0$ par*

$$x^a = \mathrm{e}^{\,a \ln x}$$

*C'est la fonction puissance.*

*Les règles d'opérations sur les fonctions puissances marchent.*
$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x > 0,$

*i)* $x^a = \mathrm{e}^{\,a \ln x}$.

*ii)* $x^{a+b} = x^a x^b$.

*ii)* $x^{ab} = (x^a)^b = \left(x^b\right)^a$.

*iv)* $x^a y^a = (xy)^a$.

**ATTENTION :** Ces règles ne marchent quelque soit $a$ réel que si $x > 0$.

**Comparaisons fonctions logarithme, puissance et exponentielle**

*Exemples* :
exemple A.2.2
exemple A.2.3

*Documents* :
document C.1.1

notion clé :
*Comparaison fonction*

**Propriétés 2.4**

*i) au* $V(+\infty)$

*a)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \quad \forall\alpha > 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,x} = +\infty.$

*b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0, \quad \forall\alpha > 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^\alpha} = +\infty.$

$\forall(\alpha > 0,\ \beta > 0), \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\,\beta x}}{x^\alpha} = +\infty.$

*Conséquence :*
$\forall\alpha > 0,\ \exists V(+\infty),\ \forall x \in V(+\infty), \quad 1 < \ln x < x^\alpha < \mathrm{e}^{\,x}.$
$\forall\left(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0\right),\ \exists V(+\infty),\ \forall x \in V(+\infty), \quad 1 < (\ln x)^\alpha < x^\beta < \mathrm{e}^{\,\gamma x}.$
$\forall\left(\alpha > 0,\ \beta > 0\right),\ \exists V(+\infty),\ \forall x \in V(+\infty), \quad \mathrm{e}^{\,-\beta x} < \dfrac{1}{x^\alpha}.$

*ii) au* $V(0^+)$

*a)* $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty, \quad \forall\alpha > 0,\ \lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = 0.$

*b)* $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0^-, \quad \forall\alpha > 0,\ \lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0^-$

$\forall\left(\alpha > 0,\ \beta > 0\right), \quad x^\alpha |\ln x|^\beta = 0^+.$

*Conséquence :*
$\forall\alpha > 0,\ \exists V(0^+),\ \forall x \in V(0^+), \quad 1 < |\ln x| < \dfrac{1}{x^\alpha}.$

Pour démontrer, on utilise les résultats au $V(+\infty)$ en posant $t = \frac{1}{x}$.

Ces résultats seront utilisés dans le calcul de limite et dans les intégrales généralisées.

## 2.3 Fonctions hyperboliques

**Fonction sinus hyperbolique**

**Définition 2.6** *On pose*

$$\mathrm{sh}\ :\ x \longrightarrow \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x.$$

notion clé : *Sh*

**Propriétés 2.5**

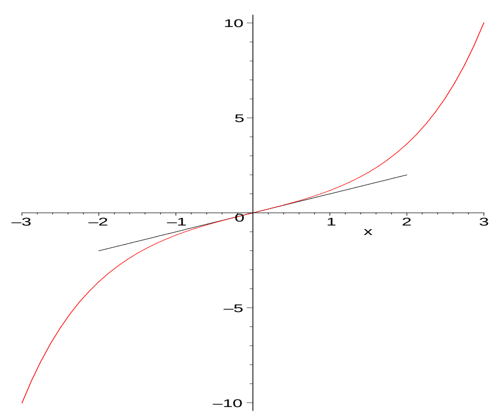
*i)* sh *est une fonction impaire :* $\mathrm{sh}\,(-x) = -\mathrm{sh}\,(x)$.

*ii)* sh *est de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *sur* $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

$\mathrm{sh}'(x) > 0$ *pour tout x réel.*

*iii)* sh *est une fonction croissante sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule si et seulement si* $x = 0$.



**Fonction cosinus hyperbolique**

*Documents* :
document C.1.2

notion clé :
*Ch*

**Définition 2.7** *On pose*

$$\mathrm{ch} \;:\; x \longrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\,'(x).$$

**Propriétés 2.6**

*i)* ch *est une fonction paire :* $\mathrm{ch}\,(-x) = \mathrm{ch}\,(x)$.

*ii)* ch *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

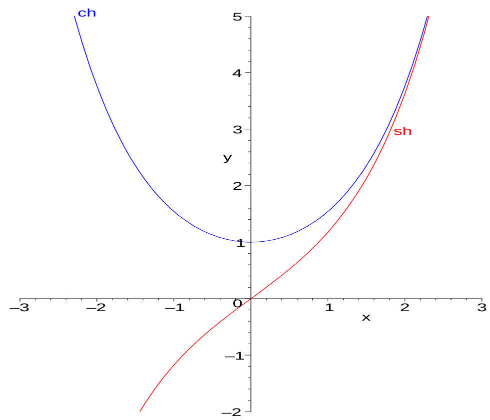
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\,'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x.$$

$\mathrm{ch}\,'(x) \geq 0$ *pour tout x réel positif ou nul.*

$$\mathrm{ch}\,' x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

ch *est une fonction strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$ *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-$.

*iii)* •*)* $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\, x > \mathrm{sh}\, x$ *car* $\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^{\,-x} > 0$.
••*)* $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^{\,2} x - \mathrm{sh}^{\,2} x = 1$.


ch
sh
y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3

**Fonction tangente hyperbolique**

notion clé :
*Th*

**Définition 2.8** *On pose*

$$\mathrm{th} \ : \ x \longrightarrow \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}.$$

*On a aussi :* $\mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}.$

**Propriétés 2.7**

*i)* th *est une fonction impaire :* $\mathrm{th}\,(-x) = -\mathrm{th}\,(x)$.

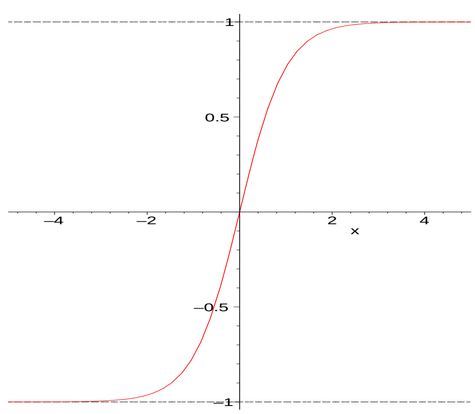
*ii)* th *est de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *sur* $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x.$$

$\mathrm{th}'(x) > 0$ *pour tout x réel.*

*iii)* th *est une fonction strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et s'annule si et seulement si* $x = 0$.

*iv)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}\, x = 1, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}\, x = -1.$



**Formules hyperboliques**

*Exercices* :
exercice B.2.12
exercice B.2.13

notion clé :
*Formules hyperboliques*

**Propriétés 2.8**
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1.$$
$$\operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$
$$\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$
$$\operatorname{th}(a \pm b) = \frac{\operatorname{th} a \pm \operatorname{th} b}{1 \pm \operatorname{th} a \operatorname{th} b}.$$
$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 2\operatorname{sh}^2 a + 1.$$
$$\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a.$$
$$\operatorname{th}(2a) = \frac{2\operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}.$$

# 2.4 Fonctions réciproques de fonctions hyperboliques

**Fonction argument sinus hyperbolique**

*Documents* :
document C.1.3

notion clé :
*Argsh*

**Définition 2.9**

*Sachant que* $\operatorname{sh}$ *est une fonction de* $I = \mathbb{R}$ *dans* $J = \operatorname{sh}(I) = \mathbb{R}$ *qui est continue et strictement croissante, elle admet une fonction réciproque g que l'on appelle argument sinus hyperbolique.*

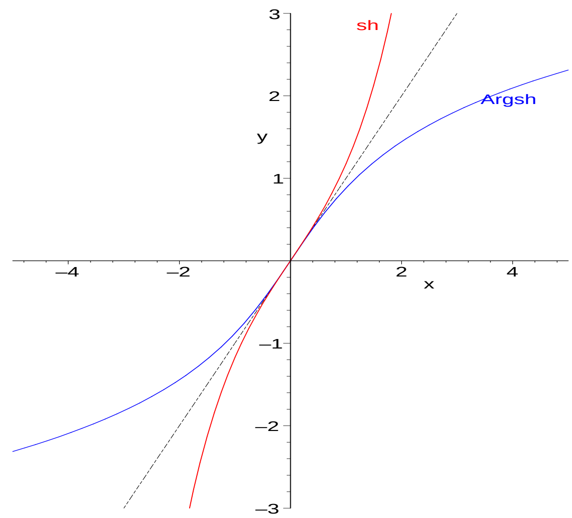
*g se note* $\operatorname{Argsh}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y = \operatorname{Argsh} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{sh} y.$$

**Propriétés 2.9**

*i)* $\operatorname{Argsh}$ *est impaire.*

*ii)* $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.




*iii)* $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

**Fonction argument cosinus hyperbolique**

*Documents* :
document C.1.4

notion clé :
*Argch*

**Définition 2.10**

*Soit $f$ la restriction à $I = \mathbb{R}_+$ de* $\operatorname{ch}$.

*On a :* $J = \operatorname{ch}(I) = [1, +\infty[$.

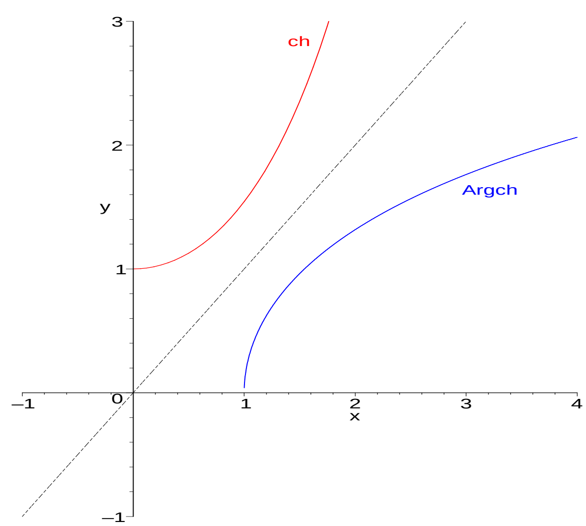
*$f$ est continue et strictement croissante, elle admet une fonction réciproque $g$ que l'on appelle argument cosinus hyperbolique.*

*$g$ se note* Argch.

$$\forall x \geq 1,\ y = \operatorname{Argch} x \quad \Longleftrightarrow \quad (x = \operatorname{ch} y \text{ et } y \geq 0).$$

**Propriétés 2.10**

*i)* $\forall x \in ]1, +\infty[,\ \operatorname{Argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.



