Mathématiques

Regroupement 2
Intégration

Formation Continue

Cycle préparatoire

Fabrice Dodu
Sandrine Scott

Année 2007-2008

1 Remerciements

Je tiens à remercier Fabrice Dodu qui a élaboré un cours d'intégration pour le cycle préparatoire de la formation continue dont ce cours-ci s'inspire beaucoup. J'en profite également pour le remercier pour l'aide très précieuse qu'il m'a apportée lorsque j'ai eu des problèmes avec le logiciel polytex.

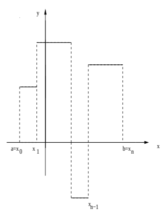
Chapitre I
Intégrales simples

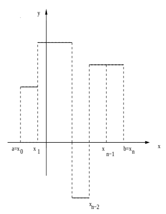
I.1 Intégration des fonctions en escalier

Définition I.1 *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$. σ est appelée **subdivision** de $[a,b]$ si $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Le **pas** de la subdivision σ est le réel $P(\sigma) = \sup\limits_{1\leq j\leq n} (x_j - x_{j-1})$. Chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ pour $j = 1, \cdots, n$ est appelé **intervalle de la subdivision**. Si pour tout j, $0 \leq j \leq n$, $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$ alors on dit que σ est une subdivision régulière d'ordre n de $[a,b]$.*

Définition I.2 *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$.*
*Une application $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** (sur $[a,b]$) s'il existe une subdivision $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, $(1 \leq j \leq n)$.*

Remarque 1 :
- Toute fonction en escalier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est nécessairement bornée.
- Il existe une infinité de subdivision associée à une fonction en escalier.





Définition I.3 *Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.*
*On appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ l'élément de $\mathbb{R}$ noté*

$$\int_a^b f(x)dx$$

défini par

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, f_j \tag{I.1}$$

où $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ est une subdivision de $[a,b]$ et f_j la valeur prise par f sur chaque intervalle $]x_{j-1}, x_j[$.

Remarque 2 :
- D'après la remarque 1, l'intégrale de f sur $[a,b]$ ne dépend pas de la subdivision choisie.
- Une fonction nulle partout sauf sur un ensemble fini de points de $[a,b]$ est une fonction en escalier, son intégrale est nulle.

Lemme I.4 *L'intégrale d'une fonction numérique positive en escalier est positive*

Démonstration : document C.1.1

Proposition I.5 *Soient f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et c un point de $]a,b[$. Alors f est en escalier sur chaque intervalle $[a,c]$ et $[c,b]$.*

Conséquence : Relation de chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

I.2 Intégrales de Riemann

Définition I.6 *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **intégrable** sur $[a,b]$ si, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un couple (g,h) de fonctions numériques en escalier sur $[a,b]$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$ on a* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *et* $\displaystyle\int_a^b (h(x) - g(x))\, dx \leq \varepsilon$

Remarque 3 : pour que l'intégrale de f existe, nécessairement f doit être bornée (car g et h le sont).

Proposition I.7
Si f est une fonction numérique positive et intégrable sur $[a,b]$ alors son intégrale est positive (éventuellement nulle).

Proposition I.8
i) L'ensemble E des fonctions intégrables sur $[a,b]$ est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions réelles sur $[a,b]$.
ii) L'application $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, a une fonction $f \in E$ associe son intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

est une application linéaire sur E. Ceci signifie que $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(f,g) \in E \times E$,

$$I(\lambda f + \mu g) = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \lambda I(f) + \mu I(g)$$

Proposition I.9
Soit c un point de $[a,b]$.
Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$, il faut et il suffit que f soit intégrable sur chaque intervalle $[a,c]$ et $[c,b]$

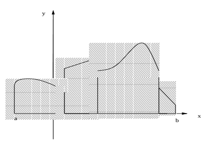
Proposition I.10
Toute fonction numérique monotone sur $[a,b]$ est intégrable.

Théorème I.11
Toute fonction numérique f **continue** *sur $[a,b]$ est intégrable.*

Démonstration : document C.1.2

Interprétation géométrique de l'intégrale

Si f est une fonction positive en escalier sur $[a,b]$, son intégrale définie par la formule (I.1) est la somme des aires des rectangles. On admettra que l'intégrale de f, fonction intégrable positive quelconque, est l'aire du domaine hachuré $D_f = \{a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Remarque 4 : Lorsque f est continue sur $[a,b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est majorée(resp. minorée) par la quantité $\sum_{1\leq j\leq n}(x_j - x_{j-1}) \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$ (resp. $\sum_{1\leq j\leq n}(x_j - x_{j-1}) \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$) appelée somme de Darboux supérieur (resp. inférieur).

Exemple et remarque
Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

L'intégration numérique consiste à "approcher" le réel $\int_a^b f(x)dx$ par une somme finie de la forme $\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1})\, f(\zeta_i)$ où ζ_i est un point appartenant à l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

I.3 Propriétés des fonctions intégrables

Dans cette section, on supposera que f est une fonction numérique intégrable sur $[a, b]$.

Jusqu'a présent, on a défini l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ pour $a < b$.

Par convention, on posera

i) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

ii) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

Proposition I.12
Le produit de deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$.

Proposition I.13
Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors $|f|$ l'est aussi et l'on a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\,\|f\|_\infty$$

où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Démonstration : document C.1.3

Proposition I.14
Soient f et g deux fonctions numériques et intégrables sur $[a, b]$.
Alors on a :
i) Inégalité de Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)$$

ii) Inégalité de Minkowsky :

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

Démonstration : document C.1.4

I.4 Primitive d'une fonction continue

Exemples :
Exemple A.1.1
Exemple A.1.2

Exercices :
Exercice B.1.1

Définition I.15
*On appelle **primitive** d'une fonction f, une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$.*

Théorème I.16
Soit f une fonction numérique et continue sur $[a, b]$. Alors la fonction F définie pour tout $x \in [a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a.
Si G est une autre primitive de f sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b \tag{I.2}$$

Démonstration : document C.1.5

♦ La fonction F définie pour tout $x \in [a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est continue si f est intégrable sur $[a, b]$ et dérivable si f est continue sur $[a, b]$.
♦ ♦ Une fonction intégrable n'admet pas nécessairement de primitive (par exemple les fonctions en escalier).

Théorème I.17 *(1ère formule de la moyenne)*
Si f est une fonction numérique et continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) f(c)$$

Démonstration : document C.1.6

Théorème I.18 *(2ème formule de la moyenne)*
Si f est une fonction numérique et continue sur $[a, b]$ et si g est une fonction numérique positive et intégrable sur $[a, b]$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\, g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

I.5 Intégration par parties

Exemples :
Exemple A.1.3
Exemple A.1.4

Exercices :
Exercice B.1.2

Cette méthode consiste à remplacer le calcul de la primitive d'un produit de deux fonctions par le calcul de la primitive d'un produit plus simple de deux autres fonctions.

