Mathématiques

Algèbre Linéaire

INSA - 1ère année

Sandrine Scott

1 Remerciements

Je tiens à remercier ici les collègues qui m'ont aidée dans l'élaboration de ce cours, en particulier, Françoise Bernis, Raymonde Cassinet, Jean-Louis Dunau et Luc Méallarès.

2 Introduction

Ce cours a été élaboré pour des élèves de formation continue, il est donc moins théorique et moins approfondi qu'un cours classique de 1ère année. Il constitue cependant une bonne base de travail pour des élèves de 1ère année (ou de 2ème année entrant à l'insa sans avoir fait d'algèbre linéaire auparavant) pour les aider à comprendre certaines définitions et certains résultats. Il ne se substitue en aucun cas au cours de l'UV 4 de mathématiques de 1ère année.

Chapitre I
Espaces vectoriels

I.1 Définitions

Exemples :
Exemple A.1.1
Exemple A.1.2
Exemple A.1.3

Exercices :
Exercice B.1.1

Soient un ensemble E, un corps K (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et deux lois

$$+ \quad : \quad \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 + v_2 \end{array} \quad \text{(loi interne)} \qquad \text{et} \qquad . \quad : \quad \begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda.v \end{array} \quad \text{(loi externe)}$$

$(E, +, .)$ est un **espace vectoriel** sur le corps K si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. La loi interne notée $+$ doit
   (a) être commutative c'est-à-dire pour tous v_1, v_2 dans E, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
   (b) être assiociative c'est-à-dire pour tous v_1, v_2, v_3 dans E, $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
   (c) admettre un neutre noté 0_E c'est-à-dire pour tout v dans E, $v + 0_E = v$
   (d) être telle que tout élément v de E admette un symétrique c'est-à-dire que pour tout v dans E, il existe v' dans E tel que $v + v' = 0_E$

   (à ce stade, on dit que $(E, +)$ est un groupe commutatif)
2. La loi externe notée . doit vérifier pour tous v_1, v_2 dans E et tous λ, μ dans K,
   (a) $\lambda.(v_1 + v_2) = \lambda.v_1 + \lambda.v_2$
   (b) $(\lambda + \mu).v_1 = \lambda.v_1 + \mu.v_1$
   (c) $(\lambda\mu).v_1 = \lambda.(\mu.v_1)$
   (d) $1_K.v_1 = v_1$.

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, ceux de K des **scalaires**.

Les règles de calculs sont analogues à celles de $\mathbb{R}$ et on a

$$\lambda.v = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_K \quad \text{ou} \quad v = 0_E$$

I.2 Sous-espace vectoriel

Exemples :
Exemple A.1.4
Exemple A.1.5
Exemple A.1.6

Exercices :
Exercice B.1.2

Soient $(E, +, .)$ un $K-$ espace vectoriel et F un sous-ensemble de E.

$(F, +, .)$ est un **sous-espace vectoriel** de E si $F \neq \emptyset$ et si pour tous v_1, v_2 de F et tout λ de K alors

$$\lambda.v_1 + v_2 \in F$$

On dit que F est stable pour les lois + et .

Théorème I.1 *Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel*

Démonstration : document C.1.1

Remarque : Si un sous-ensemble F de E ne contient pas 0_E, il ne peut pas être un sous-espace vectoriel (pas de neutre pour l'addition).

I.3 Partie génératrice

Exemples :
Exemple A.1.7
Exemple A.1.8

Exercices :
Exercice B.1.3

Soit E un espace vectoriel sur K, et A une partie non vide de E.

On appelle **combinaison linéaire** d'éléments de A tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m \quad \text{où} \ \ \forall i \ \lambda_i \in K \ \text{ et } \ x_i \in A$$

Théorème I.2 *L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est un sous espace vectoriel sur K de E, il contient A. On l'appelle le sous espace vectoriel de E engendré par A, on le note Vect (A).*

C'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant A.

Démonstration : document C.1.2

Remarque : Si F est un s.e.v. de E alors $F = \text{Vect}\ (F)$.

Si A est une partie de E telle que $E = \text{Vect}\ (A)$ alors A est une **famille ou partie génératrice** de E. On dit aussi que A engendre E.

Si A engendre E alors tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de A.

I.4 Partie libre, Partie liée

Exemples :
Exemple A.1.9
Exemple A.1.10

Exercices :
Exercice B.1.4

Soit E un espace vectoriel sur K, et $v_1, v_2, ..., v_n$ des vecteurs de E.

$(v_1, v_2, ..., v_n)$ est une **partie libre** de E si et seulement si :

$\forall(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n$

$$\left[\left(\underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0_E}_{\text{combinaison linéaire nulle des } v_i}\right) \Longrightarrow \underbrace{(\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ \lambda_i = 0_K)}_{\text{les } \lambda_i \text{ sont tous nuls}}\right]$$

Si la famille est libre, la seule façon d'obtenir 0_E comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est de prendre tous les λ_i nuls.

Dans le cas contraire on dit que la famille est **liée**.

En d'autres termes, $(v_1, v_2, ..., v_n)$ est une partie liée de E si et seulement si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si et seulement si :

$\exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n$,

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0_E}_{\text{combinaison linéaire nulle des } x_i} \quad \text{et} \quad \underbrace{\exists i \in \{1, 2, ..., n\}\ \lambda_i \neq 0_K}_{\text{les } \lambda_i \text{ sont non tous nuls}}$$

I.5 Base d'un espace vectoriel

Exemples :
Exemple A.1.11
Exemple A.1.12

Exercices :
Exercice B.1.5

Soit E un espace vectoriel sur K. Soit $\mathcal{B}$ une partie de E. $\mathcal{B}$ est une **base** de E si c'est une partie libre et génératrice de E.

Théorème I.3 *Soit E un espace vectoriel sur K.*
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E si et seulement si

$$(\forall x \in E) \quad (\exists!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n) \qquad (x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n)$$

ce qui signifie que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'ecrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

*Les λ_i s'appellent les **composantes ou coordonnées** du vecteur x relativement à la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration : document C.1.3

I.6 Dimension d'un espace vectoriel

Exemples :
Exemple A.1.13
Exemple A.1.14

Exercices :
Exercice B.1.6

Un espace vectoriel E est de **dimension finie** si il existe une famille A de cardinal fini qui engendre E, c'est-à-dire si il existe des vecteurs $e_1, e_2, \cdots, e_p$ de E tels que $E = \text{Vect}\ (e_1, e_2, \cdots, e_p)$

Théorème I.4 (théorème admis) *Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments. Si n est ce nombre, n s'appelle la **dimension** de E. On note $n = \dim E$.*

Un espace vectoriel admet une infinité de bases qui ont toutes le même nombre de vecteurs.

L'espace vectoriel $\{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension 0 puisqu'il ne contient pas de famille libre.

Propriété I.5 *Si E désigne un espace vectoriel de dimension finie, si $n = \dim E$ et si L, A et B désignent des parties de E nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Si L est une partie libre, alors card $L \leq n$*
2. *Si A est une partie génératrice, alors card $A \geq n$*
3. *Si B est une base de E, alors card $B = n$*
4. *Si L est libre et si card $L = n$, alors L est une base*
5. *Si A est une partie génératrice et si card $A = n$, alors A est une base*

Le **rang** d'une famille de vecteurs est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs. On note :

$$\text{rg}\ (v_1, v_2, ..., v_n) = \dim\ (\text{Vect}\ (v_1, v_2, ..., v_n))$$

Chapitre II
Matrices et Applications linéaires

II.1 Matrices

II.1.1 Définitions

Une **matrice** à éléments dans $K(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est un tableau rectangulaire rempli d'éléments de K.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i\in\{1,2,\dots,m\},j\in\{1,2,\dots,n\}}$$

Les a_{ij} sont des éléments de K, i est l'indice de ligne et j est l'indice de colonne.

$\mathcal{M}_{mn}(K)$ désigne l'ensemble des matrices m lignes n colonnes à coefficients dans K.

La matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ appartient à } \mathcal{M}_{23}(K)$$

Dans le cas particulier où $n = m$, $\mathcal{M}_{nn}(K)$ est noté $\mathcal{M}_n(K)$ et on l'appelle l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

Une matrice est dite **diagonale** si $m = n$ et si pour tout $i \neq j$ dans $\{1, 2, \cdots, n\}$, les coefficients a_{ij} sont nuls.

La matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale d'ordre } 3$$

On note aussi $D = \mathrm{Diag}(0, 1, 2)$.

Une matrice est dite **triangulaire supérieure** (respectivement **triangulaire inférieure**) si $m = n$ et si pour tout $i > j$ (respectivement $i < j$) dans $\{1, 2, \cdots, n\}$, les coefficients a_{ij} sont nuls.

Considérons les matrices

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

alors E est une matrice triangulaire supérieure d'ordre 3 et F est triangulaire inférieure.

Une **matrice colonne** est une matrice à une seule colonne. C'est une matrice de $\mathcal{M}_{m1}(K)$. Elles sont très utiles pour représenter les vecteurs d'un espace vectoriel :

Soit E un espace vectoriel sur K dont la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base. Soit v un vecteur de E qui s'écrit $v = e_1 + 2e_3 - 5e_4$ alors on peut définir la matrice colonne $V \in \mathcal{M}_{41}(K)$ par

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

La **transposée** d'une matice A s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de A. On la note ${}^tA$ ou A^T. Ainsi, si $A \in \mathcal{M}_{nm}(K)$ alors ${}^tA \in \mathcal{M}_{mn}(K)$.

$$\text{Si} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{32}(K) \quad \text{alors} \quad {}^t\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23}(K)$$

II.1.2 Opérations

> **Exercices** :
> Exercice B.2.1
> Exercice B.2.2
> Exercice B.2.3
> Exercice B.2.4

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{mn}(K)$. Notons a_{ij} les coefficients de A et b_{ij} ceux de B. On appelle **somme** des matrices A et B la matrice S de $\mathcal{M}_{mn}(K)$ dont les coefficients s_{ij} sont définis pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$ par $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. On note $S = A + B$.

Soient

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La somme $\Omega + \Delta$ n'existe pas puisque les matrices n'ont pas le même nombre de lignes ni de colonnes.

Par contre,

$$\Omega + {}^t\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

On montre que $(\mathcal{M}_{mn}(K), +)$ a une structure de groupe commutatif.

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$. Notons a_{ij} ses coefficients. Multiplier une matrice par un scalaire $\lambda \in K$, revient à multiplier tous les coefficients par ce scalaire. Si on note λ_{ij} les coefficients de la matrice Λ, résultat de cette opération, alors pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $\lambda_{ij} = \lambda a_{ij}$ et on note $\Lambda = \lambda.A$
Ainsi

$$2.\Omega = 2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

On montre que $(\mathcal{M}_{mn}(K), +, .)$ a une structure d'espace vectoriel. Il est de dimension finie et sa dimension est $\dim \mathcal{M}_{mn}(K) = mn$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(K)$. Notons a_{ij} les coefficients de A et b_{ij} ceux de B. On appelle **produit** des matrices A et B la matrice P de $\mathcal{M}_{mp}(K)$ dont les coefficients p_{ij} sont définis pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., p\}$ par $p_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. On note $P = AB$. On dit que le produit s'effectue lignes par colonnes. Cette définition sera justifiée *a posteriori* lorsque nous définirons les matrices d'applications linéaires.

Pour que le produit ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrtice B.

Le produit ${}^t\Delta\Omega$ n'existe pas car le nombre de colonnes de ${}^t\Delta$ (en l'occurrence 3) ne correspond pas au nombre de lignes de Ω (en l'occurrence 2).