*ii)* $\forall x \geq 1,\ \operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$

**Fonction argument tangente hyperbolique**

*Documents* :
document C.1.5

notion clé :
*Argth*

**Définition 2.11**

$\mathrm{th}$ *est une fonction de* $I = \mathbb{R}$ *dans* $J = \mathrm{th}\,(I) = ]-1, 1[$.

$\mathrm{th}$ *est continue et strictement croissante sur* $I$, *elle admet une fonction réciproque* $g$ *que l'on appelle argument tangente hyperbolique.*

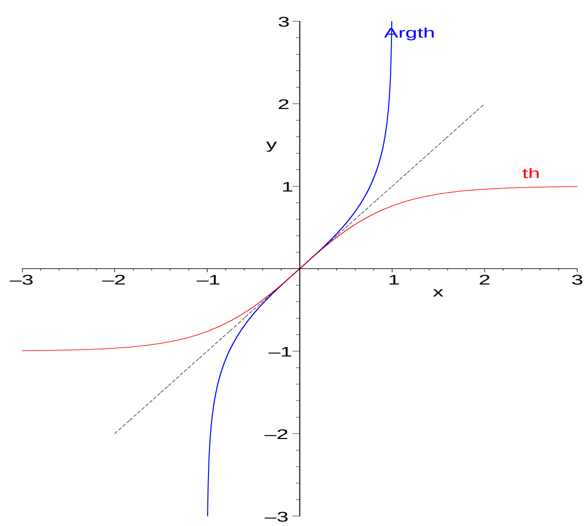
$g$ *se note* $\mathrm{Argth}$.

$$\forall x \in ]-1, 1[,\ y = \mathrm{Argth}\, x \iff x = \mathrm{th}\, y.$$

**Propriétés 2.11**

*i)* $\forall x \in ]-1, 1[,\ \mathrm{Argth}\,' x = \dfrac{1}{1 - \mathrm{th}^{\,2} y} = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

*ii)* $\mathrm{Argth}$ *est impaire.*



*ii)* $\forall x \in ]-1,1[,\ \operatorname{Argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right).$

**Remarque 2.2** *On doit connaître les expressions sous formes logarithme des fonctions* Argsh , Argch *et* Argth *car elles apparaissent dans le calcul de primitives.*

# 3 Calcul de limite

3.1 Formules de Taylor . . . . . 58
3.2 Développements limité . . . . . 60
3.3 Fonctions équivalentes au voisinage d’un point . . . . . 69
3.4 Exercices bilan . . . . . 77

## 3.1 Formules de Taylor

**Formule de Taylor Lagrange**

*Exemples* :
exemple A.3.1
exemple A.3.2
exemple A.3.3

notion clé :
*Taylor*

**Définition 3.1 (Taylor-Lagrange)**

*On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$. Alors :*
*pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in ]a,b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a)+f^{'}(a)(b-a)+\frac{f^{''}(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

*Et même : pour tout $x \in ]a,b]$, il existe $c_n(x) \in ]a,x[$ tel que :*

$$f(x) = f(a)+f^{'}(a)(x-a)+\frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_n(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ *ou* $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_n(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *s'appellent reste de Lagrange.*

**Définition 3.2 (Mac-Laurin Lagrange)**

*C'est la formule de Taylor-Lagrange pour $a = 0$.*
*Pour tout $x \in ]0,b]$, il existe $c_n(x) \in ]0,x[$ tel que :*

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

**Remarque 3.1** *Ces formules seront utilisées*

*i) pour encadrer une fonction par des fonctions polynômes.*
*ii) pour le développement d'une fonction en série entière (voir dans un autre regroupement).*

**Formule de Taylor-Young**

*Exemples* :
exemple A.3.4
exemple A.3.5

notion clé :
*Taylor-Young*

**Définition 3.3 (Formule de Taylor-Young)**

*On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varepsilon_n(x-a) = 0$ tel que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_n(x-a).$$

**Définition 3.4 (Formule de Mac-Laurin Young)**

*C'est la formule de Taylor-Young pour $a = 0$.*
$\forall n,\ \exists \varepsilon_n$ *avec* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_n(x) = 0$ *tel que*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon_n(x).$$

**Remarque 3.2** *Ce développement est essentiellement local ; il interviendra dans le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point.*

## 3.2 Développements limité

**Définition**

*Exemples* :
exemple A.3.6

notion clé :
*Développement limité*

**Définition 3.5**

*C'est l'approche quand c'est possible d'une fonction par une fonction polynôme au voisinage d'un point $x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$).*

*i)* $x_0 = 0$.
*Soit $f$ une fonction définie dans un voisinage de 0 sauf peut-être en 0 ; on dit que $f$ admet un développement limité (d.l.) à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au $V(0)$ s'il existe un polynôme $P_n$ de degré $\leq n$ tel que*

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

*La partie polynomiale d'un développement limité s'appelle la partie régulière.*

*ii)* $x_0 \in \mathbb{R}$.
*On pose $t = x - x_0$ alors $f(x) = f(t + x_0) = g(t)$ et $t \in V(0)$.*
*$f$ aura un d.l. à l'ordre $n$ au $V(x_0)$ si et seulement si $g$ admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n$*

$$\begin{array}{rcl} g(t) & = & P_n(t) + t^n\varepsilon(t) \\ f(x) & = & P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0) \end{array}$$

*iii)* $x_0 = \pm\infty$.
*On pose $t = \frac{1}{x}$ alors $f(x) = f(\frac{1}{t}) = g(t)$ et $t \in V(0)$.*
*$f$ aura un d.l. à l'ordre $n$ au $V(+\infty)$ (resp. $V(-\infty)$) si et seulement si $g$ admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n$*

$$\begin{array}{rcl} g(t) & = & P_n(t) + t^n\varepsilon(t) \\ f(x) & = & P_n(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x}) \end{array}$$

*Par la suite, on étudiera les propriétés et les règles pour $x_0 = 0$.*

**Remarque 3.3** *Si $f$ est définie au $V(x_0^+)$ (resp. $V(x_0^-)$), on dit que $f$ admet un d.l. à l'ordre $n$ au $V(x_0^+)$ (resp. $V(x_0^-)$).*

**Propriétés**

*Exemples* :
exemple A.3.7
exemple A.3.8

notion clé :
*Propriétés sur les d.l.*

**Propriétés 3.1**

*i) Unicité.*
*Si* $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x) = B_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *avec deg* $A_n \leq n$ *et deg* $b_n \leq n$ *alors* $A_n = B_n$

*ii) Troncature.*
*Si* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ *quand* $x \longrightarrow 0$ *alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^+ x^p \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0, \text{ pour tout } p,\ 0 \leq p \leq n$$

*iii) Parité.*
*Si f est paire, alors le polynôme* $A_n$ *est pair.*
*Si f est impaire, alors le polynôme* $A_n$ *est impair.*

*iv) Limite.*
*Si f admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre n avec* $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *alors f admet une limite en 0 qui est* $a_0$.
*f est donc prolongeable par continuité en 0.*
*f admet une limite finie en 0 est donc une condition nécessaire pour que f admette un d.l. en 0.*

*v) Dérivabilité.*
*Si f admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre* $n \geq 1$ *avec* $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *et si g est le prolongement par continuité de f en 0 alors g est dérivable en 0 et* $g'(0) = a_1$.

*vi) Primitive.*
*Si f admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre n avec* $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *et si f admet*

*une primitive $F$ au $V(0)$ alors $F$ admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n+1$ avec* $A_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + F(0)$.

**Développements limités au V(0) de fonctions usuelles**

notion clé :
*Tableau de d.l.*

Toutes les fonctions qui vérifient la formule de Mac-Laurin Young ont pour tout $n$ un d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n$ qui est donné par cette formule.

Ce sera le cas pour les fonctions qui figurent dans ce tableau.

$$
\begin{array}{lcll}
\mathrm{e}^{x} & = & 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+ & \cdots +\dfrac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x) \\
\operatorname{ch} x & = & 1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+ & \cdots +\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\operatorname{sh} x & = & x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+ & \cdots +\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\cos x & = & 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+ & \cdots +(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\sin x & = & x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+ & \cdots +(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\dfrac{1}{1+x} & = & 1-x+x^2- & \cdots +(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x) \\
\dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+ & \cdots +x^n+x^n\varepsilon(x) \\
\ln(1+x) & = & x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}- & \cdots +(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) \\
\ln(1-x) & = & -x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}- & \cdots -\dfrac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) \\
\operatorname{Arctan} x & = & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}- & \cdots +(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\operatorname{Argth} x & = & x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+ & \cdots +\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
(1+x)^{\alpha} & = & 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+ & \cdots +\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)
\end{array}
$$

**Remarque 3.4** *Les développements de* Arcsin *et* Argsh *s'obtiennent à partir des développements de* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et* $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

| **Règles de Calcul** | *Exemples* : | *Exercices* : | *Documents* : |
|---|---|---|---|
| notion clé : *Règles de Calcul des d.l.* | exemple A.3.9<br>exemple A.3.10<br>exemple A.3.11<br>exemple A.3.12<br>exemple A.3.13 | exercice B.3.1 | document C.2.1 |

**Propriétés 3.2**

*i) Somme.*
*Si* $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et si* $g(x) = B_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *alors* $h = (f+g)$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre n*

$$h(x) = (A_n(x) + B_n(x)) + x^n\varepsilon(x).$$

*ii) Multiplication par un scalaire.*
*Si* $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $h = \lambda f$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre n*

$$h(x) = \lambda A_n(x) + x^n\varepsilon(x).$$

*iii) Produit.*
*Si* $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et si* $g(x) = B_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *alors* $h = fg$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre n*

$$h(x) = C_n(x) + x^n\varepsilon(x).$$

$C_n(x)$ *est le produit* $A_n(x) \times B_n(x)$ *en ne gardant que les termes de degré* $\leq n$.