Théorème I.19 *(Intégration par parties) Soient f et g deux fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration : document C.1.7

I.6 Changement de variable

Exemples :
Exemple A.1.5
Exemple A.1.6
Exemple A.1.7

Exercices :
Exercice B.1.3
Exercice B.1.4

Cette méthode consiste, comme son nom l'indique, à changer la variable de la fonction que l'on intègre pour obtenir une fonction plus simple à intégrer.

Théorème I.20 *(Changement de variable)*
Soit f *une fonction continue sur* $[a, b]$.
Soit φ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[c, d]$ *telle que* $\varphi(c) = a$ *et* $\varphi(d) = b$.
Alors, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

La transformation $x = \varphi(t)$ *est appelée changement de variable.*

Démonstration : document C.1.8

I.7 Primitives usuelles

La méthode de recherche de primitives consiste, par application de règles générales (changement de variable, intégration par parties,...), à ramener la question au calcul d'un certain nombre de primitives usuelles (à connaitre par cœur). On notera a un réel non nul.

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C^{te}$ si $m \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C^{te}$
$\int e^x dx = e^x + C^{te}$	$\int \ln x dx = x\ln(x) - x + C^{te}$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C^{te}$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C^{te}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + C^{te}$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\frac{1}{\tan(x)} + C^{te}$
$\int \mathrm{ch}(x)dx = \mathrm{sh}(x)dx + C^{te}$	$\int \mathrm{sh}(x)dx = \mathrm{ch}(x)dx + C^{te}$
$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}dx = \mathrm{t}h(x) + C^{te}$	$\int \frac{1}{\mathrm{s}h^2(x)}dx = -\frac{1}{\mathrm{t}h(x)} + C^{te}$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a} + C^{te}$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\|\frac{x-a}{x+a}\| + C^{te}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \mathrm{Argsh}\frac{x}{\|a\|} + C^{te}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{Argch}\frac{x}{a} + C^{te}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\frac{x}{\|a\|} + C^{te}$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arccos}\frac{x}{\|a\|} + C^{te}$

I.8 Primitives de fractions rationnelles

Exemples :
Exemple A.1.8
Exemple A.1.9
Exemple A.1.10
Exemple A.1.11

Exercices :
Exercice B.1.5
Exercice B.1.6

Soit F une fraction rationnelle en la variable x. Après décomposition en éléments simples, on est amené à calculer des primitives de trois types possibles :

i) La partie principale,

ii) des termes de la forme $\frac{1}{(x-a)^n}$

iii) ou de la forme $\frac{ex+f}{(x^2+bx+c)^n}$ avec $b^2-4c<0$

Eléments de la forme i) : Ce sont des fonctions polynomiales et donc ils ne posent pas de problème.

Eléments de la forme ii) : deux cas possibles :

$n=1$ alors on obtient comme primitive $\ln|x-a|+C^{te}$.

$n\neq 1$ alors on obtient comme primitive $\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C^{te}$.

Elément de la forme iii) : On met le trinôme du dénominateur sous sa forme canonique :

$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}=\frac{4c-b^2}{4}\left(\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2+1\right)$

On fait un changement de variable $t=\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$ et on obtient un élément de la forme $\underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^n}}_{(1)}$ et $\underbrace{\frac{t}{(t^2+1)^n}}_{(2)}$.

• <u>Intégrons</u> (1) :
– Si $n=1$, on a fini (car une primitive est $\mathrm{Arctan}(t)$)
– Si $n\geq 2$, on utilise la méthode de l'intégration par parties en posant $f(t)=\frac{1}{(t^2+1)^n}$ et $g'(t)=1$. (cf l'exemple A.1.8)
• <u>Intégrons</u> (2) :
– Si $n=1$ une primitive est $\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)$
– Si $n\geq 2$, une primitive est $\frac{\left(t^2+1\right)^{-n+1}}{2(-n+1)}$.

I.9 Primitives de fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Exemples :
Exemple A.1.12
Exemple A.1.13

Exercices :
Exercice B.1.7

Soit $F(X,Y)$ une fraction rationnelle à deux indéterminées X et Y. On cherche une primitive de f définie par $f(x) = F(\cos x, \sin x)$ où f est une fraction rationnelle en sin et cos.

1. Cas où f est un polynôme en les variables $\sin x$ et $\cos x$.

   Par linéarité de l'intégrale, on est ramené à des primitives du type
   $$I_{n,m} = \int \cos^n x \sin^m x dx.$$
   Deux cas sont à étudier : "m ou n est impair" et "m et n sont pairs".

   Si $n = 2p+1$ alors on utilise $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $I_{2p+1,m} = \displaystyle\int (1-\sin^2 x)^p \cos x \sin^m x dx.$

   On pose $t = \sin x$ et on est ramené au calcul d'une primitive d'une fonction polynôme : $I_{2p+1,m} = \displaystyle\int (1-t^2)^p t^m dt.$

   Si $m = 2q+1$ alors on utilise $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $I_{n,2q+1} = \displaystyle\int \cos^n x(1-\cos^2 x)^q \sin x dx.$

   On pose $t = \cos x$ et comme précédemment on obtient $I_{n,2q+1} = \displaystyle\int -(1-t^2)^q t^n dt.$

   Si $n = 2p$ et $m = 2q$ on linéarise $\cos^{2p} x \sin^{2q} x$. Cela signifie qu'il faut faire apparaître des sommes de termes plus facile à intégrer. (cf exemple A.1.12)

2. Cas général : **Règles de BIOCHE**

   Pour calculer ces primitives, nous allons proposer des changements de variables qui ramènent le calcul de $\displaystyle\int f(x)dx$ à celui d'une primitive d'une fraction rationnelle. Ces changements de variables reposent sur les faits suivants : pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons :
   $$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad \text{et} \quad \tan(\pi + x) = \tan x$$
   Voici la règle qui en découle.
   - Si $f(x)dx$ est invariant par le changement variable $x \mapsto -x$ (c'est-à-dire $f(-x)d(-x) = f(x)dx$), alors on pose $t = \cos x$.
   - Si $f(x)dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi - x$ (c'est-à-dire $f(\pi-x)d(\pi-x) = f(x)dx$), alors on pose $t = \sin x$.
   - Si $f(x)dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi + x$ (c'est-à-dire $f(\pi+x)d(\pi+x) = f(x)dx$), alors on pose $t = \tan x$.
   - Si $f(x)dx$ n'est invariant par aucun des trois changements de variable précédents, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$, avec les formules $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$

   (voir l'exemple A.1.13)

   ♦ Remarque Attention au dernier changement de variable. Il a l'avantage de fonctionner tout le temps (à condition de se placer dans des sous-intervalles de $]-\pi,\pi[$ ne contenant pas de singularité de f) mais il conduit à de nombreux calculs (donc à éviter si possible !).