Par contre

$$P = \Omega\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

En effet, si on note ω_{ij}, δ_{ij} et $p_{i,j}$ les coefficients respectifs des matrices Ω, Δ et P alors

$$p_{11} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{1k}\delta_{k1} = 1 \times 1 + 2 \times (-2) + 3 \times 0 = -3$$

$$\begin{aligned}
p_{12} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{1k}\delta_{k2} = 1\times 2 + 2\times 1 + 3\times(-1) = 1 \\
p_{21} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{2k}\delta_{k1} = 4\times 1 + 5\times(-2) + 6\times 0 = -6 \\
p_{22} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{2k}\delta_{k2} = 4\times 2 + 5\times 1 + 6\times(-1) = 7
\end{aligned}$$

Le produit matriciel est une loi associative et distributive par rapport à l'addition : pour toutes matrices A, B et C telles que les opérations soient possibles, nous avons

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{et} \quad A(B+C) = AB + AC$$

Le produit n'est pas commutatif .(cf exercice B.2.3)

Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et si $I_n = \mathrm{Diag}(1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{M}_n(K)$ alors $AI_n = I_nA = A$.

II.1.3 Matrice inversible

Exemples :
Exemple A.2.1

Exercices :
Exercice B.2.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On dit que A est **inversible** si il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AA' = A'A = I_n$. Si A' existe, elle est unique et on la note A^{-1}.

Dans la mesure où A et B sont inversibles, le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

De même, si A est inversible alors la transposée de A est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

II.2 Applications linéaires

II.2.1 Définition

Exemples :
Exemple A.2.2
Exemple A.2.3
Exemple A.2.4
Exemple A.2.5

Exercices :
Exercice B.2.6

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. Soit g une application de E dans F.

g est une **application linéaire** si $\forall (v, v') \in E^2 \quad \forall \lambda \in K$

$$g(v + v') = g(v) + g(v') \quad \text{et} \quad g(\lambda.v) = \lambda.g(v)$$

Remarque : Si g est linéaire alors $g(0_E) = 0_F$

En effet, pour tout x dans E, $g(0_E) = g(0_K.x) = 0_K.g(x) = 0_E$.

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Lorsque $E = F$ on le note $L(E)$ ou encore $End(E)$, et on l'appelle aussi l'ensemble des **endomorphismes** de E.

On a la propriété suivante :

$$g \in L(E, F) \Longleftrightarrow \forall (v, v') \in E^2 \quad \forall \lambda \in K \quad g(\lambda.v + v') = \lambda.g(v) + g(v')$$

Si on munit $L(E, F)$ des lois $+$ et . définies pour les applications (cf exemple A.1.3) alors $(L(E), +, .)$ a une structure d'espace vectoriel sur K.

Soit g une application de E dans F.

g est **injective** si $\forall (v, v') \in E^2 \quad g(v) = g(v') \Longrightarrow v = v'$

g est **surjective** si $\forall w \in F, \exists v \in E$ tel que $w = g(v)$.

g est **bijective** si $\forall w \in F, \exists\ !\ v \in E$ tel que $w = g(v)$

(! signifiant que pour chaque w, le v est unique)

g est bijective si et seulement si g est injective et surjective.

II.2.2 Noyau, image et rang d'une application linéaire

Exemples :
Exemple A.2.6
Exemple A.2.7
Exemple A.2.8

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $g \in L(E, F)$.

Le **noyau** de g, noté Ker g, est défini par :

$$\text{Ker } g = \{v \in E \ / \ g(v) \ = \ 0_F\} = g^{-1}(\{0_F\}) \subset E$$

Ker g est l'ensemble des antécédents par g du vecteur nul de F.

L'**image** de g, notée Im g, est définie par :

$$\text{Im } g = \{w \in F \ / \ \exists v \in E \ , \ w = f(v)\} = \{f(v) \ / \ v \ \in E\} \subset F$$

Théorème II.2.1 *Ker g est un sous espace vectoriel de E, Im g un sous espace vectoriel de F. De plus on a :*

$$\begin{array}{rcl} g \ \textit{ est surjective} & \Longleftrightarrow & \textit{Im } g \ = \ F \\ g \ \textit{ est injective} & \Longleftrightarrow & \textit{Ker } g \ = \ \{0_E\} \end{array}$$

Démonstration : document C.2.1

Si Im g est un sous espace vectoriel de dimension finie de F, on appelle **rang** de g, le réel noté rg g, égal à la dimension de Im g.
On a :

$$\text{rg } g \ = \ \dim \text{Im } g$$

Théorème II.2.2 (Théorème du rang) *(admis)*
Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, avec E de dimension finie, et $g \in L(E, F)$. On a :

$$\textit{dim } \ E \ = \ \textit{dim Ker } g \ + \ \textit{dim } \ \textit{Im } g$$

Corollaire II.2.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, de même dimension n, et $g \in L(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *g est bijective*
2) *g est injective*
3) *g est surjective*
4) *rg $g = n$*

Démonstration : document C.2.2

II.3 Matrices d'applications linéaires

II.3.1 Définitions

Exemples :
Exemple A.2.9
Exemple A.2.10

Exercices :
Exercice B.2.8

Soient E et F deux $K-$espaces vectoriels de dimension finie et $g \in L(E, F)$.

L'application g est caractérisée par la connaissance des images des vecteurs d'une base de E.

En effet, soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de E. Pour tout $x \in E$ il existe $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in K^p$ tel que

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$$

En utilisant le fait que g est linéaire on obtient

$$g(x) = g\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j g(e_j) \tag{II.3.1}$$

Ainsi, si nous connaissons $g(e_j)$ pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, l'application linéaire g est déterminée de manière unique.

Soit $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de F. Pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, $g(e_j) \in F$ et il existe $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}) \in K^n$ tel que

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

Notons X la matrice colonne formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$, Y celle formée des coordonnées de $g(x)$ dans la base $\mathcal{F}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, Y_j celle formée des coordonnées de $g(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}$. Nous avons donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Notons A la matrice dont les colonnes sont les matrices Y_j. Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le but est de trouver une relation entre les matrices X , Y et A.

Si nous écrivons de façon matricelle la relation (II.3.1) nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
Y=\sum_{j=1}^{p} x_j Y_j &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{kp} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kp}x_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p \end{pmatrix} = AX
\end{aligned}
$$

A s'appelle la matrice de l'application linéaire g relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Elle est donc définie de la manière suivante :

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} g(e_1) & g(e_2) & \ldots & g(e_j) & \ldots & g(e_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array}
= \text{Mat }(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{np}(K))
$$

II.3.2 Propriétés

Exemples :
Exemple A.2.11

Dans ce paragraphe E, F, et G désignent des espaces vectoriels sur K de dimension finie respectivement égale à n, m et p.

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ (respectivement $\mathcal{F} = (f_1, f_2, ..., f_m)$, $\mathcal{G} = (g_1, g_2, ..., g_p)$) désigne une base de E (respectivement F,G).

On vérifie facilement les trois affirmations suivantes :

1. Soient f un élément de $L(E, F)$ et λ un élément de K alors
$$\text{Mat }(\lambda f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=\; \lambda \text{ Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$
2. Soient f et g deux applications linéaires de $L(E, F)$, on a
$$\text{Mat }(f + g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=\; \text{Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;+\; \text{Mat }(g, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$
3. Si f et g désignent deux applications linéaires appartenant respectivement à $L(E, F)$ et à $L(F, G)$ alors
$$\text{Mat }(g \circ f, \mathcal{E}, \mathcal{G}) \;=\; \text{Mat }(g, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \;\; \text{Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$
ce qui justifie *a posteriori* la définition du produit de deux matrices.
4. Si $f \in L(E, F)$ est bijective alors $\dim E = \dim F$ et
$$\text{Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})\text{Mat }(f^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E}) = \text{Mat }(f \circ f^{-1}, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = I_n = \text{Mat }(f^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E})\text{Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$
Donc la matrice de l'application linéaire f est inversible et
$$\text{Mat }(f^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E}) \;=\; M^{-1}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$
Réciproquement, si une matrice est inversible, l'application linéaire canoniquement associée est bijective.

II.3.3 Matrice de changement de bases

Exemples :
Exemple A.2.12

Exercices :
Exercice B.2.9

Nous avons déjà remarqué qu'un même espace vectoriel pouvait avoir plusieurs bases.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases du même espace vectoriel E. Soit x un vecteur de E. Notons $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ et $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}'$.
Soient X et X' les matrices colonnes associées aux coordonnées de x dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

La question est de savoir quel lien existe entre les matrices X et X'.

Pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, il existe $(p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj}) \in K^n$ tel que

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

Soit I l'application linéaire définie de E, muni de la base $\mathcal{E}'$, vers E, muni de la base $\mathcal{E}$ et qui pour chaque vecteur x de coordonnées $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ dans la base $\mathcal{E}'$ associe ses coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans la base $\mathcal{E}$. Ainsi chaque e'_j, de coordonnées $(0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ dans la base $\mathcal{E}'$ a pour image $(p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj})$ qui sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$:

$$\begin{array}{rccc} I : & (E, \mathcal{E}') & \longrightarrow & (E, \mathcal{E}) \\ & (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) & \longmapsto & (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ & e'_j & \longmapsto & (p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj}) \end{array}$$

Soit P la matrice de cette application linéaire alors

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{j1} & p_{j2} & \cdots & p_{jj} & \cdots & p_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

et $X = PX'$.

P s'appelle la **matrice de passage** entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, on la note $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$. C'est la matrice de l'application I relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$:

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \text{Mat } (I, \mathcal{E}', \mathcal{E}).$$

Il est clair que l'application I est bijective et que son application réciproque est définie par :

$$\begin{array}{rccc} I^{-1} : & (E, \mathcal{E}) & \longrightarrow & (E, \mathcal{E}') \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \\ & e_j & \longmapsto & (p'_{1j}, p'_{2j}, \cdots, p'_{nj}) \end{array}$$

où pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} p'_{ij} e'_i$$

.

Ainsi la matrice $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ est inversible et

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}^{-1} = P_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}$$

Voyons comment est transformée la matrice d'une application linéaire lorsqu'on change de bases.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases du même espace vectoriel E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, ..., f_p)$, $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, ..., f'_p)$ deux bases du même espace vectoriel F. Soient enfin $g \in L(E, F)$, $A = \text{Mat}\ (g, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $A' = \text{Mat}\ (g, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$. Quel lien existe-t-il entre les matrices A et A' ?

Soit x un vecteur de E. Notons X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$, X' celle des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}'$ et de même, notons Y la matrice colonne des coordonnées de $y = g(x)$ dans la base $\mathcal{F}$ et Y' celle des coordonnées de y dans la base $\mathcal{F}'$. Soient enfin les matrices de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}$.
Nous avons les relations suivantes

$$X = PX', \quad Y = QY', \quad Y = AX \quad \text{et} \quad Y' = A'X'$$

et

$$Y = AX \Longleftrightarrow QY' = APX' \Longleftrightarrow Y' = Q^{-1}APX'$$

donc $A' = Q^{-1}AP$ et

$$\text{Mat}\ (g, \mathcal{E}', \mathcal{F}') = P^{-1}_{\mathcal{F}\mathcal{F}'} A P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} \tag{II.3.2}$$

II.3.4 Rang d'une matrice

Exemples :
Exemple A.2.13

Exercices :
Exercice B.2.10

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{mn}(K)$ dont les colonnes sont identifiées à n vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$ de K^m.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_1 & V_2 & \dots & V_j & \dots & V_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Par définition le **rang de la matrice** A est égal à la dimension de Vect $(V_1, V_2, ..., V_n)$ soit à la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A.

On note

$$\text{rg } A \;=\; \dim \ \text{Vect } (V_1, V_2, ..., V_n)$$

Remarque :

$$\text{rg } A \;\leq\; \min(m, n)$$

En effet, notons $E = \text{Vect } (V_1, V_2, ..., V_n)$, alors rg $A = \dim E$.

E est un sous-espace vectoriel de K^m engendré par n vecteurs donc sa dimension est plus petite que celle de K^m qui vaut m et que le nombre de vecteurs générateurs, qui ici vaut n.

Soit E (respectivement F) un espace vectoriel de dimension n (respectivement m) dont $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{F}$) est une base. Soit $g \in L(E, F)$ telle que Mat $(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = A$.