*iv) Composition.*
*Soit* $u(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *au* $V(0)$ *tel que* $u = u(x) \longrightarrow 0$.
*Soit* $f(u) = B_n(u) + u^n\varepsilon(u)$ *alors :* $g = f \circ u$ *admet un d.l. à l'ordre n*

$$g(x) = C_n(x) + x^n\varepsilon(x)$$

*où* $C_n$ *est formé par les termes de degré au plus n de la fonction polynôme* $B_n(A_n(x))$.

***Attention :*** *bien s'assurer que* $u \in V(0)$ *pour pouvoir utiliser les d.l. connus dans le tableau des d.l. au* $V(0)$.

*v) Inverse et quotient.*
*Soient* $f(x) = A_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et* $g(x) = B_n(x) + x^n\varepsilon(x)$

*a)* $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ *alors*

$h = \dfrac{f}{g}$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre n :*

$$h(x) = C_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

$C_n$ *est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de* $A_n$ *par* $B_n$.

*b)* $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

- *•)* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0$ *alors h n'a pas de limite finie et par suite* $h = \frac{f}{g}$ *n'a pas de d.l.*
- *••)* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ *alors h aura un d.l. si et seulement si* $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ *est finie.*

*La démonstration sera donnée dans le document annexe, il y a aussi un exemple qui l'illustre.*

**Développements limités pour $x_0 \neq 0$.**

*Exemples* :
exemple A.3.14
exemple A.3.15

*Exercices* :
exercice B.3.2
exercice B.3.3

notion clé :
*D.l. près d'un point*

**Définition 3.6**

*i)* $x_0 \in \mathbb{R}^*$

*En général, on pose* $t = x - x_0$ *et* $f(x) = f(t + x_0) = g(t)$.

$f$ *admet un d.l. au* $V(x_0)$ *à l'ordre* $n$ *si et seulement si* $g$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre* $n$.

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

***Attention*** *La partie polynomiale est en puissance de* $(x - x_0)$. *On ne développe pas.*

*ii)* $x_0 = \pm\infty$

*On pose* $t = \frac{1}{x}$ *et* $f(x) = f(\frac{1}{t}) = g(t)$ *alors* $t \in V(0)$.

$f$ *admet un d.l. au* $V(\pm\infty)$ *à l'ordre* $n$ *si et seulement si* $g$ *admet un d.l. au* $V(0)$ *à l'ordre* $n$.

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^n} \varepsilon(\frac{1}{x}) \text{ avec } \lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0.$$

***Attention*** *La partie polynomiale est en puissance de* $\frac{1}{x}$, *on ne doit pas réduire au même dénominateur.*

**Développements limités généralisés ou asymptotiques**

*Exemples* :
exemple A.3.16
exemple A.3.17

notion clé :
*D.l. Généralisé ou asymptotique*

**Définition 3.7**

*Soit $f$ une fonction définie au $V(0)$ et de limite infinie en 0.*

*On dit que $f$ admet un développement limité généralisé à l'ordre $n$ au $V(0)$ lorsque la fonction $g$ définie par*

$$g(x) = x^p f(x)$$

*admet un d.l. limité à l'ordre $n+p$ au $V(0)$ c'est-à-dire on a :*

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+p} x^{n+p} + x^{n+p} \varepsilon(x)$$

*d'où*

$$f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \cdots + a_p + \cdots + a_{n+p} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

*On peut encore dire si $f$ est de la forme $\dfrac{g(x)}{x^p}$ et $g$ a un d.l. en 0 à l'ordre $n+p$ alors $f$ a un d.l. généralisé à l'ordre $n$ en 0.*

**Remarque 3.5** *On peut remarquer qu'un d.l. généralisé au $V(0)$ a comme partie régulière une fonction polynôme en $x$ et un nombre fini de termes (au maximum $p$) en puissances négatives de $x$.*

*On peut remarquer qu'un d.l. généralisé au $V(\pm\infty)$ a comme partie régulière une fonction polynôme en $\frac{1}{x}$ et un nombre fini de termes (au maximum $p$) en puissances négatives de $\frac{1}{x}$ donc un nombre fini de termes (au maximum $p$) en puissances positives de $x$. Au $V(\pm\infty)$, on dit aussi développement asymptotique.*

*Si $f$ admet un d.l. généralisé en 0, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p f(x)$ a une limite finie en 0.*

**Etude des branches infinies d'une courbe**

*Exemples* :
exemple A.3.18

*Exercices* :
exercice B.3.4
exercice B.3.5

notion clé :
*Asymptote*

**Définition 3.8**

*On étudie au* $V(+\infty)$.

*i)* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$.
*La droite d'équation* $y = b$ *est asymptote à la courbe* $\mathcal{C}_f$ *quand* $x$ *est au* $V(+\infty)$.

*ii)* $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
*La droite d'équation* $x = a$ *est asymptote à la courbe* $\mathcal{C}_f$ *quand* $x$ *est au* $V(a)$.

*iii* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.
*Si* $f$ *admet un développement généralisé au voisinage de* $+\infty$ *c'est-à-dire :*

$$f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p + a_{p+1}\frac{1}{x} + \cdots + a_{n+p}\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

*alors la courbe* $\mathcal{C}_g$ *où* $g(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p$ *est asymptote à la courbe* $\mathcal{C}_f$ *quand* $x$ *est au* $V(+\infty)$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0$
*Le signe de* $f(x) - g(x)$ *au voisinage de* $+\infty$ *permet d'avoir la position de* $\mathcal{C}_f$ *par rapport à* $\mathcal{C}_g$.
*Si* $f(x) - g(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de* $\mathcal{C}_g$ *au* $V(+\infty)$.
*Si* $f(x) - g(x) < 0$, $\mathcal{C}_f$ *est au dessous de* $\mathcal{C}_g$ *au* $V(+\infty)$.

*Il en serait de même pour* $x$ *au voisinage de* $-\infty$.

## 3.3 Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

**Définitions**

*Exemples* :
exemple A.3.19

*Exercices* :
exercice B.3.6
exercice B.3.7

notion clé :
*Equivalent*

$I$ désigne un intervalle qui est $V(x_0)$ ou $V(x_0^+)$ ou $V(x_0^-)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$.

**Définition 3.9**

*$f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $x_0$ et on note*

$$f \underset{x_0}{\sim} g$$

*si*

$$\exists I,\ \forall x \in I, \quad f(x) = g(x)\,(1+\varepsilon(x)) = g(x)+g(x)\varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to x_0$$

*Si $I = V(x_0^+)$, on note $f \underset{x_0^+}{\sim} g$ et $\varepsilon$ a une limite à droite égale à 0.*

*Si $I = V(x_0^-)$, on note $f \underset{x_0^-}{\sim} g$ et $\varepsilon$ a une limite à gauche égale à 0.*

**Définition 3.10 (la plus souvent utilisée)**

*Si $g$ ne s'annule pas dans un voisinage de $x_0$ sauf peut-être en $x_0$ alors*

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

*Pour une fonction $f$ donnée, il y aura plusieurs fonctions équivalentes à $f$ au $V(x_0)$ : on cherchera toujours, si possible, la plus simple.*

**Définition 3.11**

*Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que $f$ est un infiniment grand au voisinage de $x_0$.*

*Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, on dit que $f$ est un infiniment petit au voisinage de $x_0$.*

Equivalent d'une fonction qui admet un d.l. au $V(x_0)$.

**Propriétés 3.3**

*i)* $x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = a_p(x-x_0)^p + a_{p+1}(x-x_0)^{p+1} + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x), \quad a_p \neq 0$

*alors*

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$

*$f$ est équivalent au terme* ***non nul*** *du d.l. de degré le plus bas par rapport à x.*

*b)* $x_0 = \pm\infty$

$f(x) = a_p\frac{1}{x^p} + a_{p+1}\frac{1}{x^{p+1}} + \cdots + a_n\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x), \quad a_p \neq 0$

*alors*

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_p\frac{1}{x^p}$$

*$f$ est équivalent au terme* ***non nul*** *du d.l. de degré le plus bas par rapport à* $\frac{1}{x}$.

**Propriétés**

*Exemples* :
exemple A.3.20
exemple A.3.21

notion clé :
*Propriétés des équivalents*

**Propriétés 3.4**

*i) "$\sim$" est une relation d"équivalence sur l'ensemble des fonctions définies sur $I - \{x_0\}$ c'est-à-dire :*

*a)* $f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$.

*b) Si* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *alors* $g(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$.

*c) Si* $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$ *alors* $f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$.

