INSA Toulouse, cycle préparatoire

Mathématiques - Analyse

Intégration

Public visé : étudiants, professionnels en formation continue, cycle préparatoire de notre école d'ingénieur INSA.

Ressources de l'INSA Toulouse, département de mathématiques appliquées (GMM).
Présente version proposée par J. Monnier (jerome.monnier@insa-toulouse.fr).

Table des matières

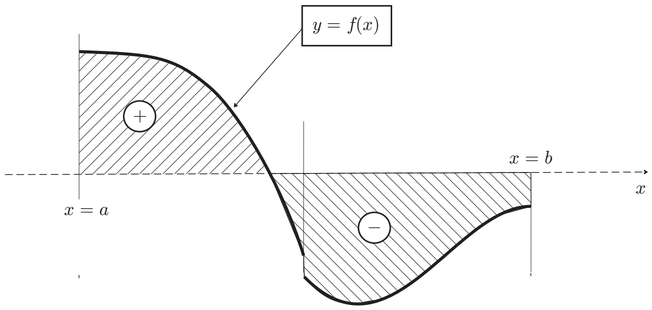
Chapitre 1

Intégrales simples

1. Généralités

Dans ce chapitre nous allonsètudier l' "objet" suivant : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, à savoir : "l'intégrale de la fonction $f(x)$ entre les bornes a et b".

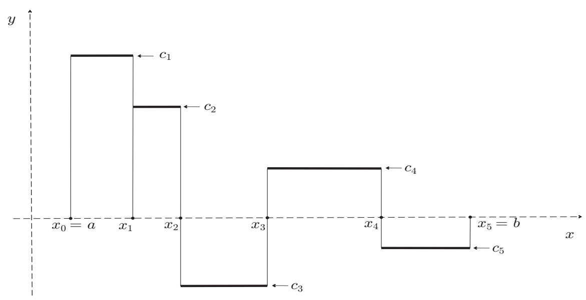
Cet objet revientàquantifier l'*aire algébrique* (i.e. signée) comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$, l'axe des x et les deux droites parallèles à l'axe des y ($x = a$ et $x = b$).



On ajoute l'aire marquée avec un $+$ et on retranche celle marquée avec un $-$.

Les **intégrales simples** concernent donc les intégrales des fonctions f qui sont définieS sur un segment $[a, b]$ (potentiellement à l'exception d'un nombre fini de points) et qui sont bornées sur $\mathcal{D}_f \cap [a, b]$.
On écrira $f \in \mathcal{B}\left([a, b]\right)$ pour désigner une fonction ayant ces propriétés.

2. Fonctions en escalier



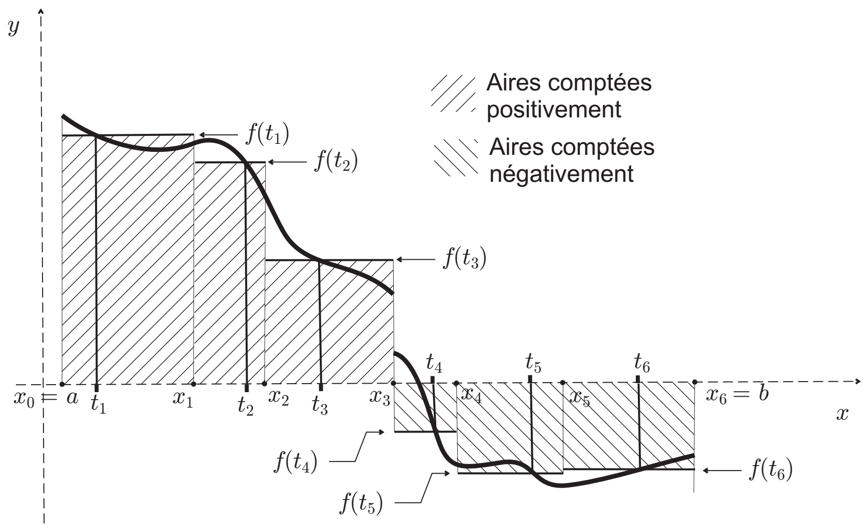
Par un passage à la limite adapté, nous en déduisons l'intégrale de fonctions plus générales.

Selon la description faite précédemment, l'intégrale d'une fonction en escalier f donnée comme ci-dessus vaut la quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i.$$

3. Définition de l'intégrale

3.1. Sommes de Riemann. Une approche naturelle pour définir l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{B}([a,b])$ est de l'approcher de façon de plus en plus précise en prenant des subdivisions p avec un pas de plus en plus petit par des fonctions en escalier qui sont égales à une valeur prise par f sur chaque intervalle de la subdivision.



A noter que c'est ainsi que l'on peut *approcher numériquement la valeur* d'une intégrale dont on ne connait pas la valeur exacte : il s'agit de la méthode numérique de base dite des rectangles.

On appelle **somme de Riemann** d'une fonction $f \in \mathcal{B}([a,b])$ associée à une subdivision $p_n = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ (cf Figure) la quantité définie comme suit :

$$R(f, p_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i).$$

Pour une fonction escalier qui vaut $f(t_i)$ sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision p_n, la somme de Riemann $R(f, p_n)$ est égale à la valeur de son intégrale.