Alors on a :

$$\text{rg } A \;=\; \text{rg } g$$

En effet, les vecteurs colonnes de A sont les vecteurs $\{g(e_1), g(e_2), \cdots, g(e_n)\}$ qui forment une famille génératrice de Im g.

On a de plus le résultat suivant :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(K), \;\; \text{rg } A \;=\; \text{rg } {}^t A$$

Ce qui permet de définir le rang d'une matrice comme la dimension de l'espace engendré par les lignes de A.

Chapitre III
Déterminants

III.1 Forme n linéaire alternée

Soit E un espace vectoriel sur le corps K dont $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base. On considère une application φ

$$\begin{array}{ccc} E \times E \times \cdots \times E & \longrightarrow & K \\ (V_1, V_2, \cdots, V_n) & \longmapsto & \varphi(V_1, V_2, \cdots, V_n) \end{array}$$

telle que

1. φ est linéaire par rapport à chaque variable :

   Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tout $W_i \in E$ et tout $\lambda \in K$ alors

   $$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_{i-1}, V_i + \lambda W_i, V_{i+1}, \cdots, V_n) \quad =$$

   $$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \cdots, V_n) \; + \; \lambda \, \varphi(V_1, V_2, \cdots, V_{i-1}, W_i, V_{i+1}, \cdots, V_n)$$

2. Si il existe $i \neq j$ tel que $V_i = V_j$ alors

   $$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_n) = 0$$

3. $$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_j, \cdots, V_i, \cdots, V_n) = -\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_n)$$

4. $$\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$$

On démontre qu'une telle application est unique, on la note $\det_{\mathcal{E}}$ et $\det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ est appelé le **déterminant** des vecteurs $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ par rapport à la base $\mathcal{E}$.

On peut aussi démontrer le résultat suivant :

$$\forall (V_1, V_2, \cdots, V_n) \in E^n \quad [(V_1, V_2, \cdots, V_n) \;\; libre \quad \Longleftrightarrow \quad \det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0]$$

III.2 Déterminant d'une matrice carrée

Exemples :
Exemple A.3.1

Exercices :
Exercice B.3.1

Soit la matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle $C_1, C_2, \cdots, C_n$ (respectivement $L_1, L_2, \cdots, L_n$) les colonnes (respectivement les lignes) de la matrice A.

Le déterminant de A noté det A est le déterminant des vecteurs $C_1, C_2, \cdots, C_n$ par rapport à la base $\mathcal{E}$. On a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

On montre que

$$\det A = \det {}^tA$$

donc le déterminant de A est aussi le déterminant des vecteurs $L_1, L_2, \cdots, L_n$ par rapport à la base $\mathcal{E}$. On a

$$\det A = \det_{\mathcal{E}}(L_1, L_2, \cdots, L_n)$$

Dans le but d'expliciter det A par une relation de récurrence où A est une matrice d'ordre n on définit pour tous i, j dans $\{1, 2, \cdots, n\}$ les matrices A_{ij} d'ordre $n-1$ obtenues à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Exemple : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

alors,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ceci étant défini, on a le résultat suivant.

Théorème III.1 (Développement d'un déterminant) *(admis) Avec les notations précédentes, nous avons*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

on dit que l'on a développé le déterminant de A par rapport à la colonne j, ou aussi

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

on dit que l'on a développé le déterminant de A par rapport à la ligne i.

Ce théorème se démontre par récurrence sur n.

Il est clair que si $A = (a)$ alors det $A = a$.

Nous savons que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

et si nous développons ce déterminant par rapport à la 2ème ligne alors

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} c \det (b) + (-1)^{2+2} d \det (a) = -bc + ad$$

Remarque : On s'aperçoit très vite que cette méthode est lourde, surtout si la taille de la matrice augmente. Par contre cette formule est très paratique quand une ligne ou une colonne contient beaucoup de zéros.

III.3 Propriétés et calcul pratique

Exemples :	**Exercices** :
Exemple A.3.3	Exercice B.3.2

Par rapport à la remarque du paragraphe précédent, on souhaite essayer de faire apparaître le maximum de zéros dans une ligne ou dans une colonne d'une matrice A, sans changer le déterminant, pour ensuite développer le déterminant par rapport à cette ligne ou colonne.

Soit A une matrice carrée d'ordre n dont on note $C_1, C_2, \cdots, C_n$ (respectivement $L_1, L_2, \cdots, L_n$) les colonnes (respectivement les lignes). Nous avons les propriétés suivantes :

1. Ajouter à une colonne C_i un combinaison linéaire des <u>autres</u> colonnes ne change pas le déterminant de A. En effet :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(C_1, \cdots, C_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j C_j, \cdots C_n) &= \det_{\mathcal{E}}(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_n) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \ \det_{\mathcal{E}}(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_n) \\ &= \det_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \cdots, C_n) = \det\, A\end{aligned}$$

   car dès que deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

2. De même ajouter à une ligne L_i un combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes ne change pas le déterminant de A. En effet :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(L_1, \cdots, L_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j L_j, \cdots L_n) &= \det_{\mathcal{E}}(L_1, \cdots, L_i, \cdots, L_n) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \ \det_{\mathcal{E}}(L_1, \cdots, L_j, \cdots, L_n) \\ &= \det_{\mathcal{E}}(L_1, L_2, \cdots, L_n) = \det\, A\end{aligned}$$

   car dès que deux lignes sont égales, le déterminant est nul.

3. $$\det_{\mathcal{E}}(\lambda_1 C_1, \lambda_2 C_2, \cdots, \lambda_n C_n) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \det_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

   donc multiplier une matrice carrée d'ordre n par une constante λ revient à multiplier son déterminant par λ^n :

$$\det\, \lambda A = \lambda^n \ \det\, A.$$

III.4 Autres propriétés

Exemples :
Exemple A.3.4

Exercices :
Exercice B.3.3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. det $(AB) =$ det A det B
2. A est inversible si et seulement si det $A \neq 0$

   En effet , nous savons que si $f \in End(E)$ et E de dimension finie n alors

   $$f \text{ bijective} \Longleftrightarrow f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ surjective} \Longleftrightarrow \text{rg } f = n$$

   En transposant ceci à la matrice A, interprétée comme la matrice d'un endomorphisme on obtient en particulier

   $$\text{rg } A = n \Longleftrightarrow A \text{ inversible}$$

   et

   $$\text{rg } A = n \Longleftrightarrow \text{ Les vecteurs colonnes sont libres } \Longleftrightarrow \det_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, ..., C_n) \neq 0$$

   De plus, puisque $AA^{-1} = I_n$ nous avons la formule

   $$1 = \det I_n = \det (AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$$

   et

   $$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

3. Si A et A' sont deux matrices représentant le même endomorphisme f alors il existe une matrice P telle que $A' = P^{-1}AP$. On a

   $$\det A' = \det (P^{-1}AP) = \det (P^{-1}A) \det P = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$$

   Ainsi le déterminant d'une application linéaire ne dépend pas de la base dans laquelle on écrit sa matrice et on a

   $$\det f = \det A \text{ où } A \text{ est la matrice de } f \text{ dans n'importe quelle base de } E$$

4. On appelle comatrice de A ou bien matrice des cofacteurs de A, la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ notée $Com\ A$ définie par :

   $$Com\ A = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

   Alors si A est inversible,

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^tCom(A)$$

Chapitre IV
Systèmes d'équations linéaires

IV.1 Position du problème

Soit à résoudre le système d'équations linéaires de m équations et n inconnues suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & ... & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & & \\
... & & ... & & ... & & ... & & ... \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & ... & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
... & & ... & & ... & & ... & & ... \\
 & & & & & & & & \\
a_{m-11}x_1 & + & a_{m-12}x_2 & + & ... & + & a_{m-1n}x_n & = & b_{m-1} \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

Les a_{ij} ainsi que les b_i sont des données, éléments de K.
Les x_i sont les n inconnues éléments de K .

1. **Ecriture matricielle** : On peut écrire ce système de la façon suivante :

$$AX = B$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\
 & & & \\
... & ... & ... & ... \\
a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\
... & ... & ... & ... \\
 & & & \\
a_{m-11} & a_{m-12} & ... & a_{m-1n} \\
a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}
\end{pmatrix}$$

2. **Ecriture vectorielle** : Si on note $A_1, A_2, \cdots, A_n$ les colonnes de la matrice A alors le système s'écrit

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots x_nA_n = B$$

3. **Ecriture fonctionnelle** : Si la matrice A représente l' application linéaire f de $L(E, F)$ et si X et B sont les matrices colonnes représentant les vecteurs x et b alors le système sécrit aussi

$$f(x) = b$$

Résoudre ce système, c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ qui satisfont aux m équations. C'est définir l'ensemble des antécédents de b par f.

Si $b = 0_F$, l'équation $f(x) = 0_F$ est appelée **équation homogène**, elle représente le **système homogène**. Résoudre ce système revient à détermnier le noyau Ker f. On a toujours $0_E \in$ Ker f donc 0_E est toujours solution du système homogène, c'est la solution triviale.

Soit x_0 une solution particulière de (S) alors on a $f(x_0) = b$ et le système à résoudre devient

$$f(x) = f(x_0) \quad \text{soit} \quad f(x - x_0) = 0_F \quad \text{et} \quad x - x_0 \in \text{Ker } f$$

Les solutions de (S) sont de la forme $z + x_0$ où $z \in$ Ker f et x_0 est une solution particulière.

IV.2 Pivot de Gauss

Exemples :
Exemple A.4.1
Exemple A.4.2
Exemple A.4.3

Exercices :
Exercice B.4.1

Nous nous contenterons de présenter cette méthode sur trois exemples. Cette méthode consiste à transformer le système en un système triangulaire (c'est-à-dire tel que la matrice du système soit triangulaire) et que l'on résout facilement en partant du bas.

Cette transformation se fait en remplaçant une ligne par cette ligne plus une constante fois une ligne fixée à l'avance de sorte de faire apparaître un zéro.

Les exemples A.4.1, A.4.2 et A.4.3 présentent les trois cas de figure possibles.

Cette méthode est assez pratique.

IV.3 Systèmes de Cramer

Exemples :
Exemple A.4.4

On se place dans le cas particulier où $m = n$. Nous allons présenter un procédé de résolution utilisant le calcul des déterminants. Le résultat est le suivant :

Théorème IV.2 *Le système (S) a une unique solution si et seulement si le déterminant de A n'est pas nul.*

Dans ce cas le système (S) est qualifié de Cramer.

Si on note $A_1, A_2, \cdots, A_n$ les n colonnes de A alors l'unique solution de (S) est donnée par les égalités suivantes :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \qquad x_i = \frac{det_{\mathcal{E}}(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)}{det\ A}$$

(on a remplaçé la colonne i par le vecteur B.)

Démonstration : document C.3.1

Chapitre V
Réduction des endomorphismes

V.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Exemples :
Exemple A.5.1

Exercices :
Exercice B.5.1

Dans tout ce chapitre, E désigne un $K-$espace vectoriel de dimension n et f est un endomorphisme de E.

Le but de ce chapitre est de trouver une base $\mathcal{E}$ de E telle que Mat $(f, \mathcal{E})$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{E}$, soit la plus "simple" possible, l'idéal étant lorsque Mat $(f, \mathcal{E})$ est diagonale.

On appelle **valeur propre** de f un scalaire λ de K tel qu'il existe un vecteur v de E non nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Le vecteur v est appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.

V.2 Espace propre

Exemples :
Exemple A.5.2

Exercices :
Exercice B.5.2

Soit λ un scalaire, on note : $E_\lambda = \{v \in E,\ f(v) = \lambda v\}$. On a :

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{v \in E,\ f(v) - \lambda v\ = 0_E\} \\ &= \{v \in E,\ (f - \lambda\ Id_E)(v)\ = 0_E\} \\ &= Ker(f - \lambda Id_E) \end{aligned}$$

Par conséquent, E_λ est un s.e.v. de E puisqu'il est le noyau d'une application linéaire.