*ii)* $\left( u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \text{ et } \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a \right) \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = a$

*c'est-à-dire deux fonctions qui sont équivalentes au voisinage d'un point ont même limite en ce point.*
*On utilisera souvent cette propriété ; quand on voudra trouver la limite d'une fonction en un point, on essaiera souvent de trouver une fonction équivalente au voisinage de ce point.*

***Attention ! ! !** La réciproque n'est pas vraie.*
$u(x) = x$ *et* $v(x) = x^2$, $x_0 = 0$.
*On a u qui n'est pas équivalente à v car (seconde définition)* $\dfrac{v(x)}{u(x)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ *et pourtant elles ont même limite.*

*iii)* $\left( u(x) \underset{x_0}{\sim} u_1(x) \text{ et } v(x) \underset{x_0}{\sim} v_1(x) \right) \Longrightarrow u(x)v(x) \underset{x_0}{\sim} u_1(x)v_1(x)$

*Si de plus :* $\forall x \in I,\ x \neq x_0,\ v(x) \neq 0,\ \left( u(x) \underset{x_0}{\sim} u_1(x) \text{ et } v(x) \underset{x_0}{\sim} v_1(x) \right) \Longrightarrow \dfrac{u(x)}{v(x)} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{u_1(x)}{v_1(x)}$
*c'est-à-dire l'équivalent d'un produit est le produit des équivalents et l'équivalent d'un quotient est le quotient des équivalents.*

*On appliquera cette propriété chaque fois que l'on fera l'étude locale d'une fonction f qui se présentera sous la forme d'un produit ou d'un quotient.*

*iv)* $u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \Longrightarrow (\forall x \in I,\ u(x) \text{ et } v(x) \text{ ont le même signe})$

*c'est-à-dire l'étude locale du signe de u est amenée à l'étude locale du signe de v.*

*v)* *si* $u(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$ *alors* $u(x) \underset{x_0}{\sim} a$.

**Pièges avec les équivalents**

*Exemples* :
exemple A.3.22
exemple A.3.23

notion clé :
*Pièges avec les équivalents*

**ATTENTION**

i) $u(x) \underset{x_0}{\sim} 0$ ! ! ! est faux sauf si $\forall x \in V(x_0), \quad u(x) = 0$ : cas qui ne présente aucun intérêt.

ii) $\left.\begin{array}{l} u_1(x) \underset{0}{\sim} v_1(x) \\ u_2(x) \underset{0}{\sim} v_2(x) \end{array}\right\}$ n'implique pas $u_1(x) + u_2(x) \underset{0}{\sim} v_1(x) + v_2(x)$
On ne peut le faire que pour le produit ou le quotient mais pas pour la somme.

iii) $u(x) \underset{0}{\sim} v(x)$ n'implique pas $f\,(u(x)) \underset{0}{\sim} f\,(v(x))$.
En général, on ne peut pas composer les équivalents.

**Cas particulier**

*Exemples* : exemple A.3.24

*Exercices* : exercice B.3.8 exercice B.3.9

*Documents* : document C.2.2

notion clé : *Négligeable*

**Propriétés 3.5**

*i) Somme*

*Si au $V(x_0)$, $f$ est négligeable par rapport à $g$ alors*

$$(f(x) + g(x)) \underset{x_0}{\sim} g(x)$$

***Remarque***

*On dit que $f$ est négligeable au $V(x_0)$ par rapport à $g$ si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.*

*$f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.*

*$f$ est négligeable par rapport à $g$ au $V(+\infty)$ car $f(x) = g(x) \times \dfrac{1}{x}$, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.*

*$g$ est négligeable par rapport à $f$ au $V(0)$ car $g(x) = f(x) \times x$, $\lim_{x \to 0} x = 0$.*

*ii) Composition*

*a)* $\left(u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \text{ et } \left(\lim_{x \to x_0} u(x) \neq 1 \text{ ou } \lim_{x \to x_0} u(x) = \pm\infty\right)\right) \Longrightarrow \left(\ln u(x) \underset{x_0}{\sim} \ln v(x)\right)$

*On peut composer les équivalents avec $\ln$ à condition que $u \notin V(1)$.*

*b)* $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \left(u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \text{ et } u(x) > 0\right) \Longrightarrow u(x)^\alpha \underset{x_0}{\sim} v(x)^\alpha.$

*c)* $\left(u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} u(x) - v(x) = 0\right) \Longrightarrow \mathrm{e}^{u(x)} \underset{x_0}{\sim} \mathrm{e}^{v(x)}.$

**Equivalents de fonctions usuelles**

*Exemples* :
exemple A.3.25

notion clé :
*Equivalents de fonctions usuelles*

**Propriétés 3.6**

*i)* $x \in V(0)$

$$\sin x \underset{0}{\sim} x, \quad (\mathrm{e}^x - 1) \underset{0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \quad (\cos x - 1) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$((1+x)^\alpha - 1) \underset{0}{\sim} \alpha x, \quad \tan x \underset{0}{\sim} x, \quad \mathrm{sh}\, x \underset{0}{\sim} x, \quad \mathrm{Arctan}\, x \underset{0}{\sim} x, \quad (\mathrm{ch}\, x - 1) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

*ii)* $x \in V(1)$

$$\ln x \underset{1}{\sim} (x-1), \quad x^\alpha - 1 \underset{1}{\sim} \alpha(x-1)$$

**Attention ! !**

i) $x \in V(+\infty),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \left(\ln x \underset{+\infty}{\not\sim} x^\alpha \text{ et } \mathrm{e}^x \underset{+\infty}{\not\sim} x^\alpha\right)$

ii) $x \in V(0),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \ln x \underset{0}{\not\sim} x^\alpha$

**Applications**

notion clé :
*Applications*

*Exercices* :
exercice B.3.10
exercice B.3.11
exercice B.3.12
exercice B.3.13
exercice B.3.14

Les développements limités et les équivalents sont des outils puissants utilisés **localement** pour la recherche d'équivalents, le calcul de limite et le comportement asymptotique (branche infinies) d'une fonction en un lieu.

On essaiera au maximum d'utiliser les équivalents car c'est plus rapide que les d.l. à condition de pouvoir appliquer les règles sur les équivalents sinon on passera par les d.l.

Ils serviront aussi dans ce regroupement pour l'étude d'intégrale généralisée et dans un autre regroupement pour l'étude des suites ou séries numériques.

## 3.4 Exercices bilan

**Exercices bilan : d.l.**

notion clé :
*Exercices bilan d.l.*

| *Exercices* : | *Exercices* : |
|---|---|
| exercice B.3.15 | exercice B.3.19 |
| exercice B.3.16 | exercice B.3.20 |
| exercice B.3.17 | exercice B.3.21 |
| exercice B.3.18 | exercice B.3.22 |

Dans tous les exercices ci-dessus,

$DL_n(x_0)$ de $f$ signifie d.l. de $f$ en $x_0$ à l'ordre $n$.

**Exercices bilan : équivalent**

notion clé :
*Exercices bilan équivalent*

| *Exercices* : | *Exercices* : |
|---|---|
| exercice B.3.23 | exercice B.3.27 |
| exercice B.3.24 | exercice B.3.28 |
| exercice B.3.25 | exercice B.3.29 |
| exercice B.3.26 | exercice B.3.30 |

# Deuxième partie

# Les annexes

# Annexe A

# Les exemples

## Table des exemples


A.1 : Exemples du chapitre 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
Exemple A.1.1 : Voisinage d'un point . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
Exemple A.1.2 : Fonctions réelles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
Exemple A.1.3 : Domaine de définition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
Exemple A.1.4 : Fonction strictement croissante . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
Exemple A.1.5 : Fonction bornée . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
Exemple A.1.6 : Fonction minorée . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
Exemple A.1.7 : Parité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
Exemple A.1.8 : Périodicité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
Exemple A.1.9 : Limites de fonctions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
Exemple A.1.10 : Limites . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
Exemple A.1.11 : Limites . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
Exemple A.1.12 : Limites . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
Exemple A.1.13 : Continuité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
Exemple A.1.14 : Continuité à droite . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
Exemple A.1.15 : Fonctions continues . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
Exemple A.1.16 : Maximum, minimum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
Exemple A.1.17 : Maximum, minimum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
Exemple A.1.18 : Taux d'accroissement . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
Exemple A.1.19 : Tangente à une courbe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
Exemple A.1.20 : Différentielle d'une fonction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
Exemple A.1.21 : Fonction de classe $\mathcal{C}^n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
A.2 : Exemples du chapitre 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
Exemple A.2.1 : Réciproque d'une fonction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87

Exemple A.2.2 : Comparaison de fonction . . . . . 87
Exemple A.2.3 : Comparaison de fonction . . . . . 87
A.3 : Exemples du chapitre 3 . . . . . 89
Exemple A.3.1 : Formule de Taylor-Lagrange . . . . . 89
Exemple A.3.2 : Formule de Mac-Laurin Lagrange . . . . . 89
Exemple A.3.3 : Approximation de e . . . . . 89
Exemple A.3.4 : Formule de Mac-Laurin Young . . . . . 90
Exemple A.3.5 : Formule de Mac-Laurin Young . . . . . 90
Exemple A.3.6 : D.l . . . . . 90
Exemple A.3.7 : d.l. . . . . . 90
Exemple A.3.8 : d.l. et primitive . . . . . 91
Exemple A.3.9 : Addition de d.l. . . . . . 91
Exemple A.3.10 : Produit de d.l. . . . . . 91
Exemple A.3.11 : Composition de d.l. . . . . . 91
Exemple A.3.12 : Quotient de d.l. . . . . . 92
Exemple A.3.13 : Quotient de d.l. . . . . . 92
Exemple A.3.14 : D.l. en un point non nul . . . . . 93
Exemple A.3.15 : D.l. à l'infini . . . . . 93
Exemple A.3.16 : D.l généralisé . . . . . 94
Exemple A.3.17 : D.l. généralisé . . . . . 94
Exemple A.3.18 : Asymptote . . . . . 94
Exemple A.3.19 : Equivalent . . . . . 95
Exemple A.3.20 : Opérations sur les équivalents . . . . . 95
Exemple A.3.21 : Opérations sur les équivalents . . . . . 96
Exemple A.3.22 : Somme de deux équivalents . . . . . 96
Exemple A.3.23 : Composition de deux équivalents . . . . . 97
Exemple A.3.24 : Fonctions négligeables . . . . . 97
Exemple A.3.25 : Equivalent . . . . . 97

## A.1 Exemples du chapitre 1

**Exemple** A.1.1 Voisinage d'un point

$\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$ , $]-1.1,-0.9]$ sont des $V(-1)$.

**Exemple** A.1.2 Fonctions réelles

$f\ :\ x \longrightarrow x^2, \quad g\ :\ x \longrightarrow \sqrt{x}, \quad h\ :\ x \longrightarrow \sin(x).$

$f$, $g$ et $h$ sont trois fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.