Rappels

$$\begin{array}{rcl}
\cos(a \pm b) & = & \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \\
\sin(a \pm b) & = & \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\sin(a) \\
\cos(\pi \pm a) & = & -\cos(a) \\
\sin(\pi \pm a) & = & \mp sin(a)
\end{array}$$

I.10 Primitives de fractions rationnelles en sh$x$ et en ch$x$

Exemples :
Exemple A.1.14

Exercices :
Exercice B.1.8

La méthode est la même que pour les fonctions rationnelles trigonométriques. Pour calculer $\displaystyle\int F(\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x)dx$, on examine $\displaystyle\int F(\cos x, \sin x)dx$.

- Si $\displaystyle\int F(\cos x, \sin x)dx$ se calcule avec $t = \cos x$ alors $\displaystyle\int F(\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x)dx$ se calcule avec $t = \mathrm{ch}x$.
- Si $\displaystyle\int F(\cos x, \sin x)dx$ se calcule avec $t = \sin x$ alors $\displaystyle\int F(\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x)dx$ se calcule avec $t = \mathrm{sh}x$.
- Si $\displaystyle\int F(\cos x, \sin x)dx$ se calcule avec $t = \tan x$ alors $\displaystyle\int F(\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x)dx$ se calcule avec $t = \mathrm{th}x$.
- Si $\displaystyle\int F(\cos x, \sin x)dx$ se calcule avec $t = \tan(\frac{x}{2})$ alors $\displaystyle\int F(\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x)dx$ peut se calculer avec $t = \mathrm{th}(\frac{x}{2})$, mais il est préférable d'utiliser le changement $t = e^x$.

Rappels

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Argsh}x & = & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ \mathrm{Argch}x & = & \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\ \mathrm{Argth}x & = & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \end{array}$$

Remarque : Plus généralement, si f est une fraction rationnelle en la variable e^x, on fait le changement de variable $t = e^x$ et on est ramené au calcul de la primitive d'une fraction rationnelle en t.

I.11 Primitives de fractions rationnelles de type $F\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Exemples :
Exemple A.1.15

Soit $F\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ avec $ad-bc \neq 0$.
On fait le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ qui ramène le calcul à celui d'une primitive d'une fraction rationnelle de t.

I.12 Primitives de fractions rationnelles de type $F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Exemples :
Exemple A.1.16

Exercices :
Exercice B.1.9

Soit à intégrer $F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ avec $a \neq 0$ sinon on est ramené au cas précédent. Ces intégrales sont appelées des **intégrales Abéliennes**.

Rappels

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}\,(\mathrm{Argsh}x) & = & \sqrt{x^2+1} \\ \mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}x) & = & \sqrt{x^2-1} \end{array}$$

Posons $\triangle = b^2 - 4ac$. On suppose que $\triangle \neq 0$ sinon on a affaire à une fraction rationnelle de x.

On ecrit le trinôme sous sa forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a\Big(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\Big)$$

Soit $y^2 = a\Big(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\Big)$ alors suivant le signe de a, on a affaire à une ellipse ou à une hyperbole.

1er Cas : $a > 0$. (Hyperbole)

$\triangle < 0$. On fait le changement de variable $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{-\triangle}}{2a}\,\mathrm{sh}t$.

$\triangle > 0$. On a deux racines différentes $\alpha < \beta$.

pour $x \leq \alpha$, on pose $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\,\mathrm{ch}t$ (et donc $\mathrm{ch}t \geq 1$).

pour $x \geq \beta$, on pose $x + \frac{b}{2a} = +\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\,\mathrm{ch}t$ (et donc $\mathrm{ch}t \geq 1$).

Ces changements de variables nous ramènent au calcul de fractions rationnelles hyperboliques.

2ème Cas : $a < 0$. (Ellipse) (nécessairement on a $\triangle > 0$ sinon, ax^2+bx+c serait toujours négatif).

On prend comme changement de variables $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\cos t$ avec $t \in]0, \pi[$

I.13 Primitives de fonctions de type $e^{at} * P_n(t)$

Exemples :
Exemple A.1.17

On utilise l'intégration par parties pour diminuer le degré du polynôme devant l'exponentielle.

On peut aussi directement rechercher une primitive de la forme $e^{at} * Q_n(t)$ où Q_n est un polynôme de même degré que P_n.

I.14 Quelques exercices en plus

Exercices :
Exercice B.1.10
Exercice B.1.11
Exercice B.1.12
Exercice B.1.13
Exercice B.1.14

Chapitre II
Intégrales généralisées

II.1 Problématique

Dans le chapitre précédent, nous avons traité la question de l'intégrale d'une fonction continue sur un domaine fermé et borné de $\mathbb{R}$. Ce chapitre sera consacré à l'étude des intégrales sur des domaines non fermés ou non bornés de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire comment donner un sens à des intégrales comme

$$\int_0^1 \ln x dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dans un premier temps, on étudiera les fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a,b[\,,$ avec $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ ou $]a,b]\,,$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$, les intervalles de la forme $]a,b[\,,$ avec $(-\infty \leq a < b \leq$ s'y ramenant en décomposant ces intervalles en deux intervalles semi-ouverts.

De telles intégrales sont appelées **intégrales impropres** ou **intégrales géneralisées**.

II.2 Définitions

Exemples :
Exemple A.2.1
Exemple A.2.2
Exemple A.2.3

Exercices :
Exercice B.2.1

Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et f une application de $I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition II.21 *On dit que f est **localement intégrable** sur I si la restriction de f à chaque sous intervalle fermé et borné de I est intégrable.*

Définition II.22
Soit f une fonction numérique localement intégrable sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$.
On dit que f est intégrable sur $[a, b[$ si la fonction

$$F := t \mapsto \int_a^t f(x)dx$$

*admet une limite finie quand t tend vers b. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est alors dite **convergente**.*

*Si la limite est infinie, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est **divergente**.*

Par symétrie, on dit que f est intégrable sur $]a, b]$, $(-\infty \leq a < b < +\infty)$ si

$$\lim_{t \to a} \int_t^b f(x)dx < +\infty$$

Définition II.23 *Soit f une fonction numérique localement intégrable sur $]a, b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$.*
On dit que f est intégrable sur $]a, b[$ si pour tout point c quelconque de $]a, b[$ les intégrales

$$\int_a^c f(x)dx \quad et \quad \int_c^b f(x)dx$$

sont convergentes.

Dans ce cas, on posera $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Remarque : $\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^a f(x)dx \,\exists \not\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \,\exists$ (cf exemple A.2.3).

Cas particulier Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ (respectivement sur $]a, b]$). On suppose de plus que f est prolongeable par continuité en b (respectivement en a), c'est à dire que la limite quand x tend vers b (respectivement vers a) de $f(x)$ est une valeur finie l.

Alors si $\tilde{f}$ est la fonction définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [a, b[\text{ (respectivement } x \in]a, b]) \\ l & \text{si} \quad x = b \text{ (respectivement } x = a), \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est continue sur $[a, b]$ donc intégrable sur $[a, b]$ et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. On a de plus

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx$$

II.3 Critères de convergence pour les fonctions positives

Exemples :
Exemple A.2.4
Exemple A.2.5

Exercices :
Exercice B.2.2
Exercice B.2.3

Pour savoir si une intégrale généralisée converge ou pas, la méthode consiste à comparer la fonction qu'on intègre avec d'autres fonctions, au moyen de majorations ou d'équivalents et de se ramener à des intégrales généralisées dont on connait la nature. Il est donc important d'avoir des intégrales de référence.