Si λ n'est pas valeur propre de f alors seul le vecteur nul vérifie $f(v) = \lambda v$ et $E_\lambda = \{0_E\}$.

Si au contraire λ est une valeur propre de f, alors $E_\lambda \neq \{0_E\}$ et E_λ est appelé **sous espace propre** de E relatif à la valeur propre λ de f et dans ce cas, dim $E_\lambda \geq 1$.

On constate que si λ est une valeur propre de f, alors E_λ est stable par f ce qui signifie que pour tout $v \in E_\lambda,\ \ f(v) \in E_\lambda$ c'est-à-dire $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

En effet, si $v \in E_\lambda, f(v) = \lambda v$ et $\lambda v \in E_\lambda$ puisque E_λ est un s.e.v. de E donc en particulier, E_λ est stable pour la loi interne. On peut donc considérer la restriction de f à E_λ dont la matrice dans une base $\mathcal{E}_\lambda$ de E_λ est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{\text{dim } E_\lambda}(K)$$

V.3 Polynôme caractérisitique

Exemples :
Exemple A.5.3

Exercices :
Exercice B.5.3

Soit $A = (a_{ij})_{i\in\{1,2,\cdots,n\},j\in\{1,2,\cdots,n\}} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Théorème V.3 (admis) *On définit la fonction $P_A(x)$ par*

$$P_A(x) = det(A - xI_n).$$

Cette fonction est une fonction polynôme de degré n, qui s'ecrit

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\ Tr(A)x^{n-1} + \cdots +\ det(A) \quad \text{où} \quad Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Cette fonction polynôme s'appelle le ***polynôme caractéristique*** *de A.*

Si A et A' sont les matrices d'un même endomorphisme f relativement à deux bases différentes alors $P_A(x) = P_{A'}(x)$.

En effet, par la formule de changement de base (II.3.2) on a

$$A' = P^{-1}AP \ \text{ où } \ P \ \text{ est la matrice de passage entre les deux bases.}$$

Il est clair que $A' - xI_n = P^{-1}(A - xI_n)P$ et en prenant le déterminant on obtient

$$\det\,(A' - xI_n) \ = \ = \det\,(P^{-1})\ \det\,(A - xI_n)\ \det P = \det\,(A - xI_n)$$

puisque $\det\,(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det P}$.

Ainsi on peut définir le polymôme caractéristique de f, par

$$P_f(x) = det(f - x\mathrm{id}_E) = det(A - xI_n)$$

pour toute matrice A représentant f dans une base de E.

Théorème V.4 *Les valeurs propres de f sont les racines de P_f.*

Démonstration : document C.4.1

On appelle **multiplicité** d'une valeur propre λ, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de P_f. On la note m_λ.

Propriété V.5 *Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice représentative dans une base de E.*
- *Si $\dim E = n$, alors f a au plus n valeurs propres.*
- *Si P_f est scindé, (ce qui sera toujours le cas si $K = \mathbb{C}$) alors :*
  - *f a n valeurs propres distinctes ou non.*
  - *La somme des valeurs propres est égale à $Tr(A)$.*
  - *Le produit des valeurs propres de f est égal à $\det A = \det f$.*

Démonstration : document C.4.2

V.4 Diagonalisation des endomorphismes

Exemples :
Exemple A.5.4

Exercices :
Exercice B.5.4

Si λ est une valeur propre de multiplicité m_λ de l'endomorphisme f et si E_λ est l'espace propre associé, alors on vérifie que

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$$

Remarque : Si $m_\lambda = 1$ alors $\dim E_\lambda = 1 = m_\lambda$.

Un endomorphisme f est diagonalisable, s'il existe une base $\mathcal{V}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale c'est-à-dire,

$$\text{Mat } (f, \mathcal{V}) \quad = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(on notera $\mathcal{E}$ la base canonique de E)

Premières conséquences : Si f est diagonalisable alors

1. les termes de la diagonale principale de la matrice sont les valeurs propres de f.
2. le nombre de fois où figure une valeur propre sur cette diagonale est égal à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre.
3. ce nombre est aussi égal à la dimension du sous espace propre associé à cette valeur propre.
4. le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_f(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x)$$

il est donc scindé dans K.

Au vu de la matrice il est clair que

f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres.

On peut également montrer que la réunion des bases des espaces propres forme toujours une famille libre.

Nous avons de plus l'équivalence suivante :

Théorème V.6 (Admis) *f est diagonalisable si et seulement si* $\left\{ \begin{array}{l} P_f \text{ est scindée dans } K \\ \text{Pour toute valeur propre } \lambda, \dim E_\lambda = m_\lambda. \end{array} \right.$

Cas particulier important :

Corollaire V.7 *Si le polynôme caractéristique de f a $n = \dim E$ racines distinctes, alors f est diagonalisable.*

Démonstration : document C.4.3

V.5 Applications

Exemples :
Exemple A.5.5
Exemple A.5.6
Exemple A.5.7

1) Calcul de A^m.

   Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(K)$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ tels que $D = P^{-1}AP$ et $A = PDP^{-1}$.
   On a alors $A^m = PD^mP^{-1}$ avec $D^m = \text{Diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m)$.

   (cf l'exemple A.5.5)

2) Applications aux systèmes linéaires d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

   Nous nous contenterons de présenter un exemple.
   Soit à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x(t) & & & + & 4z(t) & = & x'(t) \\ 3x(t) & - & 4y(t) & + & 12z(t) & = & y'(t) \\ x(t) & - & 2y(t) & + & 5z(t) & = & z'(t) \end{array}\right.$$

   où x, y et z sont des fonctions de la variable t et x', y' et z' sont leurs dérivées.

   Ce système s'écrit matriciellement

$$X'(t) = AX(t)$$

   où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad et \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

   on reconnaît la matrice A de l'exemple A.5.4. Ainsi en multipliant à gauche les deux membres de l'égalité $X'(t) = AX(t)$ par la matrice P^{-1} et en posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$$

   on obtient $Y'(t) = DY(t)$ où D est diagonale, et le système est très simple à résoudre.

   On résout en $Y(t)$ et on revient à $X(t)$ grâce à la relation $X(t) = PY(t)$.

   (voir les calculs dans l'exemple A.5.6).

3) Applications à des suites récurrentes.

   Nous nous contenterons encore de présenter un exemple.
   Soit les suites récurrentes $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in K^3 \; et \; \forall n \geq 0 \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & 2u_n & & & + & 4w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n & - & 4v_n & + & 12w_n \\ w_{n+1} & = & u_n & - & 2v_n & + & 5w_n \end{array}\right.$$

Le problème est d'exprimer u_n,v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Pour cela en notant X_n le vecteur $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ on a avec les notations précédentes :

$$\forall n \geq 0 \qquad X_{n+1} = AX_n$$

Et par récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

(voir le résultat dans l'exemple A.5.7)

Annexe A
Exemples

A.1 Exemples du chapitre I

Exemple A.1.1

L'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ muni des lois + et . définies pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et tout λ de $\mathbb{R}$ par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ et } \lambda.(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

En effet, la loi interne est commutative et associative parce que l'addition de $\mathbb{R}$ possède ces propriétés.

Elle admet un neutre qui est $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ puisque

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

Enfin, tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique qui est $(-x, -y)$ puisque

$$(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

D'autre part, pour vérifier que la loi externe a les propriétés requises, il suffit d'écrire les formules et utiliser le fait que la multiplication dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à l'addition et admet le réel 1 comme neutre.

En effet pour tous $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et tous λ, μ de $\mathbb{R}$ on a

1. $\lambda.(v_1 + v_2) = \lambda.(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2)) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2)$
   $= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda.(x_1, y_1) + \lambda.(x_2, y_2) = \lambda.v_1 + \lambda.v_2$
2. $(\lambda + \mu).v_1 = (\lambda + \mu).(x_1, y_1) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)y_1) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda y_1 + \mu y_1)$
   $= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_1, \mu y_1) = \lambda.(x_1, y_1) + \mu.(x_1, y_1) = \lambda.v_1 + \mu.v_1$
3. $(\lambda\mu).v_1 = (\lambda\mu).(x_1, y_1) = ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)y_1) = (\lambda\mu x_1, \lambda\mu y_1) = \lambda.(\mu x_1, \mu y_1)$
   $= \lambda.(\mu.(x_1, y_1)) = \lambda.(\mu.v_1)$
4. $1.v_1 = 1.(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1) = v_1.$

Ainsi $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

On vérifie de la même manière que $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ muni des lois + et . définies pour tous $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$ et tout λ de $\mathbb{R}$ par

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \text{ et } \lambda.(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Plus généralement, on montre que $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n),$ avec pour $1 \leq i \leq n \quad x_i \in \mathbb{R}\}$ muni des lois + et . définies comme pour $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Exemple A.1.2

Définissons deux lois sur l'ensemble des fonctions polynômes $K[x]$. Une addition notée + où additionner deux fonctions polynômes revient à faire la somme des coefficients des termes de même degré. Une loi externe notée . où multiplier une fonction polynôme P par un scalaire revient à multiplier tous les coefficients de P par ce scalaire.

Si par exemple $P = x^3 + 2x^2 - 5$ et $Q = x^2 + 8x - 3$ alors

$$P + Q = x^3 + 3x^2 + 8x - 8 \text{ et } 3.P = 3x^3 + 6x^2 - 15$$

Alors $(K[x], +, .)$ est un $K-$ espace vectoriel.

Il suffit de vérifier que les lois + et . ont les propriétés requises.

Exemple A.1.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies de I vers $\mathbb{R}$. Pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit

$$f+g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \text{ où pour tout } x \in I, (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

et

$$\lambda.f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \text{ où pour tout } x \in I, (\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$$

Là encore, $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Exemple A.1.4

Soit $(E,+,.)$ un $K-$ espace vectoriel. E et $\{0_E\}$ sont clairement des sous-espaces vectoriels de E.

En effet $\{0_E\}$ est non vide puisqu'il contient 0_E et pour tout λ de K, $\lambda.0_E + 0_E = 0_E \in \{0_E\}$ donc $\{0_E\}$ est un s.e.v (= sous-espace vectoriel) de E.

De même, E est non vide puisqu'il contient 0_E et pour tous v_1, v_2 dans E et tout λ de K, $\lambda.v_1+v_2 \in E$ puisque les lois . et + sont à valeurs dans E donc E est un s.e.v de E.

Exemple A.1.5

L'ensemble $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y=0\}$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

Pour être dans E_1, un élément de $\mathbb{R}^3$ doit être tel que la somme des deux premiers coefficients vaut 0.

Regardons si E_1 contient le neutre de $\mathbb{R}^3$ à savoir $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$. On a bien $0+0=0$ donc $(0,0,0) \in E_1$ et E_1 n'est pas vide.

Regardons la stabilité par rapport aux lois + et ., c'est-à-dire si pour tous $v = (x,y,z)$ et $v' = (x',y',z')$ de E_1 et tout λ de $\mathbb{R}$, $\lambda.v + v' \in E_1$.

On a $\lambda.v + v' = \lambda.(x,y,z) + (x',y',z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (x',y',z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et $(\lambda x + x') + (\lambda y + y') = \lambda x + \lambda y + x' + y' = \lambda(x+y) + (x'+y') = \lambda 0 + 0 = 0$ puisque v et v' sont dans E_1.

Par suite $\lambda.v + v' \in E_1$ et E_1 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exemple A.1.6

L'ensemble $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=1\}$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

Pour être dans E_2, un élément de $\mathbb{R}^3$ doit être tel que la somme de tous ces coefficients vaut 1.

Regardons si E_1 contient $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$: $0+0+0 = 0 \neq 1$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \notin E_2$ et E_2 ne peut pas être un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ car la loi + n'a pas de neutre.

E_2 n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exemple A.1.7

Les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2 :

$$xe_1 + ye_2 = x(1,0) + y(0,1) = (x,0) + (0,y) = (x,y)$$

et $\mathbb{R}^2 = \text{Vect } (e_1, e_2)$.