**Exemple** A.1.3 Domaine de définition

$f_1\ :\ x \longrightarrow 2x+1.\quad D = \mathbb{R}$, fonction affine.
$f_2\ :\ x \longrightarrow x^3+3x^2+1.\quad D = \mathbb{R}$, fonction polynôme.
$f_3\ :\ x \longrightarrow \frac{x^2+1}{x}.\quad D = \mathbb{R}-\{0\}$, fonction rationnelle.
$f_4\ :\ x \longrightarrow \sin(x).\quad D = \mathbb{R}$.
$f_5\ :\ x \longrightarrow \sqrt{x^2-1}.\quad D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1\}$.

**Exemple** A.1.4 Fonction strictement croissante

$f\ :\ x \longrightarrow x^2$ est strictement croissante sur $[1,2]$ mais n'est pas monotone sur $[-1,2]$.

**Exemple** A.1.5 Fonction bornée

$f(x) = \sin(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

**Exemple** A.1.6 Fonction minorée

$g(x) = x^2-1$ est minorée sur $\mathbb{R}$ car $g(x) \geq -1$ mais n'est pas majorée.

**Exemple** A.1.7 Parité

$f(x) = 2+x^2-3x^4$ est paire sur $\mathbb{R}$.
$g(x) = x^3+x$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

**Exemple** A.1.8 Périodicité

$f(x) = \sin(x)$ : la période de $f$ est $2\pi$.
$g(x) = \sin(3x)$ : la période de $g$ est $\frac{2\pi}{3}$.

**Exemple** A.1.9 Limites de fonctions

$\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

**Exemple** A.1.10 Limites

$k(x) = x^2$.

On a $\lim\limits_{x\to 2^+} k(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} k(x) = 4$. $k$ a une limite au point $x = 2$.

**Exemple** A.1.11 Limites

$f(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$.

On a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$
$f$ a une limite à droite différente de la limite à gauche au point $x = 1$ donc $f$ n'a pas de limite au point $x = 1$.

**Exemple** A.1.12 Limites

$g(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$.

On a $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -1.$
$g$ a une limite à droite différente de la limite à gauche au point $x = 1$ donc $g$ n'a pas de limite au point $x = 1$.

**Exemple** A.1.13 Continuité

$f(x) = x^2$.
On a $f(2) = 4$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$. Donc $f$ est continue au point $x = 2$.

## **Exemple** A.1.14 Continuité à droite

$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ .
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1), \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 \neq f(1).$
$f$ est donc continue à droite en $x = 1$ mais n'est pas continue à gauche, par suite $f$ n'est pas continue en $x = 1$.

## **Exemple** A.1.15 Fonctions continues

a) Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

b) Les fonctions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sont continues sur $\mathbb{R} - \{x \mid Q(x) = 0\}$.

c) Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

d) Les fonctions $\sqrt{P(x)}$ où $P$ est une fonction polynôme sont continues sur $\{x \mid P(x) \geq 0\}$.

## **Exemple** A.1.16 Maximum, minimum

$f(x) = x^2, \quad f([-1,2]) = [0,4].$
On a : $m = f(0) = 0$ et $M = f(2) = 4$.

## **Exemple** A.1.17 Maximum, minimum

$f(x) = \sin(x), \quad f([0, \frac{5\pi}{4}]) = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1].$
On a : $m = f(\frac{5\pi}{4})$ et $M = f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

## **Exemple** A.1.18 Taux d'accroissement

$f(x) = x^2, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$
Alors $\tau_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{2hx_0+h^2}{h} = 2x_0 + h.$

$\lim\limits_{h \to 0} \tau_{x_0}(h) = 2x_0$. d'où $f'(x_0) = 2x_0$.

**Exemple** A.1.19 Tangente à une courbe

$f(x) = x^2, \quad x_0 = 2.$
Au point $x_0 = 2$, on a : $f'(2) = 4$, $f(2) = 4$.
La droite d'équation $y = 4 + 4(x-2) = 4x - 4$ est une approximation au $V(2)$ de la parabole d'équation $f(x) = x^2$. C'est donc la tangente à la courbe au point $A(2,4)$.

**Exemple** A.1.20 Différentielle d'une fonction

$f(x) = x^2, \quad df = 2xdx.$

**Exemple** A.1.21 Fonction de classe $\mathcal{C}^n$

a) $f_1 : x \to a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. $f_1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $f_1'(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$.

b) $f_2 : x \to \sin(x)$. $f_2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $f_2'(x) = \cos(x)$.

c) $f_3 : x \to \cos(x)$. $f_3$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $f_3'(x) = -\sin((x)$.

d) $f_4 : x \to \sqrt{x}$. $f_4$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$. $f_4'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

## A.2 Exemples du chapitre 2

### **Exemple** A.2.1 Réciproque d'une fonction

Soit $I = \mathbb{R}^+$ et $f(x) = x^2$.

$f$ est continue et strictement croissante sur un intervalle $I$ alors $f$ admet une fonction réciproque $g$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

### **Exemple** A.2.2 Comparaison de fonction

On va montrer que

$$\forall x \in V(+\infty), \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}x^3 < \frac{1}{x^2}$$

On a :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists V(+\infty),\ \ \forall x \in V(+\infty), \quad e^{-x} < \frac{1}{x^\alpha}$$

Alors $f(x) < \dfrac{x^3}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-3}}$.
Si on applique ce résultat en particulier pour $\alpha = 5$, on a donc

$$\exists V(+\infty) \text{ tel que } \forall x \in V(+\infty), \quad f(x) < \frac{1}{x^2}$$

### **Exemple** A.2.3 Comparaison de fonction

Montrer qu'au $V(0^+)$,

$$f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$$

et

$$f(x) > \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Au $V(+\infty)$, on a : $|\ln x| > 1$ donc $f(x) > \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On sait que $\forall\alpha > 0,\ \exists V(0^+),\ \ \forall x \in V(0^+),\quad |\ln x| < \dfrac{1}{x^\alpha}$

donc $f(x) < \dfrac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}$, on aura $f(x) < \dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$ si on prend $\alpha = \frac{3}{4}$.

# A.3 Exemples du chapitre 3

### **Exemple** A.3.1 Formule de Taylor-Lagrange

$f(x) = \mathrm{e}^{x}$. On prend $a = 1$, $b = x$ et $n = 3$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[1, x]$.
$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{x}$ d'où $\mathrm{e}^{x} = 1 + \mathrm{e}\,(x-1) + \dfrac{1}{2!}\mathrm{e}\,(x-1)^2 + \dfrac{1}{3!}\mathrm{e}\,(x-1)^3 + \dfrac{1}{4!}\mathrm{e}^{c_x}(x-1)^4,\ c_x \in ]1, x[$.

### **Exemple** A.3.2 Formule de Mac-Laurin Lagrange

Soit $f(x) = \ln(1+x)$ alors pour $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

En effet en appliquant Mac-Laurin Lagrange sur $[0, x]$ pour $n = 1$.
Sachant que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$
$\exists c_1(x) \in ]0, x[,\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+c_1(x))^2}$
Comme $c_1(x) > 0$, on a : $0 \leq \frac{1}{(1+c_1(x))^2} \leq 1$
d'où $x \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$.

### **Exemple** A.3.3 Approximation de e

On va montrer que le nombre e peut être approché par le nombre $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!}$ avec une erreur inférieure à $10^{-2}$.

On applique la formule de Mac-Laurin Lagrange à la fonction exponentielle sur $]0, 1]$ pour $x = 1$ avec $n = 5$.
On a $\mathrm{e} = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{\mathrm{e}^{c}}{6!}$ avec $c \in ]0, 1[$

$$0 < e - \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{c}}{6!} \leq \frac{\mathrm{e}}{6!} \leq \frac{1}{2(5)!} = \frac{1}{240} < 10^{-2}$$

On a

$$0 < \mathrm{e} - \frac{326}{120} < 10^{-2}$$

**Exemple** A.3.4 Formule de Mac-Laurin Young

On applique la formule de Mac-Laurin Young à la fonction $f \ : \ x \longrightarrow \mathrm{e}^x$.
$f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au $V(0)$ alors sachant que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 1$, on a :

$$\mathrm{e}^x = P_n(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$.

**Exemple** A.3.5 Formule de Mac-Laurin Young

On applique la formule de Mac-Laurin Young à la fonction $f \ : \ x \longrightarrow \sin x$.
$f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au $V(0)$ alors sachant que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, on a :

$$\sin x = P_{2n+1}(x) + x^{2n+2} \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$P_{2n+1}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(n+1)!}$.

**Exemple** A.3.6 D.l

Soit $f(x) = 1 + x^2 - 5x^3 + x^5$.
Le d.l. de $f$ à l'ordre 3 au $V(0)$ est

$$f(x) = 1 + x^2 - 5x^3 + x^3 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = x^2 \longrightarrow 0$$

**Exemple** A.3.7 d.l.

$f(x) = 1 + 3x + 5x^3 + x^3 \varepsilon(x)$.
Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 1 + 3x + x^2 \varepsilon_1(x) \\ f(x) & = & 1 + 3x + x \varepsilon_2(x) \\ f(x) & = & 1 + \varepsilon_3(x) \end{array}.$$

**Exemple** A.3.8 d.l. et primitive

Soit $f$ admettant une primitive $F$ au $V(0)$ avec $F(0) = 3$.
On suppose que $f$ admet un d.l. au $V(0)$ à l'ordre 3 tel que :

$$f(x) = 1 - x + 2x^2 - 4x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

on a alors $F$ qui admet un d.l. à l'ordre 4 au $V(0)$ tel que :

$$F(x) = 3 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

**Exemple** A.3.9 Addition de d.l.

d.l. de $f(x) = \sin x - 2\operatorname{sh} x$ en $x_0 = 0$ et $n = 3$.
On a : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ et $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$.

Alors $f(x) = -x - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

**Exemple** A.3.10 Produit de d.l.

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x \cos(2x)$.
On cherche le d.l. de $f$ pour $x_0 = 0$ et $n = 4$.