1. Convergence des intégrales de Riemann

Théorème II.24 *Intégrales de références*

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

$$\int_{0}^{b>0} \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1$$

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{|x-b|^\alpha}dx \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1$$

Démonstration : document C.2.1

2. Comparaison par majoration.

Nous allons énoncer plusieurs théorèmes qui vont nous permettre de connaître la nature d'une intégrale généralisée, dès que la fonction sera encadrée par des fonctions dont on connaît la nature des intégrales.

Théorème II.25
Soit f une fonction numérique positive et localement intégrable sur $[a, b[$, avec $(-\infty < a < b \leq +\infty)$.
$\int_a^b f(x)dx$ converge ssi il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b[\, , \int_a^x f(x)dx \leq M$$

Démonstration : document C.2.2

Théorème II.26 *Soient f et g deux fonctions numériques positives sur $[a, b[$ telles que pour tout $x \in [a, b[$*
$0 \leq f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b[$.
- *si l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ converge, il en est de même pour $\int_a^b f(x)dx$*
- *si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge, il en est de même pour $\int_a^b g(x)dx$*

Démonstration : document C.2.3

3. Comparaison par équivalents.

Théorème II.27 *Soient* f *et* g *deux fonctions numériques continues sur* $[a, b[$ *telles que* $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ *et de signe constant au voisinagede* b $(V(b))$. *Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge} \iff \int_{c \in V(b)}^b g(x)dx \text{ converge}$$

Démonstration : document C.2.4

II.4 Intégrales absolument convergentes

Le paragraphe précédent donnait des critères de convergence lorsque les fonctions qu'on intégrait étaient positives. Nous allons essayer de regarder ce que l'on peut faire lorsque les fonctions changent de signe.

Définition II.28 *Soit f une fonction localement intégrable sur I.*
On dit que l'intégrale de f sur I est ***absolument convergente*** *si l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.*

Théorème II.29

$$\int_a^b |f(x)|dx \quad \textit{converge} \quad \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \textit{converge}$$

Remarque L'intérêt du théorème précédent réside dans le fait que pour étudier la convergence de l'intégrale d'une fonction f de signe non constant, on étudie la convergence de l'intégrale de $|f|$ qui elle est positive et on peut appliquer les théorèmes de comparaison sur les fonctions positives.

Définition II.30
On dit qu'une intégrale est ***semi-convergente*** *si elle converge sans être absolument convergente.*

II.5 Théorèmes pratiques

Théorème II.31 *Changement de variables*
Soit $\varphi :]a,b[\longrightarrow]\alpha,\beta[$ *une* <u>*bijection*</u> *de classe* $\mathcal{C}^1$.

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \quad \textit{converge} \iff \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt \quad \textit{converge}$$

Si elles convergent, on a : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$

Théorème II.32 *Intégration par parties*
Soient f *et* g *deux fonctions de classes* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]\alpha,\beta[$ *telles que :*
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) < +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) < +\infty$.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx \quad \textit{converge} \quad \iff \int_a^b f(x)g'(x)dx \quad \textit{converge}$$

Si une intégrale converge alors, on a :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - \lim_{x\to a} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Annexe A
Exemples

A.1 Exemples du chapitre I

Exemple A.1.1

Donnons une primitive des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = x^3 - 3x^2 + x - 4, \quad \text{et} \quad f_3(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Ces trois fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, elles admettent donc des primitives. Il faut trouver des fonctions F_1, F_2 et F_3 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_1'(x) = f_1(x), \quad F_2'(x) = f_2(x) \quad \text{et} \quad F_3'(x) = f_3(x)$$

Il est évident que pour bien calculer les primitives, il faut d'abord maitriser la dérivation.

On cherche donc la fonction dont la dérivée est la fonction cos . Il s'agit de la fonction sin . Les primitives de f_1 sont donc de la forme

$$F_1(x) = \sin x + C \quad \text{où} \quad C \quad \text{est une constante réelle.}$$

La fonction f_2 est une fonction polynôme. Si on dérive une fonction polynôme, son degré diminue. Par conséquent, lorsqu'on intègre une fonction polynôme, son degré doit augmenter. De plus, la dérivée de x^n est nx^{n-1} : il apparait une constante.

Ces considérations conduisent au fait qu'une primitive de x^n pour $n \geq 1$ est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Ainsi,

$$F_2(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 4x + D \quad \text{où} \quad D \quad \text{est une constante réelle.}$$

En examinant f_3, on constate que le numérateur est, à une constante près, la dérivée du dénominateur. La fonction f_3 est donc de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est une fonction de x. Or on sait que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
Ainsi,

$$F_3(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \lambda \quad \text{où} \quad \lambda \quad \text{est une constante réelle.}$$

Exemple A.1.2

Donnons une primitive des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$g_1(x) = \cos x \sin x \quad \text{et} \quad g_2(x) = x^2(1+x^3)^2$$

Pour g_1 on reconnaît, à une constante près, une fonction de la forme $u'u$ avec $u(x) = \sin x$, donc

$$G_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + A \quad \text{où} \quad A \quad \text{est une constante réelle.}$$

On peut aussi utiliser les formules trigonométriques et remarquer que $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ dont une primitive est $-\frac{1}{4}\cos(2x)$ et on pourrait dire que les primitives de g_1 sont les fonctions de la forme

$$H_1(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + B \quad \text{où} \quad B \quad \text{est une constante réelle.}$$

Mais comme $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ on obtient bien

$$H_1(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + B = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x + B = G_1 \quad \text{en posant} \quad A = B - \frac{1}{4}$$

Pour g_2 on reconnaît, à une constante près, une fonction de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = (1+x^3)$, donc

$$G_2(x) = \frac{1}{9}(1+x^3)^3 + C \quad \text{où} \quad C \quad \text{est une constante réelle.}$$

Exemple A.1.3

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$. On pose

$$\begin{array}{rcl} f(x) = x & \Rightarrow & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{-x} & \Rightarrow & g(x) = -e^{-x}, \end{array}$$

et on obtient :

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx = [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -\frac{2}{e} + 1.$$

Au passage, ceci prouve qu'une primitive de $x \mapsto xe^{-x}$ est $-xe^{-x} - e^{-x}$.

Exemple A.1.4

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx = \int_1^2 1 \times \ln x dx$. On pose

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \ln x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & \Rightarrow & g(x) = x, \end{array}$$

et on obtient :

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = [x \ln x]_1^2 - [x]_1^2 = [x \ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Au passage, ceci prouve qu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \ln x - x$.