De même les vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. En effet tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3 :

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = (x,y,z)$$

et $\mathbb{R}^3 = \text{Vect }(e_1, e_2, e_3)$.

Exemple A.1.8

Soit f_i la fonction polynôme définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_i(x) = x^i$ avec la convention que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$.

La famille de fonctions polynômes $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $K[x]$. En effet, toute fonction polynôme s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs f_i. Par exemple, si $P = x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 7$ alors

$$P = f_4 + 5f_3 - 12f_2 + 7f_0$$

Exemple A.1.9

Les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Pour le prouver, il faut partir d'une combinaison linéaire nulle des e_i et montrer que la seule possibilité est que les scalaires soient nuls.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

et (e_1, e_2) est donc une famille libre.

De même les vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En effet

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

et (e_1, e_2, e_3) est donc une famille libre.

Exemple A.1.10

La famille $\{(1,2,3), (1,1,1), (0,0,0)\}$ est liée car

$$0(1,2,3) + 0(1,1,1) + 7(0,0,0) = (0,0,0) \quad \text{avec} \quad \lambda_3 = 7 \neq 0$$

On a pu écrire une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs sans que tous les coefficients soient nuls, la famille est donc liée.

On remarque que ceci sera toujours le cas dès que la famillle contient le vecteur nul.

La famille $\{(1,2,3), (1,1,1), (2,4,6)\}$ est liée car

$$2(1,2,3) + 0(1,1,1) - 1(2,4,6) = (0,0,0) \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = 2 \neq 0$$

La famille $\{(1,2,3), (1,1,1), (1,3,5)\}$ est-elle libre ?

Partons d'une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs et voyons si nécessairement tous les scalaires sont nuls.

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(1,3,5) & = & (0,0,0) \\ \Longleftrightarrow & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3) & = & (0,0,0) \end{array}$$

ce qui conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 & = & 0\\ 3\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1 & = & -\lambda_2-\lambda_3\\ -2\lambda_2-2\lambda_3+\lambda_2+3\lambda_3 & = & 0\\ -3\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_2+5\lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\lambda_2 & = & \lambda_3\\ \lambda_1 & = & -2\lambda_3\\ 0 & = & 0\end{array}\right.$$

On constate que quel que soit λ_3,

$$-2\lambda_3(1,2,3)+\lambda_3(1,1,1)+\lambda_3(1,3,5)=(0,0,0)$$

en particulier, si $\lambda_3=-1$,

$$2(1,2,3)-(1,1,1)-(1,3,5)=(0,0,0)$$

La famille $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,3,5)\}$ est donc liée.

Exemple A.1.11

Les vecteurs $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ puisqu'ils sont générateurs et libres. (cf exercices A.1.7 et A.1.9)

De même, les vecteurs $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'ils sont générateurs et libres. (cf exercices A.1.7 et A.1.9)

De la même façon dans $\mathbb{R}^n$ les vecteurs $e_1,e_2,...,e_n$ définis par :

$$\begin{array}{lcl}e_1 & = & (1,0,0,...,0)\\ e_2 & = & (0,1,0,...,0)\\ \vdots & \vdots & \quad\vdots\\ e_n & = & (0,0,0,...,1)\end{array}$$

forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Exemple A.1.12

Dans l'exercice B.1.3, quand nous avons montré que les vecteurs $\alpha_1=(1,1,0)$, $\alpha_2=(0,0,1)$ et $\alpha_3=(1,-1,-2)$ de $\mathbb{R}^3$ formaient une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ nous avons été amené à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1+\lambda_3 & = & x\\ \lambda_1-\lambda_3 & = & y\\ \lambda_2-2\lambda_3 & = & z\end{array}\right.$$

dont l'unique solution est

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1 & = & \frac{1}{2}(x+y)\\ \lambda_3 & = & \frac{1}{2}(x-y)\\ \lambda_2 & = & x-y+z\end{array}\right.$$

Ainsi,

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \exists\,!\ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ définis par la système (S) ci-dessus tels que $(x,y,z)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$

ce qui d'après le théorème I.3 assure que la famille $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple A.1.13

$\mathbb{R}^2$ est de dimension finie puisque nous avons montré dans l'exemple A.1.11 que $\mathbb{R}^2$ était engendré par deux vecteurs. Ces deux vecteurs étant libres, nous avons donc $\dim\mathbb{R}^2=2$.

De même, nous avons trouvé deux bases différentes de $\mathbb{R}^3$ (cf les exemples A.1.11 et A.1.12) de même cardinal 3, donc $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie et $\dim\mathbb{R}^3=3$.

Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim\mathbb{R}^n=n$

D'après l'exercice B.1.5, $K_n[x]$ est de dimension finie et $\dim K_n[x]=n+1$. (Attention!)

Exemple A.1.14

Voici plusieurs méthodes pour montrer que les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ définis dans l'exercice B.1.4 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 1 : Montrer comme dans les exercices B.1.3 et B.1.4 qu'ils forment une famille libre et génératrice. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2 : Montrer comme dans l'exercice B.1.3 qu'ils forment une famille génératrice et remarquer que cette famille est composée de trois vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. On conclut grâce à la propriété I.5 que la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 3 : Montrer comme dans l'exercice B.1.4 qu'ils forment une famille libre et remarquer que cette famille est composée de trois vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. On conclut grâce à la propriété I.5 que la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

<u>Remarque</u> : $\mathrm{rg}\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

A.2 Exemples du chapitre II

Exemple A.2.1

La question est de savoir si les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont inversibles ?

Pour A, cherchons une matrice $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AA' = A'A = I_2$. Nous avons

$$AA' = I_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ x+3z & y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ y+2t & = & 0 \\ x+3z & = & 0 \\ y+3t & = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2t \\ x & = & -3z \\ z & = & -1 \\ t & = & 1 \end{array} \right.$$

d'où $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie ensuite que $AA' = A'A = I_2$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

De la même manière pour B, on cherche une matrice $B' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $BB' = B'B = I_2$. Nous avons

$$BB' = I_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est impossible puisque $1 \neq 0$ donc B n'est pas inversible.

Exemple A.2.2

1. Soit E un espace vectoriel sur K et α un élément de K non nul. Soit g_α l'application définie par

$$g_\alpha : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & \alpha.v \end{array}$$

   Alors $g_\alpha \in L(E)$. En effet, pour tous $(v, v') \in E^2$ et tout $\lambda \in K$,

$$g_\alpha(\lambda v + v') = \alpha.(\lambda.v + v') = \alpha.(\lambda.v) + \alpha.v' = (\alpha\lambda).v + \alpha.v' = (\lambda\alpha).v + \alpha.v' = \lambda.(\alpha.v) + \alpha.v' = \lambda.g_\alpha(v) + g_\alpha(v')$$

   L'application g_α est appellée l'homothétie de E de rapport α.

2. Soit l'application

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & y \end{array}$$

   alors $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. En effet, pour tous $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} g(\lambda.v + v') & = & g((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')) \\ & = & \lambda y + y' \\ & = & \lambda.g(v) + g(v') \end{array}$$

   g s'appelle une projection.

Exemple A.2.3

L'application $\begin{array}{rccc} f_1 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective car $f_1(-2) = f_1(2) = 4$ donc on peut avoir $f_1(x) = f_1(y)$ sans que $x = y$, ce qui nie la définition d'injectif.

Une autre façon de le démontrer est de regarder ce que signifie $f_1(x) = f_1(y)$. On a pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,

$$f_1(x) = f_1(y) \Longleftrightarrow x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

donc pas forcément $x = y$.

L'application $\begin{array}{rccc} f_2 & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est injective car pour tout x et y dans $\mathbb{R}_+$,

$$f_2(x) = f_2(y) \Longleftrightarrow x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

mais x et y sont positifs donc $x = -y$ est impossible et $f_2(x) = f_2(y) \Longrightarrow x = y$.

Exemple A.2.4

L'application $\begin{array}{rccc} f_1 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective car pour $w = -2$, il n'existe pas de v tel que $f_1(v) = w$. En effet, $f_1(v) = v^2$ et un carré est toujours positif.

L'application $\begin{array}{rccc} f_3 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est surjective car pour tout w dans $\mathbb{R}_+$, il existe $v = \sqrt{w}$ tel que $f_3(v) = v^2 = (\sqrt{w})^2 = w$..

Exemple A.2.5

Une application bijective est à la fois injective et surjective donc l'application $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

En effet, elle est injective d'après l'exemple A.2.3 et surjective d'après l'exemple A.2.4.

Exemple A.2.6

Dans l'exercice B.2.6 nous avons montré que l'application

$$\begin{array}{rccc} g_2 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x, y-3x) \end{array}$$

était linéaire. Déterminons son noyau.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x,y) \in \text{Ker } g_2 \Longleftrightarrow g_2(x,y) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (x+y, 2x, y-3x) = (0,0,0)$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ 2x & = & 0 \\ y-3x & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = y = 0$$

Le seul vecteur du noyau est $(0, 0)$ et Ker $g_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et g_2 est injective.

Que dire de la surjectivité ?

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces de dimension finie donc d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } g_2 = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } g_2 = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

puisque l'espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0.

Ainsi, Im g_2 est un s.e.v. de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc Im $g_2 \neq \mathbb{R}^3$ et g_2 n'est pas surjective.

D'après les calculs faits dans l'exercice B.2.6 pour savoir si g_2 était surjective ou non on a

$$\begin{array}{rcl} \text{Im } g_2 & = & \{w = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \gamma = \alpha - 2\beta\} \\ & = & \{(\alpha, \beta, \alpha - 2\beta), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{\alpha(1,0,1) + \beta(0,1,-2), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & Vect\{(1,0,1),(0,1,-2)\} \end{array}$$

On voit donc que les vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,-2)$ sont générateurs de Im g_2, on vérifie aisément qu'ils forment une famille libre.

Ainsi, $\{(1,0,1),(0,1,-2)\}$ est une base de Im g_2 et on retrouve que dim Im $g_2 = 2$.

Exemple A.2.7

Dans l'exemple A.2.2 nous avons montré que l'application

$$\begin{array}{rccl} g_\alpha : & E & \longrightarrow & E \\ & v & \longmapsto & \alpha.v \text{ avec } \alpha \neq 0_K \end{array}$$

était linéaire. Déterminons son noyau. Soit $v \in E$.

$$v \in \text{Ker } g_\alpha \iff g_\alpha(v) = 0_E \iff \alpha.v = 0_E \iff \alpha = 0_K \text{ ou } v = 0_E$$

Ici, $\alpha \neq 0_K$ donc nécessairement $v = 0_E$ et Ker $g = \{0_E\}$ et g est injective.

Si E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang qui permet d'écrire

$$\text{dim Im } g_\alpha = \text{dim } E - \text{dim Ker } g_\alpha = \text{dim } E$$

puisque l'espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0.

Ainsi, Im g_α est un s.e.v. de E de même dimension que E donc Im $g_\alpha = E$ et g_α est surjective.

Cependant, les homothéties peuvent être définies sur des espaces qui ne sont pas de dimension finie et le théorème du rang ne s'applique plus. Pour savoir si g_α est surjective, il faut revenir à la définition :

Soit $w \in E$ on cherche $v \in E$ tel que $g_\alpha(v) = w$, c'est-à-dire $\alpha.v = w$. Or $\alpha \neq 0_K$ donc il existe $\alpha' \in K$ tel que $\alpha\alpha' = 1_K$. Par suite, si $v = \alpha' w$ alors

$$g_\alpha(v) = \alpha\alpha' w = 1_K w = w$$

et g_α est surjective.
Remarque : $\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$.