*R*éponse :
$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$.
$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Donc $f(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

**Exemple** A.3.11 Composition de d.l.

On cherche le d.l. de $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ pour $x_0 = 0$ et $n = 4$.

*R*éponse :
$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$ avec $u = u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
$f(x) = \mathrm{e}^u$ avec $u \in V(0)$.

$$f(x) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + u^4\varepsilon(u) \tag{A.1}$$

$$\begin{array}{rcl} u & = & x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x) \\ u^2 & = & x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x) \\ u^3 & = & x^3 + x^4\varepsilon(x) \\ u^4 & = & x^4 + x^4\varepsilon(x) \end{array}$$

Par suite en remplacant dans (A.1), on a :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)$$

## **Exemple** A.3.12 Quotient de d.l.

On cherche le d.l. de $f(x) = \dfrac{1+x}{\mathrm{e}^{\,x}}$ pour $x_0 = 0$ et $n = 3$.

*R*éponse :
$\mathrm{e}^{\,x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x), \quad \mathrm{e}^{\,0} = 1 \neq 0$
Le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $1+x$ par $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$ à l'ordre 3 est $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ donc

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

## **Exemple** A.3.13 Quotient de d.l.

On va donner s'il existe le d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n = 3$ des quotients suivants.

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1+x}{\mathrm{e}^{\,x} - 1 - x}$
Ici $g(0) = 0$ et $f(0) = 1$ : il n'y a pas de d.l.

b) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\,x} - 1 - x}$
Ici $g(0) = f(0) = 0$. On a :

$$h(x) = \frac{x}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + x^2\varepsilon(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$f_1(0) = 1$ et $g_1(0) = 0$ : il n'y a pas de d.l.

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\cos x - 1}{\mathrm{e}^{x} - 1 - x}$.

Ici $g(0) = f(0) = 0$. On a :

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{x} - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

donc $h(x) = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = \dfrac{-\frac{1}{2} + x\varepsilon(x)}{\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + x\varepsilon(x)}$ après avoir simplifié par $x^2$.

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -1$. Il y a un d.l. mais on l'a à l'ordre 1 car on a le d.l. de $f_1$ et de $g_1$ à l'ordre 1. Cela vient de la simplification par $x^2$ qui a abaissé l'ordre de 2 donc si on veut le d.l. de $h$ à l'ordre 3, il faut prendre $g$ et $f$ à l'ordre 5.

$$h(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + x^3\varepsilon(x)}{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{120} + x^3\varepsilon(x)}$$

On calcule le quotient obtenu en faisant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}$ par $\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{120}$.

On trouve : $-1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} - \frac{x^3}{135}$.

Par suite

$$h(x) = -1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} - \frac{x^3}{135} + x^3\varepsilon(x)$$

## **Exemple** A.3.14 D.l. en un point non nul

$f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ et $n = 3$.

On pose $t = x - 1$ alors $f(x) = g(t) = \ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)$, $\quad t \in V(0)$.

Donc $f(x) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\,\varepsilon(x-1)$.

On ne développe pas.

## **Exemple** A.3.15 D.l. à l'infini

$h(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + 2x^2}$, $\quad x_0 = +\infty$ et $n = 3$.

On pose $t = \frac{1}{x}$ alors $h(x) = g(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + 2}$, $\quad t \in V(0)$.

On cherche un d.l. de $g$ en faisant une division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3.
On trouve

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{4} + t^3\varepsilon(t)$$

Par suite $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{1}{4x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon(\dfrac{1}{x})$.

On ne doit pas réduire au même dénominateur.

### **Exemple** A.3.16 D.l généralisé

La fonction définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ admet un d.l. généralisé au $V(0)$ à l'ordre 3 car : $g(x) = x^2 f(x) = e^x$ admet un d.l. à l'ordre 5 au $V(0)$.
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$.
Par suite,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + x^3\varepsilon(x)$$

### **Exemple** A.3.17 D.l. généralisé

La fonction définie par $f(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ admet un d.l. généralisé au $V(\pm\infty)$ à l'ordre 1.

En effet, en posant $t = \frac{1}{x}$, on a :$g(t) = \dfrac{e^t - 1}{t^2}$, $t \in V(0)$.
Comme $e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$, on a :

$$g(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \frac{t}{6} + t\varepsilon(t)$$

Par suite

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$$

### **Exemple** A.3.18 Asymptote

$f(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ : étude au $V(+\infty)$.

On a déjà déterminé le d.l. généralisé de cette fonction dans l'exemple A.3.17. On avait trouvé

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x), \quad x \in V(+\infty)$$

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de $f$ car
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$$
De plus, $f(x) - y = \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}) > 0$
la courbe est au dessus de l'asymptote au $V(+\infty)$.

**Exemple** A.3.19 Equivalent

Au $V(0)$, on a
$$(\mathrm{e}^x - 1) \underset{0}{\sim} x$$
En effet : $\mathrm{e}^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) = x + x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2\right) + x^3\varepsilon(x) = x + x\alpha(x)$
avec $\alpha(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 0$
On retrouve la première définition.

On peut aussi le voir en utilisant la seconde définition :
$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
Par suite, on utilisera le fait que $\mathrm{e}^x - 1$ admet un d.l. au $V(0)$ donc
$$(\mathrm{e}^x - 1) \underset{0}{\sim} x$$

**Exemple** A.3.20 Opérations sur les équivalents

Sachant que $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$ et $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$, on désire déterminer la limite en 0, si elle existe, de $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x \ln(x+1)}$.

On commence par chercher un équivalent ce qui est facile parce que la fonction se présente sous la forme de produit et quotient.

On a $f(x) \underset{0}{\sim} g(x) = \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Les fonctions $f$ et $g$ sont équivalentes en 0 donc elles ont même limites par suite
$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

### **Exemple** A.3.21 Opérations sur les équivalents

Sachant que $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on détermine un équivalent de $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1-2x^2}-1\right)\cos(2x)}{\sin x}$ au $V(0)$.

$\sqrt{1-2x^2} = \left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ avec $2x^2 \in V(0)$ donc

$$\sqrt{1-2x^2} - 1 \underset{0}{\sim} -x^2$$

$\lim\limits_{x\to 0} \cos(2x) = 1$ donc $\cos(2x) \underset{0}{\sim} 1$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$
$f$ est sous forme de produit et de quotient de ces fonctions donc :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x$$

### **Exemple** A.3.22 Somme de deux équivalents

Ceci est un contre-exemple pour montrer que l'on ne peut pas, en général, ajouter les équivalents.

Soit $f(x) = g(x) - h(x) + k(x)$ où

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x+1} \\ h(x) &= \frac{1}{(x+1)^2} \\ k(x) &= \frac{x}{x+2} \end{aligned}$$

$x_0 = 0$.

On a

$$g(x) \underset{0}{\sim} g_1(x) = 1, \quad h(x) \underset{0}{\sim} h_1(x) = 1, \quad k(x) \underset{0}{\sim} k_1(x) = \frac{x}{2}$$

On a $g_1(x) - h_1(x) + k_1(x) = \frac{x}{2}$.
On a aussi $f(x) = \dfrac{x\left(x^2+3x+3\right)}{(x+1)^2(x+2)} \underset{0}{\sim} \dfrac{3x}{2}$
Or $\frac{x}{2}$ n'est pas équivalent à $\frac{3x}{2}$.

Par suite, on n'a pas $f(x) \underset{0}{\sim} g_1(x) - h_1(x) + k_1(x)$.

**Exemple** A.3.23 Composition de deux équivalents

On montre sur deux contre-exemples que l'on ne peut pas, en général, composer les équivalents.
a) $x_0 = +\infty, \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}$.

b) $x_0 = 0, \quad f(x) = \ln(\cos x)$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = x^2 - x$.

On a : $u(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais on n'a pas $f(x) = \mathrm{e}^{u} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x^2}$ car $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2-x}}{\mathrm{e}^{x^2}} = \mathrm{e}^{-x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq 1$

b) $f(x) = \ln u$ avec $u(x) = \cos x$.

On a : $u(x) \underset{0}{\sim} 1$ mais on n'a pas $f(x) = \ln u \underset{0}{\sim} \ln 1 = 0$!!! car $f$ n'est pas la fonction nulle.

**Exemple** A.3.24 Fonctions négligeables

a) $f(x) = x + \ln x, \quad x \in V(+\infty)$.
On a $\ln x$ qui est négligeable par rapport à $x$ (comparaison entre la fonction $\ln$ et la fonction puissance au $V(+\infty)$) donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$$

b) $g(x) = x^2 - 2x^3$.
au $V(0)$, $-2x^3$ est négligeable par rapport à $x^2$ donc

$$g(x) \underset{0}{\sim} x^2$$

au $V(+\infty)$, $x^2$ est négligeable par rapport à $-2x^3$ donc

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} -2x^3$$

**Exemple** A.3.25 Equivalent

On cherche un équivalent au $V(0)$ de $\ln(\cos x)$.

On pose $u = \cos x$ alors $u \in V(1)$.