Exemple A.1.5

Soit f une fonction intégrable sur $[-a; a]$ avec $a > 0$.
Par la formule de Chasles, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$.
Faisons le changement de variable $x = \varphi(t) = -t$ dans la première intégrale. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, 0]$, $dx = \varphi'(t)dt = -dt$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(0)} f(x)dx &= \int_a^0 f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^0 f(-t)(-dt) \\ &= \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx, \end{aligned}$$

car la variable d'intégration est muette. Par suite,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (f(-x) + f(x))dx.$$

Cas particuliers
– Si f est paire alors pour tout x, $f(-x) = f(x)$ donc

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

– Si f est impaire alors pour tout x, $f(-x) = -f(x)$ donc

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

En résumé, l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle, celle d'une fonction paire est égale à deux fois l'intégrale sur $[0, a]$.

Exemple A.1.6

Soit f une fonction périodique de période T ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. Supposons f intégrable sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$. Pour cela, nous allons effectuer le changement de variable $x = \varphi(t) = t + T$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $dx = \varphi'(t)dt = dt$. Ainsi,

$$I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(t+T)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Exemple A.1.7

Calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sh}(\sin t)\cos t dt$. Posons $x = \varphi(t) = \sin t$.
Nous avons $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ on a de plus en dérivant,

$$dx = \varphi'(t)dt = \cos t dt$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sh}(\sin t)\cos t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sh}(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \mathrm{sh} x dx = \int_0^1 \mathrm{sh} x dx = [\mathrm{ch} x]_0^1 = \mathrm{ch}1 - 1.
\end{aligned}$$

Exemple A.1.8

Calculons les primitives de $t \longmapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$ pour $n \geq 2$. Notons $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$. On souhaite obtenir une formule de récurrence sur I_n. Pour cela, effectuons le changement de variable proposé dans le cours.

On pose $f(t) = \frac{1}{(t^2+1)^n}$ et $g'(t) = 1$ donc $f'(t) = \frac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}}$ et $g(t) = t$ ainsi,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + \int \frac{2nt^2}{(t^2+1)^{n+1}}dt \\
&\quad \text{on remarque que } 2nt^2 = 2n(t^2+1) - 2n \text{ donc} \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + \int \frac{2nt^2+2n}{(t^2+1)^{n+1}}dt - \int \frac{2n}{(t^2+1)^{n+1}}dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}
\end{aligned}$$

donc $2nI_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \dfrac{t}{(t^2+1)^n}$ pour $n \geq 1$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{3}{4}I_2 + \frac{t}{4\,(t^2+1)^2} \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}I_1 + \frac{t}{2\,(t^2+1)}\right) + \frac{t}{4\,(t^2+1)^2} \\
&= \frac{3}{8}\mathrm{Arctan} t + \frac{3t}{8\,(t^2+1)} + \frac{t}{4\,(t^2+1)^2} + C^{te}
\end{aligned}$$

Exemple A.1.9

Calculons $\displaystyle\int \frac{5x+17}{(x+2)\,(x-5)}dx$.

La première des choses à faire est de décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{5x+17}{(x+2)(x-5)} = \frac{6}{x-5} - \frac{1}{x+2}$$

Ensuite, on intègre chacun des éléments simples qui sont de la forme $\dfrac{1}{(x-a)}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+17}{(x+2)(x-5)}dx &= 6\int \frac{dx}{x-5} - \int \frac{dx}{x+2} \\ &= 6\ln|x-5| - \ln|x+2| + C^{te}\end{aligned}$$

Exemple A.1.10

Calculons $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$.
Là encore, il faut commencer par décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

On intègre ensuite chacun des éléments simples, qui sont de la forme $\dfrac{1}{(x-a)^n}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx &= \int \frac{dx}{(x+1)^3} - \int \frac{2dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x+1} \\ &= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} + \ln|x+1| + C^{te}\end{aligned}$$

Exemple A.1.11

Calculons $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

La première chose à faire est de décomposer la fraction en éléments simples, or ici, elle est déja décomposée. Il faut donc l'intégrer directement. C'est une fraction de la forme $\dfrac{1}{(x^2+bx+c)^n}$ avec $b^2-4c<0$. Il faut donc écrire le dénominateur sous sa forme canonique :

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

On fait ensuite le changement de variable $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ donc $dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}dx$. On obtient alors

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)} \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{3}{2\sqrt{3}}dt}{t^2+1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arctan } t + C^{te} \quad \text{puis on revient à la variable } x \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arctan }\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C^{te}\end{aligned}$$

Exemple A.1.12

– Calcul de $\int \sin^5 x dx$. Il s'agit d'intégrer une fonction polynôme en les variable $\sin x$ et $\cos x$ avec $n = 0$ et $m = 5$. L'entier m est impair, on pose donc $t = \cos x$, d'où $dt = -\sin x dx$ et

$$\int \sin^5 x dx = \int -(1-t^2)^2 dt = \int (-t^4 + 2t^2 - 1) dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t + C^{te}$$

d'où

$$\int \sin^5 x dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^3 x}{3} - \cos x + C^{te}.$$

– Calcul de $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$. Il s'agit d'intégrer une fonction polynôme en les variable $\sin x$ et $\cos x$ avec $n = 4$ et $m = 2$. Les entiers n et m sont pairs, il faut donc linéariser. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} \cos^4 x \sin^2 x & = & \cos^2 x \cos^2 x \sin^2 x, \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1), & & \sin^2 X = \frac{1}{2}(1 - \cos 2X) \\ \text{et} \quad \sin 2x & = & 2 \cos x \sin x \\ \text{donc} \quad \cos^2 x \sin^2 x = (\cos x \sin x)^2 & = & \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \int \cos^4 x \sin^2 x dx & = & \int \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \frac{\sin^2 2x}{4} dx \\ & = & \frac{1}{8} \int \cos 2x \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) dx \\ & = & \frac{1}{8} \int \cos 2x \sin^2 2x dx + \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx \\ & = & \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C^{te}. \end{array}$$

Exemple A.1.13

1. $J_1 = \int f(x) dx$ avec $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \sin 2x}$. $f(x)dx$ est invariant par le changement $x \mapsto -x$, il faut donc poser $t = \cos x$ donc $dt = -\sin x dx$. Nous allons multiplier le numérateur et le dénominateur par $-\sin x$ pour avoir le dt au numérateur et ensuite, se débrouiller pour ne faire apparaitre que des $\cos x$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{\sin x + \sin 2x} & = & \dfrac{-\sin x dx}{-\sin^2 x - \sin x(2 \sin x \cos x)} \\ & = & \dfrac{-\sin x dx}{-\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x} \\ & = & \dfrac{-\sin x dx}{\cos^2 x - 1 - 2\cos x(1 - \cos^2 x)} \\ & = & \dfrac{dt}{t^2 - 1 - 2t(1 - t^2)} = \dfrac{dt}{(t-1)(t+1)(2t+1)} \\ & = & \dfrac{1}{6} \dfrac{dt}{t-1} + \dfrac{1}{2} \dfrac{dt}{t+1} - \dfrac{2}{3} \dfrac{2dt}{2t+1} \end{array}$$

en utilisant le fait que $\sin 2x = 2\cos x \sin x$, que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ puis en factorisant $2t^3 + t^2 - 2t - 1$ et enfin en décomposant la fraction $\dfrac{dt}{(t-1)(t+1)(2t+1)}$.