Exemple A.2.8

Dans l'exemple A.2.2 nous avons montré que l'application

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & y \end{array}$$

était linéaire. Déterminons son noyau.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \text{Ker } g \iff g(x,y,z) = 0 \iff y = 0$$

donc

$$\begin{aligned}\text{Ker } g &= \{w=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } y=0\}\\ &= \{(x,0,z),\quad (x,z)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \{x(1,0,0)+z(0,0,1),\quad (x,z)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \text{Vect }\{(1,0,0),(0,0,1)\}\end{aligned}$$

On voit donc que les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ sont générateurs de Ker g, on vérifie aisément qu'ils forment une famille libre.

Ainsi, $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ est une base de Ker g et dim Ker $g=2$ donc g n'est pas injective.

Que dire de la surjectivité ?

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces de dimension finie donc d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } g = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } g = 3-2=1$$

Ainsi, Im g est un s.e.v. de dimension 1 dans $\mathbb{R}$ de dimension 1, donc nécessairement, Im $g=\mathbb{R}$ et g est surjective.

Exemple A.2.9

Ecrivons la matrice de l'application linéaire

$$g: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & y\end{array}$$

relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

Soit donc $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f_1=(1)$ le vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}$. Il faut calculer les images de e_1,e_2 et e_3 en fonction de f_1.

Il est clair que $g(e_1)=g(e_3)=0=0.f_1$ et $g(e_2)=1=1.f_1$ d'où la matrice

$$A=\text{Mat }(g,(e_1,e_2,e_3),(f_1)) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3)\end{array} & \\ \begin{pmatrix} \;\;0\;\; & \;\;1\;\; & \;\;0\;\; \end{pmatrix} & f_1\end{array}$$

Exemple A.2.10

Ecrivons la matrice de l'application linéaire

$$g_2: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,2x,y-3x)\end{array}$$

relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{E}=(e_1,e_2)$ et $\mathcal{F}=(f_1,f_2,f_3)$ avec $e_1=(1,0),\ e_2=(0,1),\ f_1=(1,0,0), f_2=(0,1,0)$ et $f_3=(0,0,1)$, les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Nous avons

$$\begin{aligned} g_2(e_1)=g_2(1,0) &= (1,2,-3)=f_1+2f_2-3f_3\\ g_2(e_2)=g_2(0,1) &= (1,0,1)=f_1+0f_2+f_3\end{aligned}$$

d'où

$$B=\text{Mat }(g_2,\mathcal{E},\mathcal{F}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} g_2(e_1) & g_2(e_2)\end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3\end{array}\end{array}$$

Exemple A.2.11

Dans l'exercice B.2.5 nous avons montré que la matrice C définie par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension 3 de base respective $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

On peut associer à la matrice C l'application linéaire f de E vers E complètement définie par la donnée des images par f des vecteurs (e_1, e_2, e_3) et telle que $C = \mathrm{Mat}\ (f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & f_1 + f_2 \\ f(e_2) & = & f_3 \\ f(e_3) & = & f_1 - f_2 - 2f_3 \end{array}$$

Et comme la matrice de f est inversible, la fonction f est bijective et f^{-1} est définie par

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(f_1) & = & \frac{1}{2}(e_1 + 2e_2 + e_3) \\ f^{-1}(f_2) & = & \frac{1}{2}(e_1 - 2e_2 - e_3) \\ f^{-1}(f_3) & = & e_3 \end{array}$$

Exemple A.2.12

Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} g_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x + y, 2x, y - 3x) \end{array}$$

dont la matrice relativement aux bases canoniques $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \mathrm{Mat}\ (g_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ deux nouvelles bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, définies par

$$e'_1 = (2, 1),\ e'_2 = (3, 2),\ f_1 = (1, 1, 0), f_2 = (0, 0, 1) \quad \text{et} \quad f_3 = (1, -1, -2)$$

Déterminons la matrice $A' = \mathrm{Mat}\ (g_2, \mathcal{E}', \mathcal{F})'$.

D'après la formule établie précédemment nous avons

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} \quad \text{et} \quad Q = P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}.$$

Par définition, les matrices P et Q valent :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il faut inverser la matrice Q ce que nous avons déjà fait (cf exercice B.2.5) et qui peut aussi se faire en exprimant les vecteurs f_1, f_2 et f_3 en fonction des vecteurs f'_1, f'_2 et f'_3 puisque Q^{-1} est la matrice de passage entre les bases $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$.

De toutes les façons on trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{11}{2} \\ -6 & -8 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple A.2.13

Déterminons le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{34}(K)$$

On sait que

$$\text{rg } A \leq \min(3,4) = 3$$

et que

$$\text{rg } A = \dim \text{ Vect } \{C_1, C_2, C_3, C_4\} = \dim \text{ Vect } \{L_1, L_2, L_3\}$$

Or on constate que $L_2 = L_3 + 2L_1$ donc Vect $\{L_1, L_2, L_3\} =$ Vect $\{L_1, L_3\}$ et comme L_1 et L_3 ne sont ni nulles, ni proportionnelles, $\{L_1, L_2\}$ est libre donc

$$\text{rg } A = 2$$

.

A.3 Exemples du chapitre III

Exemple A.3.1

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Calculons le déterminant de A en le développant par rapport à la 1ère ligne.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}(a_{11}) \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(a_{12}) \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad +(-1)^{1+3}(a_{13}) \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{1}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}
\end{aligned}$$

Dans le cas où la matrice est carrée d'ordre 3, il existe une autre façon de présenter ce calcul que l'on appelle la règle de Sarrus. (cf cours en présentiel)

Exemple A.3.2

Le calcul du déterminant des matrices diagonales ou traingulaires se prête très bien au développement par rapport à une ligne ou à une colonne à cause du grand nombre de zéros contenus dans ces matrices.

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des termes diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & ... & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & ... & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & ... & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \\ 0 & ... & ... & 0 & a_{ii} & ... & a_{in} \\ \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Il suffit de développer chaque déterminant par rapport à la première colonne.

En transposant, on obtient que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est égal au produit des termes diagonaux.

Les matrices diagonales étant des matrices triangulaires particulières, leur déterminant est égal au produit des termes diagonaux.

Exemple A.3.3

Calculons le déterminant de la matrice

$$Z = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 3 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$$

Nous allons essayer de faire apparaitre des zéros grâce aux opérations autorisées sur les lignes ou colonnes.

$$
\begin{aligned}
\det Z &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 3 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 2 \\ 1-\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \\
& \quad \text{en remplaçant } C_1 \text{ par } C_1 - C_2 \text{ pour annuler le 3 de } C_1. \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{en factorisant } C_1 \text{ par } (\lambda-1) \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 + L_1. \\
&= (\lambda-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à } C_1. \\
&= (\lambda-1)[\lambda(\lambda+1)-3] = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-3)
\end{aligned}
$$

Exemple A.3.4

Pour savoir si l'endomorphisme f associé à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

est bijectif, il suffit de calculer $\det T$. Or T étant triangulaire, son déterminant est égal au produit des termes diagonaux et

$$\det T = 1 \times 0 \times 12 = 0$$

donc T n'est pas inversible et f n'est pas bijectif.

A.4 Exemples du chapitre IV

Exemple A.4.1

Soit à résoudre le système d'équations linéaires :

$$(I)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} [5]x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1 \\ 5x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & -1 & l_2 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & l_3 \end{array}\right.$$

$$(I)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1' \leftarrow l_1 \\ & & [-8]x_2 & + & x_3 & = & -13 & l_2' \leftarrow l_2 - \frac{5}{5}l_1 \\ & & \frac{18}{5}x_2 & + & \frac{9}{5}x_3 & = & \frac{63}{5} & l_3' \leftarrow l_3 - \frac{-4}{5}l_1 \end{array}\right.$$

$$(I)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1'' \leftarrow l_1 \\ & & -8x_2 & + & x_3 & = & -13 & l_2'' \leftarrow l_2' \\ & & & & \frac{9}{4}x_3 & = & \frac{27}{4} & l_3'' \leftarrow l_3' - \frac{(\frac{18}{5})}{-8}l_2' \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire qui se résoud facilement :

$$(I) \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = 3 \;\; x_2 = 2 \;\; x_1 = 1$$

Le 5 encadré est appelé le premier pivot. Le -8 encadré est appelé le deuxième pivot.

Un des intérets de cette méthode est que l'on raisonne par équivalence. En effet les systèmes successifs ont exactement le même ensemble solution.

Exemple A.4.2

Soit à résoudre le système d'équations linéaires :

$$(II)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} [5]x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 & l_2 \\ -4x_1 & - & \frac{8}{5}x_2 & + & x_3 & = & 3 & l_3 \end{array}\right.$$

$$(II)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1' \leftarrow l_1 \\ & & & & x_3 & = & -13 & l_2' \leftarrow l_2 - \frac{5}{5}l_1 \\ & & & & \frac{9}{5}x_3 & = & \frac{63}{5} & l_3' \leftarrow l_3 - \frac{-4}{5}l_1 \end{array}\right.$$

$$(II)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & x_3 & + & 2x_2 & = & 12 & l_1' \leftarrow l_1 \\ & & & & [1]x_3 & = & -13 & l_2' \leftarrow l_2 \\ & & & & 0 & = & 36 & l_3' \leftarrow l_3 - \frac{-9}{5}l_2 \end{array}\right.$$

Le système n'a donc pas de solution, on dit aussi qu'il est impossible.

Exemple A.4.3

Soit à résoudre le système d'équations linéaires :

$$(III)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} [5]x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & l_2 \\ -5x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 8 & l_3 \end{array}\right.$$

$$(III)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1' \leftarrow l_1 \\ & & [-3]x_2 & + & x_3 & = & -10 & l_2' \leftarrow l_2 - \frac{5}{5}l_1 \\ & & 6x_2 & - & 2x_3 & = & 20 & l_3' \leftarrow l_3 - \frac{-5}{5}l_1 \end{array}\right.$$

$$(III)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1'' \leftarrow l_1' \\ & & -3x_2 & + & x_3 & = & -10 & l_2'' \leftarrow l_2' \\ & & & & 0 & = & 0 & l_3'' \leftarrow l_3' - \frac{6}{-3}l_2' \end{array}\right.$$

$$(III) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 + 2x_2 & = & 12 - x_3 \\ -3x_2 & = & -10 - x_3 \end{array} \right.$$

$$(III) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{15}(16 - 5x_3) \\ \\ x_2 & = & \frac{1}{3}(10 + x_3) \end{array} \right.$$

Le système a donc une infinité de solution.

$$S = \left\{ \left(\frac{16}{15}, \frac{10}{3}, 0 \right) + x_3(-1, 1, 3)/x_3 \in K \right\}$$

Exemple A.4.4

On se propose de résoudre par la méthode de Cramer le système à trois équations, trois inconnues :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 5y + 2z & = & 7 \\ x + 2y - 4z & = & 3 \\ 3x - 4y - 6z & = & 5 \end{array} \right.$$

La matrice associée à ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est égal à

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 10 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -10 & 6 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{en remplaçant } L_1 \text{ par } L_1 - 2L_2 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 - 3L_2 \\ &= (-1)^{2+1} \times 1 \begin{vmatrix} -9 & 10 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{en développant par rapport à la 1ère colonne} \\ &= -(-54 + 100) = -46 \neq 0 \end{aligned}$$

Le déteminant de A n'est pas nul donc d'après le théorème IV.2 les solutions sont (x, y, z) avec

$$x = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} \quad y = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{et } z = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

Calculons x

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46} \times 2 \begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{en factorisant la dernière colonne par 2} \\ &= -\frac{1}{23} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 17 & -8 & -2 \\ 26 & -19 & -3 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{en remplaçant } C_1 \text{ par } C_1 - 7C_3 \text{ et } C_2 \text{ par } C_2 + 5C_3 \\ &= -\frac{1}{23}(-1)^{1+3} \times 1 \begin{vmatrix} 17 & -8 \\ 26 & -19 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{en développant par rapport à la 1ère ligne} \\ &= -\frac{1}{23}(17 \times (-19) + 8 \times 26) = 5 \end{aligned}$$

Calculons y

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46} \times 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en factorisant la dernière colonne par 2} \\
&= -\frac{1}{23}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 13 & 0 \\ 9 & 26 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 + 2L_1 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 + 3L_1 \\
&= -\frac{1}{23}(-1)^{1+3} \times 1 \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 9 & 26 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en développant par rapport à la dernière colonne} \\
&= -\frac{1}{23}(4 \times 26 - 9 \times 13) = 1
\end{aligned}$$

Calculons z

$$\begin{aligned}
z &= -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 0 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -4 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en remplaçant } L_1 \text{ par } L_1 - 2L_2 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 - 3L_2 \\
&= -\frac{1}{46}(-1)^{2+1} \times 1 \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en développant par rapport à la 1ère colonne} \\
&= \frac{1}{46}(-9 \times (-4) + 10 \times 1) = 1
\end{aligned}$$

A.5 Exemples du chapitre V

Exemple A.5.1

Soit E de dimension 3 dont $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base.