Or $\ln u \underset{u\in V(1)}{\sim} (u-1)$ donc $\ln(\cos x) \underset{x\in V(0)}{\sim} (\cos x - 1)$.
De plus, $(\cos x - 1) \underset{x\in V(0)}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc

$$\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

# Annexe B

# Les exercices

## Table des exercices

B.1 : Exercices du chapitre 1 . . . . . 101
Exercice B.1.1 : Graphes de fonctions . . . . . 101
Exercice B.1.2 : Fonctions monotones . . . . . 101
Exercice B.1.3 : Périodicité . . . . . 101
Exercice B.1.4 : Opération sur des fonctions . . . . . 101
Exercice B.1.5 : Calcul de dérivées . . . . . 102
Exercice B.1.6 : Calcul de dérivées . . . . . 102
Exercice B.1.7 : Calcul de dérivées . . . . . 102
Exercice B.1.8 : Calcul de dérivées . . . . . 102
Exercice B.1.9 : Calcul de dérivées . . . . . 102
Exercice B.1.10 : Calcul de dérivées . . . . . 102
B.2 : Exercices du chapitre 2 . . . . . 103
Exercice B.2.1 : Simplification Arcsinus . . . . . 103
Exercice B.2.2 : Simplification Arcsinus . . . . . 103
Exercice B.2.3 : Simplification Arccos . . . . . 103
Exercice B.2.4 : Simplification Arctan . . . . . 103
Exercice B.2.5 : Simplification Arctan . . . . . 103
Exercice B.2.6 : Logarithme . . . . . 104
Exercice B.2.7 : Equation logarithmique . . . . . 104
Exercice B.2.8 : Dérivée de fonction logarithmique . . . . . 104
Exercice B.2.9 : Equation exponentielle . . . . . 104
Exercice B.2.10 : Inéquation exponentielle . . . . . 104
Exercice B.2.11 : Dérivée sous forme d'exponentielle . . . . . 104
Exercice B.2.12 : Equation hyperbolique . . . . . 104

Exercice B.2.13 : Equation hyperbolique . . . . . 105
B.3 : Exercices du chapitre 3 . . . . . 106
Exercice B.3.1 : Produit de d.l. . . . . . 106
Exercice B.3.2 : D.l en un point non nul . . . . . 106
Exercice B.3.3 : D.l en un point non nul . . . . . 106
Exercice B.3.4 : Asymptote . . . . . 106
Exercice B.3.5 : Asymptote . . . . . 106
Exercice B.3.6 : Equivalent . . . . . 106
Exercice B.3.7 : Equivalent . . . . . 106
Exercice B.3.8 : Equivalent . . . . . 107
Exercice B.3.9 : Equivalent . . . . . 107
Exercice B.3.10 : Calcul de limite . . . . . 107
Exercice B.3.11 : Calcul de limite . . . . . 107
Exercice B.3.12 : Calcul d'équivalent . . . . . 107
Exercice B.3.13 : Asymptote à une courbe . . . . . 108
Exercice B.3.14 : Asymptote à une courbe . . . . . 108
Exercice B.3.15 : Exo bilan . . . . . 108
Exercice B.3.16 : Exo bilan . . . . . 108
Exercice B.3.17 : Exo bilan . . . . . 108
Exercice B.3.18 : Exo bilan . . . . . 108
Exercice B.3.19 : Exo bilan . . . . . 108
Exercice B.3.20 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.21 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.22 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.23 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.24 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.25 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.26 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.27 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.28 : Exo bilan . . . . . 109
Exercice B.3.29 : Exo bilan . . . . . 110
Exercice B.3.30 : Exo bilan . . . . . 110

# B.1 Exercices du chapitre 1

### **Exercice** B.1.1 Graphes de fonctions

Tracer avec la calculatrice le graphe des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 2x + 1$.
$f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
$f_3(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
$f_4(x) = \sin(x)$.
$f_5(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

### **Exercice** B.1.2 Fonctions monotones

Donner, à partir des graphes des fonctions suivantes, les intervalles les plus grands sur lesquels chacune de ces fonctions est croissante (respectivement décroissante).

a) $f_1(x) = 2x + 1$.
b) $f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
c) $f_3(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
d) $f_4(x) = \sin(x)$.
e) $f_5(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

### **Exercice** B.1.3 Périodicité

Déterminer la période des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(3x) - \cos(x)$.

b) $g(x) = \sin(3x) + 2\cos(6x)$.

c) $h(x) = |\sin(x)|$.

### **Exercice** B.1.4 Opération sur des fonctions

Soient $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^2$.
Déterminer : $f + g,\ f \times g,\ f \circ g$ et $g \circ f$.

### **Exercice** B.1.5 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
a) $f(x) = 4x^5 - 2x^4 + x^2 - 1$.

b) $g(x) = 4\sin^5(x) - 2\sin^4(x) + \sin^2(x) - 1$.

c) $h(x) = 4\mathrm{e}^{5x} - 2\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{2x} - 1$.

### **Exercice** B.1.6 Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
a) $f(x) = \cos^2(x)$.

b) $g(x) = \cos(x^2)$.

### **Exercice** B.1.7 Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de $f$ : $f(x) = \sin^2(2x+1)\cos(x^2+3x)$.

### **Exercice** B.1.8 Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de $f$ : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2x^3 + x\right)$.

### **Exercice** B.1.9 Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de $f$ : $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}(x+1)}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

### **Exercice** B.1.10 Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de $f$ : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$.

## B.2 Exercices du chapitre 2

### **Exercice** B.2.1 Simplification Arcsinus

Simplifier :
a) $\text{Arcsin}\,(\sin \frac{3\pi}{4})$.

b) $\text{Arcsin}\,(\sin \frac{7\pi}{2})$.

### **Exercice** B.2.2 Simplification Arcsinus

Simplifier :
a) $\sin(\text{Arcsin}\, x)$.

b) $\cos(\text{Arcsin}\, x)$.

### **Exercice** B.2.3 Simplification Arccos

Simplifier :
a) $\text{Arccos}\,(\cos(-\frac{\pi}{2}))$.

b) $\cos(\text{Arccos}\, x)$.

c) $\sin(\text{Arccos}\, x)$.

### **Exercice** B.2.4 Simplification Arctan

Simplifier :
a) $\text{Arctan}\,(\tan(\frac{5\pi}{4}))$.

b) $\text{Arctan}\,(\tan(\frac{5\pi}{3}))$.

### **Exercice** B.2.5 Simplification Arctan

Simplifier :

a) $\tan(\text{Arctan}\, x)$.

b) $\cos(\text{Arctan}\, x)$.

c) $\sin(\text{Arctan}\, x)$.

**Exercice** B.2.6 Logarithme

Calculer
a) $\ln \frac{1}{\mathrm{e}}$.

b) $\ln \mathrm{e}^{3}$.

**Exercice** B.2.7 Equation logarithmique

Résoudre $\ln(1-x) - 2\ln(x+1) = 0$.

**Exercice** B.2.8 Dérivée de fonction logarithmique

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{\ln(\sin x)}{x}$ et donner le domaine de définition de la dérivée.

**Exercice** B.2.9 Equation exponentielle

Résoudre $\mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x} - 5 = 0$.

**Exercice** B.2.10 Inéquation exponentielle

Résoudre $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2}{\mathrm{e}^{x} - 1} \geq 1$.

**Exercice** B.2.11 Dérivée sous forme d'exponentielle

Calculer la dérivée de $f(x) = (x+1)^{\sin x}$ et donner le domaine de définition.

**Exercice** B.2.12 Equation hyperbolique

Résoudre $3\,\mathrm{ch}\, x + 2\,\mathrm{sh}\, x = 4$.

## **Exercice** B.2.13 Equation hyperbolique

Résoudre $\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} x = 1$.

## B.3 Exercices du chapitre 3

### **Exercice** B.3.1 Produit de d.l.

Donner le d.l. de $g$ à l'ordre 4 au $V(0)$ : $g(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(\cos(2x) - 1)$.

### **Exercice** B.3.2 D.l en un point non nul

Donner le d.l. de $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x_0 = 2$ et $n = 3$.

### **Exercice** B.3.3 D.l en un point non nul

Donner le d.l. de $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ pour $x_0 = 2$ et $n = 3$.
On utilisera les résultats de l'exercice B.3.2.

### **Exercice** B.3.4 Asymptote

Soit $f(x) = x^2 \text{Arctan} \dfrac{1}{x-1}$.
Rechercher l'existence d'asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au $V(\pm\infty)$ et étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

### **Exercice** B.3.5 Asymptote

Etude des branches infinies de $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{x^2-1}}$

### **Exercice** B.3.6 Equivalent

Donner un équivalent au $V(0)$ de $f(x) = \mathrm{e}^x + \cos x - 2 - x$ en utilisant un d.l. de $f$.

### **Exercice** B.3.7 Equivalent

Donner un équivalent au $V(0)$ de $f(x) = \ln(\cos x)$ en utilisant un d.l. de $f$.

## **Exercice** B.3.8 Equivalent

Déterminer un équivalent de

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x^2\cos^2 x}\right), \quad x \in V(0^+)$$

## **Exercice** B.3.9 Equivalent

Déterminer un équivalent de

$$f(x) = (1-\cos x)^{\alpha}, \quad x \in V(0^+),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

## **Exercice** B.3.10 Calcul de limite

Déterminer la limite en 0 de

$$f(x) = \frac{\sin x\left(\ln(1+x^2)\right)}{x\tan x}$$

## **Exercice** B.3.11 Calcul de limite

Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

## **Exercice** B.3.12 Calcul d'équivalent

Donner un équivalent au $V(0)$ de

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} - \sqrt{1+2x}$$

En déduire

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$$

## **Exercice** B.3.13 Asymptote à une courbe

Asymptote et position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote.

$$f(x) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, \quad x \in V(\pm\infty)$$

## **Exercice** B.3.14 Asymptote à une courbe

Asymptote et position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote.

$$f(x) = \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2-1}$$

## **Exercice** B.3.15 Exo bilan

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+\sin x}$.

## **Exercice** B.3.16 Exo bilan

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{x}{\sin x}$.

## **Exercice** B.3.17 Exo bilan

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto e^{\cos x}$.

## **Exercice** B.3.18 Exo bilan

$DL_3(0)$ de $x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

## **Exercice** B.3.19 Exo bilan

$DL_3(+\infty)$ de $t \longmapsto \dfrac{1+t}{2+t^2}$.

**Exercice** B.3.20 Exo bilan

$DL_2(+\infty)$ de $x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}} \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$.

**Exercice** B.3.21 Exo bilan

$DL_3(2)$ de $x \longmapsto \sin x$

**Exercice** B.3.22 Exo bilan

$DL_4(1)$ de $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$

**Exercice** B.3.23 Exo bilan

Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^m-1}$ avec $m \neq 0$.