Par suite,

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{2}{3}\ln|2t+1| + C \\ & \quad \text{pui en revenant à la variable } x \\ &= \frac{1}{6}\ln|\cos x - 1| + \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| - \frac{2}{3}\ln|2\cos x + 1| + C. \end{aligned}$$

2. $J_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$

Le quotient $\dfrac{dx}{2+\sin x}$ n'étant invariant par aucun des trois changements de variable, on pose $t = \tan\frac{x}{2}$ donc $dx = \dfrac{2dt}{(1+t^2)}$ et $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{(1+t^2)} \\ &= \int \frac{dt}{t^2+t+1} \qquad\qquad (\text{ voir calcul de } I) \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arctan } t + C^{te} \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\text{Arctan } \left(\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\right)\right) + C^{te} \end{aligned}$$

Exemple A.1.14

1. $K_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\text{sh}x + \text{sh}2x}$.

D'après l'étude de J_1, il faut poser $t = \text{ch}x$ mais attention, cette fois les formules sont $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$, $\text{sh}2x = 2\text{ch}x\text{sh}x$ et $dt = \text{sh}x dx$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\text{sh}x + \text{sh}2x} &= \frac{\text{sh}x dx}{\text{sh}^2x + \text{sh}x(2\text{sh}x\text{ch}x)} \\ &= \frac{\text{sh}x dx}{\text{sh}^2x + 2\text{sh}^2x\text{ch}x} \\ &= \frac{\text{sh}x dx}{\text{ch}^2x - 1 + 2\text{ch}x(\text{ch}^2x-1)} \\ &= \frac{dt}{t^2-1+2t(t^2-1)} = \frac{dt}{(t-1)(t+1)(2t+1)} \\ &= \frac{1}{6}\frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\frac{dt}{t+1} - \frac{2}{3}\frac{2dt}{2t+1}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{2}{3}\ln|2t+1| + C \\ &= \frac{1}{6}\ln|\text{ch}x - 1| + \frac{1}{2}\ln|\text{ch}x+1| - \frac{2}{3}\ln|2\text{ch}x+1| + C. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} K_2 &= \int \frac{dx}{\text{ch}x + 2\text{sh}x} \\ &= \int \frac{dx}{\frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}} \\ &= \int \frac{e^x}{\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $t = e^x$ donc $dt = tdx$.

$$\begin{aligned} K_2 &= \int \frac{dx}{\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\frac{t-\frac{\sqrt{3}}{3}}{t+\frac{\sqrt{3}}{3}}| + C^{te} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\frac{e^x-\frac{\sqrt{3}}{3}}{e^x+\frac{\sqrt{3}}{3}}| + C^{te} \end{aligned}$$

Exemple A.1.15

Soit la primitive suivante à calculer : $L = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}}dx$.

On fait le changement de variable $t^2 = 2x - 5$ donc $tdt = dx$.

$$\begin{aligned} L &= \int \frac{t^2+5}{2}dt \\ &= \frac{t^3}{6} + \frac{5t}{2} + C^{te} \\ &= \frac{1}{6}(2x-5)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}(2x-5)^{\frac{1}{2}} + C^{te} \end{aligned}$$

Exemple A.1.16

Soit à calculer $M = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx\,,\ (a = 1 > 0 \text{ et } \Delta = -3 < 0)$.

On fait le changement de variable $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sh}t$ donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ch}tdt$

$$\begin{aligned} M &= \int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sh}t - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ch}t}{\sqrt{\frac{3}{4}\text{sh}^2t + \frac{3}{4}}}dt \\ &= \int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sh}t - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ch}t}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\text{sh}^2t+1}}dt \quad \text{or} \quad \sqrt{\text{sh}^2t+1} = \sqrt{\text{ch}^2t} = \text{ch}t \quad \text{car} \quad \text{ch}t \geq 0 \\ &= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sh}t - \frac{1}{2}\right)dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ch}t - \frac{t}{2} + C^{te} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ch}\left(\text{Argsh}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right) - \frac{1}{2}\text{Argsh}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C^{te} \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\text{Argsh}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C^{te} \end{aligned}$$

Soit à calculer $N = \displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+3}\,,\ (a > 0 \text{ et } \Delta > 0)$.

On fait le changement de variable $x + 2 = \varepsilon\,\text{ch}t$ avec $t \in \mathbb{R}_+$

où $\varepsilon = \begin{cases} -1 \text{ si } x \leq -3 \\ +1 \text{ si } x \geq -1 \end{cases}$

donc $dx = \varepsilon\,\text{sh}tdt$

$$\begin{aligned}
N &= \int \sqrt{\varepsilon^2 \mathrm{ch}^2 t - 1}\, \varepsilon\, \mathrm{sh} t dt \\
&= \int \varepsilon\, \mathrm{sh}^2 t dt \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \int (\mathrm{ch} 2t - 1)\, dt \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} \left(\tfrac{\mathrm{sh} 2t}{2} - t \right) + C^{te} \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} (\mathrm{sh} t\, \mathrm{ch} t - t) + C^{te} \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} \left[\varepsilon\, (x+2)\, \mathrm{sh}\, (\mathrm{Argch}\, (\varepsilon\, (x+2))) - \mathrm{Argch}\, (\varepsilon\, (x+2)) \right] + C^{te} \\
&= \frac{x+2}{2} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{Argch}\, (\varepsilon\, (x+2)) + C^{te}
\end{aligned}$$

Exemple A.1.17

$O = \displaystyle\int e^{2x} x dx$

<u>$1^{\text{ère}}$ méthode</u> On pose $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{2x}$ donc $f'(x) = 1$ et $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$ et

$$\begin{aligned}
O &= x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \\
&= x\tfrac{e^{2x}}{2} - \tfrac{e^{2x}}{4} + C^{te}
\end{aligned}$$

<u>$2^{\text{ème}}$ méthode</u> Soit $f(x) = e^{2x}(ax+b)$ une primitive de $e^{2x}x$.

On a $f'(x) = e^{2x}(2ax + 2b + a) = e^{2x}x$ ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a &=& 1 \\ a + 2b &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& \frac{1}{2} \\ b &=& -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Ainsi, on retrouve que $\displaystyle\int e^{2x} x dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C^{te}$.

A.2 Exemples du chapitre II

Exemple A.2.1

1. Etudions la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$.

   La fonction $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $]0;1]$, il faut donc étudier la convergence en 0. On utilise la définition.

   $\displaystyle\int_t^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_t^1 = -1 - t\ln t + t$
   donc
   $$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0}(-1 - t\ln t + t) = -1$$

   donc $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$ converge.

2. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$?

   La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, il faut donc étudier la convergence en $+\infty$. On utilise la définition. Soit t un réel positif.