Soit f un endomorphisme de E, défini par :

$$\text{Mat }(f, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Recherchons les valeurs propres de f. Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ on a

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_E)(v) = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)v = 0,$$

d'où

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (2-\lambda)x + 4z & = & 0 \\ 3x + (-4-\lambda)y + 12z & = & 0 \\ x - 2y + (5-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$(0, 0, 0)$ est une solution évidente de ce système. Ce triplet ne sera pas la seule solution si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif donc, puisqu'on est en dimension finie si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif, ce qui est équivalent au fait que la matrice $(A - \lambda I_3)$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si et seulement si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou encore, d'après les calculs effectués dans l'exercice B.3.3, si et seulement si,

$$-\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$$

Les valeurs propres de f sont donc $0, 1$ et 2.

Exemple A.5.2

Déterminons les espaces propres associés aux valeurs propres de la matrice

$$A = \text{Mat }(f, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

calculées dans l'exemple A.5.1 et qui valent 0, 1 et 2.

1. Pour $\lambda = 0$ on doit résoudre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4z & = & 0 \\ 3x - 4y + 12z & = & 0 \\ x - 2y + 5z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2z \\ y & = & \frac{3}{2}z \\ -2z - 3z + 5z & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_0 = \{(-2z, \frac{3}{2}z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect }\{(-4, 3, 2)\}$.

2. Pour $\lambda = 1$ on doit résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+4z &=& 0\\ 3x-5y+12z &=& 0\\ x-2y+4z &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4z\\ y &=& 0\\ -4z+0+4z &=& 0 \end{array}\right.$$

Donc $E_1 = \{(-4z, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect } \{(-4, 0, 1)\}$.

3. Pour $\lambda = 2$ on doit résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4z &=& 0\\ 3x-6y+12z &=& 0\\ x-2y+3z &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0\\ x &=& 2y\\ 2y-2y+0 &=& 0 \end{array}\right.$$

Donc $E_2 = \{(2y, y, 0), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect } \{(2, 1, 0)\}$.

Exemple A.5.3

Nous allons calculer le polymôme caractéristique des endomorphismes associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4\\ 3 & -4 & 12\\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Au cours de l'exemple A.5.1 nous avons calculé le polymôme caractéristique de l'endomorphisme associé à la matrice A. Nous avons obtenu $P_A(x) = -x(x-1)(x-2)$. On remarque que P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et que 0, 1 et 2 sont les trois valeurs propres de A, chacune étant de multiplicité 1.

On note que $0+1+2 = 3 = 2-4+5 = Tr(A)$. De plus on a det $(A) = 0 \times 1 \times 2 = 0$ et A n'est pas inversible.

Pour la matrice C, nous avons $P_C(x) = \det(C - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0\\ 0 & 2-x & 0\\ 6 & -3 & -1-x \end{vmatrix} = -(2-x)^2(1+x)$ puisque la matrice est triangulaire inférieure. On remarque que P_C est scindé dans $\mathbb{R}$ et les valeurs propres de C sont donc 2 (valeur propre double) et -1 (valeur propre simple).

On remarque que les valeurs propres sont sur la diagonale de C donc leur somme vaut $Tr(C)$ et leur produit vaut det$C$.

Exemple A.5.4

La question est de savoir si les endomorphismes associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4\\ 3 & -4 & 12\\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont diagonalisables.

1. Etude de A et de l'endomorphisme f associé : Nous avons $P_A(x) = -x(x-1)(x-2)$ (cf exemple A.5.1) dont les racines sont $0, 1$ et 2. Le polynôme caractéristique a donc $3 = \dim E$ racines distinctes donc, d'après le corollaire V.7, f est diagonalisable et il existe une base $\mathcal{V}$, formée de vecteurs propres de f, dans laquelle la matrice de f est diagonale.

   D'après les calculs de l'exemple A.5.2 nous avons

$$\begin{array}{rcl} E_0 &=& \text{Vect } \{(-4, 3, 2)\} = \text{Vect } \{v_0\}\\ E_1 &=& \text{Vect } \{(-4, 0, 1)\} = \text{Vect } \{v_1\}\\ E_2 &=& \text{Vect } \{(2, 1, 0)\} = \text{Vect } \{v_2\}. \end{array}$$

Or

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ en remplaçant la colonne 1 par } C_1 - 2C_2$$

$$= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la ligne 3}$$

$$= 2 \neq 0$$

Donc la famille $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, v_2\}$ est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\mathcal{V}$ est une base de E et

$$A' = \text{Mat }(f, \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De plus, par la formule du changement de base,

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathcal{E}\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Etude de C et de l'endomorphisme g associé : Nous avons $P_C(x) = -(x+1)(x-2)^2$ (cf exemple B.5.3), avec 2 valeur propre double et -1 valeur propre simple. Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$ et pour savoir si g est diagonalisable, il faut regarder si la dimension des espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres.
   (a) -1 est une valeur propre simple donc dim $E_{-1} = 1$. On peut calculer le vecteur propre associé et on obtient $E_{-1} = \text{Vect }\{(0,0,1)\} = \text{Vect }\{w_1\}$.

   (b) 2 est valeur propre double, il faut calculer la dimension de E_2.

   $$(x, y, z) \in E_2 \Longleftrightarrow 6x - 3y - 3z = 0 \Longleftrightarrow 2x - y = z$$

   Ainsi, $E_2 = \text{Vect }\{(1,0,2); (0,1,-1)\} = \text{Vect }\{w_2, w_3\}$. Les vecteurs w_2 et w_3 ne sont ni nuls ni colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de E_2 qui est donc de dimension 2. Ainsi, nous avons dim $E_{-1} = 1 = m_{-1}$ et dim $E_2 = 2 = m_2$. Par suite, l'endomorphisme g est diagonalisable dans une base de vecteurs propres.

   De plus, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

   La famille $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ est donc une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\mathcal{W}$ est une base de E et par la formule du changement de base on a

   $$C' = \text{Mat }(g, \mathcal{W}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Q^{-1}BQ \quad \text{avec} \quad Q = P_{\mathcal{E}\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Etude de J et de l'endomorphisme u associé :
   Calculons le polynôme caractéristique de la matrice J :

   $$P_J(x) = \det(J - xI) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} = (-x)(2-x) + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

   Ainsi, P_J est scindé dans $\mathbb{R}$ et 1 est valeur propre double de J. Pour savoir si u est diagonalisable ou pas, il faut comparer la dimension de E_1 avec la multiplicité de la valeur propre 1.
   Déterminons E_1 :

   $$(x, y) \in E_1 \Longleftrightarrow -x + y = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

   Donc $E_1 = \text{Vect }\{(1,1)\}$ qui est donc de dimension 1 puisque le vecteur $(1,1)$ n'est pas nul.

   Ainsi, dim $E_1 = 1 \neq m_1 = 2$ donc u n'est pas diagonalisable.

Exemple A.5.5

Calculons A^m avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

D'après l'exemple A.5.4, on sait que : $D = P^{-1}AP$, c'est à dire $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A^m = PD^mP^{-1}$ d'où

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 + 3\ 2^m & 8 - 2^{m+2} & -20 + 3\ 2^{m+2} \\ 3\ 2^{m-1} & -2^{m+1} & 3\ 2^{m+1} \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple A.5.6

Soit à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x(t) & & & + & 4z(t) & = & x'(t) \\ 3x(t) & - & 4y(t) & + & 12z(t) & = & y'(t) \\ x(t) & - & 2y(t) & + & 5z(t) & = & z'(t) \end{array} \right. \Longleftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

En multipliant à gauche les deux membres de l'égalité $X'(t) = AX(t)$ par la matrice P^{-1} et en posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t) \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient $Y'(t) = DY(t)$ qui sécrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix}$$

et qui conduit au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 0 \\ y_1'(t) & = & y_1(t) \\ z_1'(t) & = & 2z_1(t) \end{array} \right.$$

dont les solutions sont :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 \\ y_1(t) & = & c_2e^t \\ z_1(t) & = & c_3e^{2t} \end{array} \right.$$

où c_1, c_2, c_3 sont des scalaires.

On obtient $X(t)$ en écrivant $X(t) = PY(t)$. C'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x(t) & = & - & 4c_1 & - & 4c_2e^t & + & 2c_3e^{2t} \\ y(t) & = & & 3c_1 & & & + & c_3e^{2t} \\ z(t) & = & & 2c_1 & + & c_2e^t & & \end{array}\right.$$

où c_1, c_2, c_3 sont des scalaires.

Exemple A.5.7

Soit les suites récurrentes $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in K^3 \ et\ \forall n \geq 0 \quad \left\{\begin{array}{lllllll} u_{n+1} & = & 2u_n & & & + & 4w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n & - & 4v_n & + & 12w_n \\ w_{n+1} & = & u_n & - & 2v_n & + & 5w_n \end{array}\right.$$

Soit X_n le vecteur $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.

Ce qui donne d'après les calculs de l'exemple A.5.5

$$X_n = \begin{pmatrix} -4 + 3\ 2^n & 8 - 2^{n+2} & -20 + 3\ 2^{n+2} \\ 3\ 2^{n-1} & -2^{n+1} & 3\ 2^{n+1} \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{lllllll} u_n & = & -4 + 3\ 2^n\ u_0 & + & 8 - 2^{n+2}\ v_0 & - & 20 + 3\ 2^{n+2}\ w_0 \\ \\ v_n & = & 3\ 2^{n-1} u_0 & - & 2^{n+1} v_0 & + & 3\ 2^{n+1} w_0 \\ \\ w_n & = & u_0 & - & 2v_0 & + & 5w_0 \end{array}\right.$$

Annexe B
Exercices

B.1 Exercices du chapitre I

Exercice B.1.1

Vérifier que $(\mathbb{R}^3, +, .)$ défini dans l'exemple A.1.1 est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Exercice B.1.2

Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels ?

$$\begin{array}{rcl} E_3 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-z=0\} \\ E_4 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy=0\} \\ E_5 & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(0)=1\} \\ E_6 & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(1)=0\} \end{array}$$

Exercice B.1.3

Montrer que les vecteurs $\alpha_1 = (1,1,0)$, $\alpha_2 = (0,0,1)$ et $\alpha_3 = (1,-1,-2)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice B.1.4

Montrer que les vecteurs $\alpha_1 = (1,1,0)$, $\alpha_2 = (0,0,1)$ et $\alpha_3 = (1,-1,-2)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice B.1.5

Montrer que

$$K_n[x] = \{P \ \in \ K[x] \ \text{ avec } \ \deg P \leq n\}$$

est un s.e.v. de $K[x]$ et donner une base de ce s.e.v.

Exercice B.1.6

1. La famille $\mathcal{F} = \{(2,-3), (-6,12)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?
2. Quel est le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{G} = \{(2,-1,3), (5,2,-1), (9,0,5)\}$?

B.2 Exercices du chapitre II

Exercice B.2.1

Calculer ${}^t\Omega + \Delta$. Que remarquez-vous ?

Exercice B.2.2

Calculer $-5.\Delta$.

Exercice B.2.3

Calculer $\Delta\Omega$. Comparer ce résultat avec le produit $\Omega\Delta$.