**Exercice** B.3.24 Exo bilan

Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x$.

**Exercice** B.3.25 Exo bilan

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (cos\frac{1}{x} - 1)x^2$

**Exercice** B.3.26 Exo bilan

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

**Exercice** B.3.27 Exo bilan

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n$

**Exercice** B.3.28 Exo bilan

Donner un équivalent de $(1+\frac{1}{n})^n - e$.

## **Exercice** B.3.29 Exo bilan

Etude des branches infinies de la fonction

$$f(t) = \frac{t^2 - 2t - 1}{t} e^{\frac{1}{t}}$$

1. Poser $x = \frac{1}{t}$ et $g$ telle que $g(x) = f(\frac{1}{x})$. Alors $g(x)$?
2. Déterminer $\alpha$ tel que $x^\alpha g(x)$ admette une limite finie non nulle quand $x$ tend vers 0.
3. Ecrire le d.l. de $xg(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
4. En déduire l'existence d'une droite $\Delta$ d'équation $y = at + b$ telle que $\lim_{t \to \pm\infty} (f(t) - (at + b)) = 0$.

   Donner un équivalent en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(t) - (at + b)$, étudier le signe de cet équivalent et préciser la position relative entre la courbe et la droite $\Delta$ à l'infini. La droite $\Delta$ est appelée l'asymptote de la courbe de $f$.

## **Exercice** B.3.30 Exo bilan

Etude des branches infinies de la fonction

$$f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

# Annexe C

# Les documents

## Table des documents


C.1 : Documents du chapitre 2 . . . . . . . . . . 112
Document C.1.1 : Démonstration des fonctions comparées . . . . . . . . . . 112
Document C.1.2 : Formule hyperbolique . . . . . . . . . . 112
Document C.1.3 : Expression de Argsh en fonction du logarithme . . . . . . . . . . 113
Document C.1.4 : Expression de Argch en fonction du logarithme . . . . . . . . . . 113
Document C.1.5 : Expression de Argth en fonction du logarithme . . . . . . . . . . 113
C.2 : Documents du chapitre 3 . . . . . . . . . . 115
Document C.2.1 : Quotient de d.l. . . . . . . . . . . 115
Document C.2.2 : Démonstration sur la composition des équivalents particuliers . . . 115

## C.1 Documents du chapitre 2

### **Document** C.1.1 Démonstration des fonctions comparées

Démontration au $V(+\infty)$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

$\forall t \geq 1, \quad \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ d'où $\forall x > 1, \quad \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt.$

Alors $x > 1, \quad 0 < \ln x \leq 2\left(\sqrt{x}-1\right) \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

b) $\forall \alpha > 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$

Posons $t = x^\alpha$ alors $t \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ (car $\alpha > 0$).

Donc $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{\alpha \ln t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

c) $\forall(\alpha > 0, \ \beta > 0), \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

$\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après *b)*.

d) $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty.$

Posons $t = \mathrm{e}^x$ alors $t \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

$\dfrac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha} = \dfrac{t^\beta}{(\ln t)^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après *c)*.

### **Document** C.1.2 Formule hyperbolique

Démonstration de : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^x$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^{-x}$$

donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

## **Document** C.1.3 Expression de Argsh en fonction du logarithme

Démonstration de : $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Soit $y = \operatorname{Argsh} x$ alors $x = \operatorname{sh} y,\ x \in \mathbb{R}$.

Or $\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y = \mathrm{e}^y$ et $\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y = 1 + x^2$.

Comme $\operatorname{ch} y \geq 0$, on a : $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2}$.

Par suite,
$$\mathrm{e}^y = \sqrt{1+x^2} + x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

## **Document** C.1.4 Expression de Argch en fonction du logarithme

Démonstration de : $\forall x \geq 1,\ \operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

Soit $y = \operatorname{Argch} x$ alors $x = \operatorname{ch} y$ et $y \geq 0$

Or $\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y = \mathrm{e}^y$ et $\operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1 = x^2 - 1$.

Comme $y > 0$, on a : $\operatorname{sh} y \geq 0$ et $\operatorname{sh} y = \sqrt{x^2-1}$.

Par suite,
$$\mathrm{e}^y = \sqrt{x^2-1} + x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

## **Document** C.1.5 Expression de Argth en fonction du logarithme

Démonstration de : $\forall x \in ]-1,1[,\ \operatorname{Argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

$\forall x \in ]-1,1[,\ y = \operatorname{Argth} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{th} y = \dfrac{\mathrm{e}^{2y}-1}{\mathrm{e}^{2y}+1}.$

Posons $t = \mathrm{e}^{2y}$ alors $x = \dfrac{t-1}{t+1} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \dfrac{1-x}{1+x}.$

Par suite,

$$\mathrm{e}^{2y} = \frac{1-x}{1+x} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

# C.2 Documents du chapitre 3

## **Document** C.2.1 Quotient de d.l.

On suppose $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et que $f$ et $g$ admettent un d.l. à l'ordre $n$ au $V(0)$ alors :

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x), \quad p \geq 1, \quad a_p \neq 0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m+1}x^{p+1} + \cdots + b_n x^n + x^n\varepsilon(x), \quad m \geq 1, \quad b_m \neq 0$$

Si $p < m$, on a : $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est infinie, il n'y a donc pas de d.l.
Si $p \geq m$, on a : $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est finie ; on va montrer que dans ce cas $h = \frac{f}{g}$ admet un d.l. à l'ordre $n - m$.

Posons $s = p - m$ alors $s \geq 0$ et $p = m + s$.
En simplifiant la fraction par $x^m$

$$h(x) = \frac{a_p x^s + a_{p+1}x^{s+1} + \cdots + a_n x^{n-m} + x^{n-m}\varepsilon(x)}{b_m + b_{m+1}x + \cdots + b_n x^{n-m} + x^{n-m}\varepsilon(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$f_1$ et $g_1$ ont un d.l. au $V(0)$ à l'ordre $n - m$ avec $g_1(0) = b_m \neq 0$.
On est donc ramené au cas *i)* dans le d.l. d'un quotient.

**Remarque C.1** *Pour avoir le d.l. de $h$ à l'ordre $n$, il faudra prendre le d.l. de $f$ et $g$ à l'ordre $n + m$.*

## **Document** C.2.2 Démonstration sur la composition des équivalents particuliers

Démonstration des résultats sur la composition.

On va utiliser la seconde définition de l'équivalent.

Si on a $u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x)$ alors $\dfrac{u(x)}{v(x)} = 1 + \varepsilon(x), \quad \lim_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1.$
Alors

i) $\dfrac{\ln u(x)}{\ln v(x)} = \dfrac{\ln\left(v(x)(1+\varepsilon(x))\right)}{\ln v(x)} = \dfrac{\ln v(x) + \ln(1+\varepsilon(x))}{\ln v(x)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\varepsilon(x))}{\ln v(x)}$

Or si $\ln v(x)$ n'a pas comme limite 0, on a

$$\frac{\ln(1+\varepsilon(x))}{\ln v(x)} \underset{x_0}{\sim} \frac{\varepsilon(x)}{\ln v(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

et par suite

$$\ln u(x) \underset{x_0}{\sim} \ln v(x)$$

ii) si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)^{\alpha} = 1$

Par suite

$$(u(x))^{\alpha} \underset{x_0}{\sim} (v(x))^{\alpha}$$

iii) $\dfrac{\mathrm{e}^{\,u(x)}}{\mathrm{e}^{\,v(x)}} = \mathrm{e}^{\,u(x)-v(x)} \to 1$ si $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) - v(x) = 0$

# Entrées canoniques

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## A

Applications . . . . **76**
Arccos . . . . **36**
Arcsin . . . . **34**
Arctan . . . . **38**
Argch . . . . **53**
Argsh . . . . **51**
Argth . . . . **55**
Asymptote . . . . **68**

## C

Ch . . . . **47**
Classe $\mathcal{C}^n$ . . . . **29**
Comparaison fonction . . . . **45**
Composition . . . . **14**
Continuité en un point . . . . **21**
Continuité sur un intervalle . . . . **22**

## D

D.l. Généralisé ou asymptotique . . . . **67**
D.l. près d'un point . . . . **66**
Dérivée . . . . **25**
Développement limité . . . . **60**
Différentielle . . . . **27**

## E

Equivalent . . . . **69**
Equivalents de fonctions usuelles . . . . **75**
Exercices bilan équivalent . . . . **78**
Exercices bilan d.l. . . . . **77**
Exp . . . . **42**

## F

Fonction . . . . **8**
Formules hyperboliques . . . . **50**

## G

Graphe . . . . **9**

## I

Intervalle, segment . . . . **6**

## L

Limite . . . . **15**
Limite à droite, à gauche . . . . **18**
Limite en l'infini . . . . **17**
Limite en un point . . . . **16**
Ln . . . . **40**

## M

Majorée, minorée, bornée . . . . **11**
Maximum-Minimum . . . . **24**
Monotone . . . . **10**

## N

Négligeable . . . . **74**

## O

Opérations sue les limites . . . . **19**
Opérations sur les dérivées . . . . **28**
Opérations sur les fonctions continues . . . . **23**

# P

Périodicité . . . . . . . . . . 13
Parité . . . . . . . . . . 12
Pièges avec les équivalents . . . . . . . . . . 73
Propriétés des équivalents . . . . . . . . . . 71
Propriétés sur les d.l. . . . . . . . . . . 61
Puissance . . . . . . . . . . 44

# R

Règles de Calcul des d.l. . . . . . . . . . . 64
Réciproque . . . . . . . . . . 33

# S

Sh . . . . . . . . . . 46

# T

Tableau de d.l. . . . . . . . . . . 63
Tableau des dérivées . . . . . . . . . . 30
Tangente à une courbe . . . . . . . . . . 26
Taylor . . . . . . . . . . 58
Taylor-Young . . . . . . . . . . 59
Th . . . . . . . . . . 49

# V

Voisinage . . . . . . . . . . 7