   $\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{x^2+1} = [\text{Arctan}x]_0^t = \text{Arctan}t$
   donc
   $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{t\to+\infty} \text{Arctan}t = \frac{\pi}{2}$$

   et l'intégrale converge.

3. Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$?

   La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $[0;1[$, il faut donc étudier la convergence en 1. Soit $t \in [0;1[$.

   $\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\text{Arcsin}x]_0^t = \text{Arcsin}t$
   donc
   $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} \text{Arcsin}t = \frac{\pi}{2}$$

Exemple A.2.2

Convergence de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$?

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1;1[$, il faut donc étudier la convergence en -1 et en 1. Soit $c \in]-1;1[$. Alors
$\displaystyle\int_c^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\text{Arcsin}x]_c^t = \text{Arcsin}t - \text{Arcsin}c$ et
$\displaystyle\lim_{t\to 1}\int_c^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}c.$

$\displaystyle\int_t^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\text{Arcsin}x]_t^c = \text{Arcsin}c - \text{Arcsin}t$ et
$\displaystyle\lim_{t\to -1}\int_t^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin}c + \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\displaystyle\int_{-1}^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sont convergentes donc $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est convergente. De plus, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.

Exemple A.2.3

$\displaystyle\int_{-a}^a x^3dx = 0$ car la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire, donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^a x^3dx = 0$, mais ceci n'a rien à voir avec la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3dx$. La fonction $x \longmapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$, il faut donc étudier la convergence en $-\infty$ et en $+\infty$. Soit donc c un réel quelconque.
$\displaystyle\int_c^a x^3dx = [\frac{x^4}{4}]_c^a = \frac{a^4}{4} - \frac{c^4}{4}$ et $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_c^a x^3dx = +\infty$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3dx$ diverge.

Exemple A.2.4

Nature de $\displaystyle\int_{a>0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$?.

La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[a;+\infty[$, il faut donc étudier la convergence en $+\infty$.

$\forall x \in [a,+\infty[\,,\ 0 < x^2 < e^{x^2}$ donc $e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$. Or $\displaystyle\int_{a>0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge (intégrales de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$) donc $\displaystyle\int_{a>0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

Exemple A.2.5

Nature de $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$?

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$ est continue sur $]0;b]$, il faut donc étudier la convergence en 0.

$\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$.Nous savons que $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge (intégrale de Riemann en 0 avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) donc $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$ est convergente.

Exemple A.2.6

Etudions la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$.

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x^3}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc f est localement intégrable sur $[1,+\infty[$ mais n'est pas de signe constant, donc on étudie l'absolue convergence.

$$0 \le \left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}$$

et l'intégrale de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ est une intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $\alpha = 3 > 1$, elle est convergente. Par majoration, l'intégrale de $x \longmapsto \left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right|$ converge, l'intégrale qui nous intéresse est donc absolument convergente, donc convergente.

Annexe B
Exercices

B.1 Exercices du chapitre I

Exercice B.1.1

Calculer les primitives suivantes.

1. $I_1 = \int \tan(x)dx$
2. $I_2 = \int \cos x \sin^3 x dx$
3. $I_{4,n} = \int \dfrac{x}{(a^2+x^2)^n} dx$

Exercice B.1.2

Calculer $I_5 = \int \text{Arctan } x dx$.

Exercice B.1.3

Calculer la primitive suivante $I_6 = \int \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

Exercice B.1.4

Calculer la primitive suivante $I_7 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Exercice B.1.5

Calculer la primitive suivante $I_{10} = \int \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx$

Exercice B.1.6

Calculer la primitive suivante $I_{11} = \int \dfrac{x}{(x-1)(x^2+2x+2)} dx$

Exercice B.1.7

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos x} dx$
2. $I_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x}{1+\cos x+\cos 2x} dx$

Exercice B.1.8

Calculer la primitive $I_{14} = \int \dfrac{1}{\text{sh}x} dx$.

Exercice B.1.9

Calculer $I_{15} = \int_{2+\sqrt{2}}^4 \dfrac{dx}{(4+4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Exercice B.1.10

$$I_8 = \int_1^{\text{ch}3} \sqrt{x^2 - 1}dx.$$

Exercice B.1.11

$$I_9 = \int_0^{\text{sh}5} \sqrt{1 + x^2}dx.$$

Exercice B.1.12

Soit $I_{16} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}$.

1. Faire le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$. Que devient I_{16} ?

2. En déduire la valeur de I_{16} sans aucun calcul de primitive.

Exercice B.1.13

Soit $f(x) = \sin x$.

1. Calculer $\left|\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx\right|$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|dx$ et vérifier que $\left|\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx\right| \leq \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|dx$.
2. Vérifier que $\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)dx\right| = \displaystyle\int_{-\pi}^{0} |f(x)|dx$. Justifier cette égalité.

Exercice B.1.14

Le but de cet exercice est de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

1. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$.
2. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$, puis calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

B.2 Exercices du chapitre II

Exercice B.2.1

Donner la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-1}{\ln x} dx$

Exercice B.2.2

Etudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2 \ln x} dx$

Exercice B.2.3

Etudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$

Exercice B.2.4

Etudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^3}\, dx.$

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre I

Document C.1.1 Démonstration du lemme I.4

Conséquence évidente de (I.1).

Document C.1.2 Démonstration du théorème I.11

f est continue sur le fermé borné $[a,b]$ donc f est uniformement continue c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\forall x,\ y \in [a,b]$ vérifiant $|x-y| \leq \eta$, on a $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de pas inférieur à η donc $\forall x \in [x_j, x_{j+1}]$, on a : $|f(x)-f(x_j)| \leq \varepsilon$.

Soient g et h définies par

$$g\,(x) = \begin{cases} f(x_j) - \varepsilon & \text{si } x \in]x_j, x_{j+1}[\\ f(x_j) & \text{si } x = x_j,\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$h\,(x) = \begin{cases} f(x_j) + \varepsilon & \text{si } x \in]x_j, x_{j+1}[\\ f(x_j) & \text{si } x = x_j,\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

On vérifie que ces deux fonctions sont en escalier sur $[a,b]$ et on a donc
$\forall x \in [a,b]\,, g\,(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\, dx = 2\,\varepsilon \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = 2\,\varepsilon\,(b-a)$$

Document C.1.3 Démonstration de la proposition I.13

Nous avons

$$\begin{array}{rcll} \forall\ \ x \in [a,b],\ \ f(x) & \leq & |f(x)| & \\ \text{donc } \displaystyle\int_a^b f(x)dx & \leq & \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx & \text{par croissance de l'intégrale.} \\ \text{De même, } \forall\ \ x \in [a,b],\ \ -f(x) & \leq & |f(x)| & \\ \text{donc } \ -\displaystyle\int_a^b f(x)dx & \leq & \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx & \\ \text{Par suite, } \left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| & \leq & \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx & \end{array}$$