Exercice B.2.4

Calculer ${}^t\Delta{}^t\Omega$. Comparer ce résultat avec le produit $\Omega\Delta$.

Exercice B.2.5

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Si oui, donner C^{-1}.

Exercice B.2.6

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, dites si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1.
$$\begin{array}{rccl} g_1 : & K[x] & \longrightarrow & K[x] \\ & P & \longmapsto & P' \text{ dérivée de } P \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rccl} g_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x, y-3x) \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rccl} g_3 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x+1, y-3x) \end{array}$$

Exercice B.2.7

Pour chacune des deux applications linéaires suivantes, déterminer le noyau, l'image et le rang et préciser, le cas échéant, si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1.
$$\begin{array}{rccl} h_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-z) \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rccl} h_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+2y-z, y+z, x+y-z) \end{array}$$

Exercice B.2.8

Ecrire les matrices des applications linéaires définies dans l'exercice B.2.7 relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice B.2.9

Soit Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui même dont la matrice relativement à la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \text{Mat }(\phi, \mathcal{E})$$

où $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)$.

Ecrire la matrice de Φ relativement à la base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (2, 1),\ e'_2 = (3, 2)$.

Exercice B.2.10

Calculer le rang de la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

B.3 Exercices du chapitre III

Exercice B.3.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A en le développant par rapport à la 1ère ligne, puis en appliquant la règle de Sarrus.

Exercice B.3.2

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix}$$

Indications : Faire apparaître des zéros dans la première colonne en utilisant le 1*, développer selon cette colonne et recommencer.*

Exercice B.3.3

1. Pour quelles valeurs de λ la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

   est-elle inversible ?

2. Même question pour la matrice

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

B.4 Exercices du chapitre IV

Exercice B.4.1

Résoudre par la méthode du pivot les systèmes suivants :

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ -4x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 2z & & & = & 4 \\ -2x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

et

$$(S_3)\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 3y & = & -1 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$$

B.5 Exercices du chapitre V

Exercice B.5.1

Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner les valeurs propres de f.

Exercice B.5.2

Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calculées dans l'exercice B.5.1 et qui valent 1 et -2.

Exercice B.5.3

Calculer le polynôme caractéristique des endomorphismes g et h canoniquement associés aux matrices

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice B.5.4

Les endomorphismes g, h et k dont les matrices respectives dans la base canonique sont

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont-ils diagonalisables ?

1. Si vous ne savez pas comment démarrer voir aide 1
2. Pour la solution de la matrice B voir aide 2
3. Pour la solution de la matrice H voir aide 3
4. Pour la solution pour la matrice K voir aide 4

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre I

Document C.1.1 Démonstration du théorème I.1

Soit $(F, +, .)$ un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E, +, .)$. Alors F n'est pas vide et pour tous v_1, v_2 de F et tout λ de K on a

$$\lambda.v_1 + v_2 \in F$$

Prenons $\lambda = 1$ on obtient $v_1 + v_2 \in F$ et $+$ est une loi interne, associative et communtative comme dans E.

Si on prend $\lambda = -1$ et $v_1 = v_2$ on obtient $0_E = -v_1 + v_1 \in F$ donc $0_E \in F$ et il est le neutre pour $+$ dans F.

En prenant $\lambda = -1$ et $v_2 = 0_E$ on obtient $-v_1 + 0_E \in F$ soit que le symétrique de tout élément de F est dans F. $(F, +)$ est donc un groupe commutatif.

Enfin, en prenant λ quelconque et $v_2 = 0_E$ on obtient $\lambda.v_1 + 0_E \in F$ soit que . est une loi externe qui a évidemment les mêmes propriétés dans F que dans E donc $(F, +, .)$ est un $K-$ espace vectoriel.

Document C.1.2 Démonstration du théorème I.2

$$\text{Vect }(A) \;=\; \left\{ \sum_{\substack{i \;\in J,\\ J\subset\mathbb{N},\\ J \;\text{ fini}}} \lambda_i x_i \;/\; \forall i \in J\;,\; \lambda_i \in K\;,\; x_i \in A \right\}$$

$\forall x_i \in A, x_i = 1x_i$ et x_i s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de A, donc $x_i \in$ Vect (A). Par suite, $A \subset$ Vect (A) qui est donc non vide.

Soient $v_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m$ et $v_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + ... + \mu_p x_p$ deux éléments de A et λ un scalaire, alors

$$\lambda v_1 + v_2 = \lambda\lambda_1 x_1 + \lambda\lambda_2 x_2 + ... + \lambda\lambda_m x_m + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + ... + \mu_p x_p$$

donc $\lambda v_1 + v_2$ s'écrit comme une somme finie d'éléments de A multipliés par des scalaires donc $\lambda v_1 + v_2 \in$ Vect (A).

Par suite, Vect (A) est non vide et stable pour les lois $+$ et ., c'est donc un s.e.v. de E.

Il reste à montrer que c'est le plus petit : Soit donc H, un s.e.v. de E qui contient A. Soit $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m \in$ Vect (A) avec $\forall i, x_i \in A$.

Puisque $A \subset H$, $\forall i, x_i \in H$, et en tant que s.e.v. de E, H est stable pour les lois $+$ et .. Ainsi, $v \in H$ et Vect $(A) \subset H$.

On vient de montrer que tout s.e.v. de E contenant A contient aussi Vect (A), donc Vect (A) est bien le plus petit s.e.v. de E contenant A.

Document C.1.3 Démonstration du théorème I.3

1. Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ soit une base de E.

   $\mathcal{B}$ est un système générateur donc

   $$\forall v \in E, \quad \exists \ \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \in K^n \quad \text{tels que} \quad v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

   Supposons qu'il existe une autre écriture de ce même vecteur v :

   $$v = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \cdots + \lambda'_n e_n$$

   alors

   $$\begin{aligned} & \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \cdots + \lambda'_n e_n \\ \Longleftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)e_2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n)e_n = 0_E \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \lambda_i - \lambda'_i = 0 \quad \text{puisque} \quad \mathcal{B} \quad \text{est libre} \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \lambda_i = \lambda'_i \end{aligned}$$

   d'où l'unicité de l'écriture.

2. Supposons maintenant que tout vecteur de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

   Ceci signifie en particuclier que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soit donc un combinaison linéaire nulle des e_i.

   $$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$$

   or il est clair que

   $$0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n = 0_E$$

   et par unicité de l'écriture, les λ_i sont forcément nuls et $\mathcal{B}$ est un système libre. Par suite, puisque nous avons déjà montré que $\mathcal{B}$ est générateur , $\mathcal{B}$ est une base.

C.2 Documents du chapitre II

Document C.2.1 Démonstration du théorème II.2.1

1. Ker $g \subset E$ est non vide car $g(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in$ Ker g.
   Pour tous v et v' dans Ker g et tout $\lambda \in K$ on a
   $$g(\lambda.v + v') = \lambda.g(v) + g(v') = \lambda.0_E + 0_E = 0_E$$
   donc $\lambda.v + v' \in$ Ker g.

   Ker g est non vide et stable pour les lois + et . de E alors Ker g est un s.e.v de E.
2. Im $g \subset F$ est non vide car $g(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in$ Im g.
   Pour tout $w \in$ Im g, il existe $v \in E$ tel que $g(v) = w$. De même, pour tout $w' \in$ Im g, il existe $v' \in E$ tel que $g(v') = w'$ et pour tout $\lambda \in K$
   $$g(\lambda.v + v') = \lambda.g(v) + g(v') = \lambda.w + w'$$
   et $\lambda.w + w'$ appartient à Im g.

   Im g est non vide et stable pour les lois + et . de F alors Im g est un s.e.v de F.
3. Supposons que g est surjective alors
   $$\forall w \in F, \exists\ v \in E \ \text{ tel que } \ w = g(v)$$
   et $F \subset$ Im g donc Im $g = F$

   Supposons que Im $g = F$ alors
   $$\forall w \in \text{Im } g = F, \exists v \in E \ \text{ tel que } \ w = g(v)$$
   et g est surjective.
   Par suite g est surjective $\Longleftrightarrow$ Im $g \ = \ F$.
4. Supposons que g soit injective. Alors
   $$\forall (v, v') \in E^2 \ \ g(v) = g(v') \Longrightarrow v = v'$$
   En particuler, si $v \in$ Ker g alors $g(v) = 0_F = g(0_E)$ et comme g est injective,
   $$g(v) = g(0_E) \Longrightarrow v = 0_E \ \text{ donc } \ \text{Ker } g = \{0_E\}.$$
   Supposons que Ker $g = \{0_E\}$. Soit v et v' deux vecteurs de E tels que $g(v) = g(v')$, alors
   $$g(v) = g(v') \Longleftrightarrow g(v) - g(v') = 0_F \Longleftrightarrow g(v - v') = 0_F \Longleftrightarrow v - v' \in \text{Ker } g \Longleftrightarrow v - v' = 0_E \Longleftrightarrow v = v'$$
   et g est injective.

   Par suite g est injective $\Longleftrightarrow$ Ker $g \ = \ \{0_E\}$

Document C.2.2 Démonstration du corollaire II.2.3

1. Il est clair que 1. $\Longrightarrow$ 2.
2. Si g est injective, alors dim Ker $g = 0$ et d'après le théorème du rang,
   $$\dim \text{Im } g = \dim E = n = \dim F$$
   donc $F =$ Im g et g est surjective.
3. Si g est surjective alors $F =$ Im g et rg $g = \dim F = n$.
4. Si rg $g \ = n$ alors dim Im $g = n = \dim F$ donc $F =$ Im g et g est surjective. De plus, d'après le théorème du rang, dim Ker $g = 0$ donc Ker $g = \{0_E\}$ et g est injective. Par suite, elle est bijective.

C.3 Documents du chapitre IV

Document C.3.1 Démonstration du théorème IV.2

On sait que :

$$det\ A \neq 0 \iff A\ inversible$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rrcl} (S) & \iff AX & = & B \\ & \iff A^{-1}AX & = & A^{-1}B \\ & \iff X & = & A^{-1}B \end{array}$$

Donc (S) a une unique solution si et seulement si det $A \neq 0$.

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est solution alors on peut écrire le système (S) sous forme vectorielle :

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n = B$$

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n) & = & \det\,(A_1, ..., A_{i-1}, x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n, A_{i+1}, ..., A_n) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} x_j \det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n) \\ & & \text{en utilisant la linéarité par rapport à la variable numéro } i \\ & = & x_i \det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, ..., A_n) \\ & & \text{puisqu'un déterminant est nul dès que deux colonnes sont égales} \\ & = & x_i \det A \end{array}$$

D'où

$$x_i = \frac{\det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)}{\det A}$$

C.4 Documents du chapitre V

Document C.4.1 Démonstration du théorème V.4

Nous avons déjà remarqué que

$$f(v) = \lambda v \Longleftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_E) \text{ non bijectif } \Longleftrightarrow \det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$$

donc

$$f(v) = \lambda v \Longleftrightarrow P_f(\lambda) = 0$$

Document C.4.2 Démonstration de la propriété V.5

- Si $\dim E = n$, alors P_f est une fonction polynôme de degré n qui a donc au maximum n racines, par suite, f a au plus n valeurs propres.
  - Une fonction polynôme scindée possède exactement n racines, distinctes ou non et la somme de leur multiplicité vaut n, le degré de P_f.
  - Le fait que la somme des valeurs propres soit égale à la trace de A et que le produit soit égal au déterminant vient des relations entre les coefficients d'une fonction polynôme et ses racines que nous n'avons pas étudié.

Document C.4.3 Démonstration du corollaire V.7

P_f possède $n = \dim E$ racines distinctes donc il est scindé dans $\mathbb{R}$. De plus, f n'admet que des valeurs propres simples et pour chacune d'elles, l'espace propre associé est de dimension 1, égale à la multiplicité. D'après le théorème V.6, f est diagonalisable.

Index des concepts

Index des notions