D'autre part, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ donc $\forall\ \ x \in [a,b],\ \ |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ et en intégrant membres à membres, on obtient :

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty \int_a^b 1dx = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Document C.1.4 Démonstration de la proposition I.14

i) Inégalité de Schwarz :

On sait que $\left(\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx\right) \geq 0$ donc, en développant le carré on obtient :

$$\left(\int_a^b (\lambda^2 |f(x)|^2 + 2\lambda f(x)g(x) + |g(x)|^2) dx\right) \geq 0$$

et en utilisant la linéarité on obtient

$$\lambda^2 \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right) + 2\lambda \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) + \left(\int_a^b |g(x|^2 dx\right) \geq 0$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré en λ qui est toujours positif, donc son discriminant Δ dont être négatif ou nul :

$$\Delta = 4\left(\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_a^b |g(x|^2 dx\right)\right) \leq 0$$

ce qui prouve l'inégalité de Schwarz.

ii) L'Inégalité de Minkowsky :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)+g(x)|^2dx &= \int_a^b |f(x)|^2dx + 2\int_a^b |f(x)g(x)|dx + \int_a^b |g(x)|^2dx \\
&\quad \text{et d'après Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \int_a^b |f(x)|^2dx + 2\sqrt{\left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)}\sqrt{\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)} + \int_a^b |g(x)|^2dx \\
&\leq \left(\sqrt{\left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)} + \sqrt{\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)}\right)^2
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité souhaitée.

Document C.1.5 Démonstration du théorème I.16

Soit $x \in [a,b]$. f est continue en x donc
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0$ t.q $\forall y \in [a,b]\,,\ |y-x| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.
Soit $y \in [a,b]$, on peut supposer $x \leq y$ alors on a :

$$F(y) - F(x) - (y-x)\,f(x) = \int_x^y (f(t)-f(x))\,dt$$

d'où, pour tout $|y-x| \leq \eta$, $|F(y)-F(x)-(y-x)\,f(x)| \leq \varepsilon|y-x|$.
Donc si $x \in]a,b[$, on a bien $F'(x) = f(x)$.
Si $x = a$ (resp $x = b$), on a $F'_d(x) = f(x)$ (resp $F'_g(x) = f(x)$).

En supposant $y \leq x$, on obtient

$$F(y) - F(x) - (y-x)\,f(x) = -\int_y^x (f(t)-f(x))\,dt$$

La suite se faisant de la même manière.

Document C.1.6 Démonstration du théorème I.17

f étant continue, elle admet une primitive F dérivable sur $]a,b[$. Ainsi, en appliquant le théorème de Rolle à F, on en déduit l'existence d'un point $c \in]a,b[$ tel que

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(c)$$

Document C.1.7 Démonstration du théorème I.19

Nous savons que $(fg)' = fg' + f'g$ donc $fg' = (fg)' - f'g$ et en passant aux intégrales, on a le résultat attendu.

Document C.1.8 Démonstration du théorème I.20

Soient $F(u) = \int_{\varphi(c)}^{u} f(x)dx$, $G(u) = F(\varphi(u)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(u)} f(x)dx$ et $H(u) = \int_c^u f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Par définition des primitives, $F'(u) = f(u)$, $F(\varphi(c)) = 0$, $H(c) = 0$ et $H'(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u)$.

Nous avons d'autre part $G'(u) = F'(\varphi(u))\varphi'(u) = f(\varphi(u)\varphi'(u)$. Ainsi, pour tout $u \in [c,d], G'(u) = H'(u)$, par suite, comme $[c,d]$ est fermé, nous avons pour tout $u \in [c,d], G(u) = H(u) + C^{te}$ avec $C^{te} = G(c) - H(c) = F(\varphi(c)) - H(c) = 0$.

Ainsi, pour tout $u \in [c,d]$, $G(u) = H(u)$ et pour $u = d$ on obtient

$$G(d) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx = H(d) = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

C.2 Documents du chapitre II

Document C.2.1 Démonstration du théorème II.24

Si $a > 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $[a, b]$ donc intégrable sur $[a, b]$ pour tout b réel.

Calculons $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha}$. En faisant tendre a vers 0 nous connaitrons la nature de $\displaystyle\int_0^{b>0} \frac{1}{x^\alpha} dx$ et en faisant tendre b vers $+\infty$ nous connaitrons la nature de $\displaystyle\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

<u>1er cas</u> $\alpha \neq 1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^b = \underbrace{\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}}_{(1)} - \underbrace{\frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}}_{(2)}$$

(1) admet une limite finie quand $b \to +\infty$ si et seulement si $-\alpha + 1 < 0$ donc $\alpha > 1$.

(2) admet une limite finie quand $a \to 0$ si et seulement si $-\alpha + 1 > 0$ donc $\alpha < 1$.

<u>2eme cas</u> $\alpha = 1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \underbrace{\ln b}_{(3)} - \underbrace{\ln b}_{(4)}$$

(3) (resp. (4)) diverge quand $b \to +\infty$ (resp. $a \to 0$).

Document C.2.2 Démonstration du théorème II.25

La fonction $x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est croissante puisque $F'(x))f(x) \geq 0$. L'intégrale convergera, si et seulement si $\lim\limits_{x \to b} F(x)$ existe. Or, comme F est croissante, cette limite n'existe que si F est bornée.

Document C.2.3 Démonstration du théorème II.26

Si pour tout $t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$ alors pour tout $x \in [a, b[$

$$0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$$

Ainsi,

- si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\displaystyle\int_a^x g(t)dt$ est bornée, donc $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est borné et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge.
- si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge, comme F est croissante, cela signifie que $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ n'est pas bornée, donc $\displaystyle\int_a^x g(t)dt$ n'est pas bornée non plus et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Document C.2.4 Démonstration du théorème II.27

Supposons pour la preuve que f et g sont positives. Si elles sont négatives on posera $f_1 = -f$ et $g_1 = -g$. Il est clair que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b (-f(x))dx$ sont de même nature.

$f(x) \underset{b}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Ceci signifie que $\forall \varepsilon > 0$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de b tel que si $x \in \mathcal{V}$ alors

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \varepsilon \\ \Longleftrightarrow \quad & -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - 1 < \varepsilon \\ \Longleftrightarrow \quad & 1 - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

Donc si nous prenons $\varepsilon < 1$ nous obtenons

$$0 \leq (1-\varepsilon)g(x) < f(x) < (1+\varepsilon)g(x)$$

Ainsi,

1. si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge alors la majoration $0 \leq (1-\varepsilon)g(x) < f(x)$ entraine que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge.
2. si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge alors la majoration $0 \leq f(x) < (1+\varepsilon)g(x)$ entraine que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge.
3. si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge alors la majoration $0 \leq f(x) < (1+\varepsilon)g(x)$ entraine que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge.
4. si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge alors la majoration $0 \leq (1-\varepsilon)g(x) < f(x)$ entraine que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge.

<u>Bilan</u> Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

Index des concepts

Index des notions

A

F

I

L

P

R

S