Définition 1.1. *On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si les sommes de Riemann correspondantes $R(f, p_n)$ tendent vers une limite finie lorsque $n \to +\infty$. Cette limite (finie) est alors la valeur de son intégrale.*

Autrement formulé : f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si il existe un nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ tel que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$,

$$\forall p_n \in \mathcal{P}_{a,b},\ \delta(p_n) \leq \eta,\ \Longrightarrow\ \left| R(f, p_n) - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \varepsilon.$$

On note par $\mathcal{I}([a,b])$ le sous-ensemble des fonctions $f \in \mathcal{B}([a,b])$ qui sont intégrables sur $[a,b]$.

4. Propriétés fondamentales des fonctions intégrables

4.1. Relation de Chasles.

THÉORÈME 1.1. *Soit* $f \in \mathcal{B}([a,b])$ *et* $a < c < b$.
Alors $f \in \mathcal{I}([a,b])$ *si et seulement si* $f \in \mathcal{I}([a,c])$ *et* $f \in \mathcal{I}([c,b])$.
De plus, on a :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

4.2. Opérations sur les intégrales.

PROPOSITION 1.1. *L'opérateur* $\int .\ dx$ *est un opérateur linéaire. Autrement dit, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(1) Si f *et* g *sont dans* $\mathcal{I}([a,b])$, *alors* $f+g \in \mathcal{I}([a,b])$ *et*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

(2) Si $f \in \mathcal{I}([a,b])$ *et* λ *est une constante, alors* $\lambda f \in \mathcal{I}([a,b])$ *et*

$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx.$$

Attention : L'intégrale d'un produit de fonctions n'est pas égal au produit des intégrales !...

4.3. Inégalités sur les intégrales.

PROPOSITION 1.2. *On a la propriété suivante : Soit $f \in \mathcal{I}([a,b])$. Si $f \geq 0$, alors*

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0.$$

Par conséquent, pour f et g dans $\mathcal{I}([a,b])$, si $f \geq g$ alors :

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx.$$

PROPOSITION 1.3. *Si $f \in \mathcal{I}([a,b])$ alors $|f| \in \mathcal{I}([a,b])$ et on a l'inégalité dite triangulaire :*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

5. Primitives

Soient I un intervalle fermé borné et $f \in \mathcal{C}^0(I)$.

5.1. Primitive et intégrale.

La primitive d'une fonction f est une fonction F telle que si on la dérive on obtient f :

$$F'(x) = f(x)$$

L'intégrale d'une fonction f s'exprime à l'aide d'une de ses primitives F :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Une fonction continue f sur un intervalle fermé borné admet toujours une primitive. En effet on a le

Théorème 1.2. *Pour tout $a \in I$, la fonction G définie par*

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et vérifie :

$$G'(x) = f(x),\ \forall x \in I$$

Autrement dit, G est une primitive de f sur I.

Notez que la variable d'integration est un variable muette.

5.2. Primitives usuelles. Les primitives des fonctions usuelles ci-dessous doivent être connues. (k désigne une constante quelconque dans $\mathbb{R}$).

$\displaystyle\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$ si $m \neq -1$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\|x\| + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int \ln x dx = x\ln(x) - x + k$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + k$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + k$
$\int \mathrm{ch}(x)dx = \mathrm{sh}(x)dx + k$	$\int \mathrm{sh}(x)dx = \mathrm{ch}(x)dx + k$
$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \mathrm{Arctan} x + k$	

Celles ci-dessous sont également très classiques.

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int (1+\tan^2(x))dx = \tan(x) + k \qquad \int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\frac{1}{\tan(x)} + k$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}dx = \mathrm{t}h(x) + k \qquad \int \frac{1}{\mathrm{s}h^2(x)}dx = -\frac{1}{\mathrm{t}h(x)} + k$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Argsh} x + k \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Argch} x + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin} x + k \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arccos} x + k$$

5.3. Intégration par parties.

THÉORÈME 1.3. *Soient u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. On a :*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = -\int_a^b u'(x)v(x)\ dx + [uv]_a^b$$

Avec $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. $[uv]_a^b$ désigne l'accroissement de la fonction uv entre a et b.

EXERCICE 1.1. *En effectuant une intégration par parties astucieuse, calculer :* $\displaystyle\int_a^b \ln x\ dx$.

5.4. Changement de variable.

THÉORÈME 1.4. *Soit $f \in \mathcal{I}([c,d])$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone (ie strictement croissante ou décroissante) sur $[a,b]$. On a alors :*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\ dy$$

Notons que l'on a : $y = \varphi(x)$ d'ou $y'(x) \equiv \dfrac{dy}{dx}(x) = \varphi'(x)$, soit : $dy = \varphi'(x)dx$.

EXERCICE 1.2. *Calculer l'intégrale suivante en effectuant un changement de variable :* $\displaystyle\int_a^b \exp(2x)\ dx$

5.5. Parité, périodicité. On a le

COROLLAIRE 1.1. *Soit f intégrable sur l'intervalle centré $[-a, a]$ (i.e. $f \in \mathcal{I}([-a, a])$). On a :*

- *Si f est une fonction paire, alors :*

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 2\int_{0}^{+a} f(x)dx$$

- *Si f est une fonction impaire, alors :*

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 0$$

EXERCICE 1.3. *Montrer ce résultat.*

COROLLAIRE 1.2. *Soit f intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et f T-périodique. Alors pour tout (a, b) réels, on a :*

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

EXERCICE 1.4. *Montrer ce résultat.*

EXERCICE 1.5. *Calculer les intégrales simples suivantes :*

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan^2 x dx$

b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$

Chapitre 2

Primitives de fonctions rationnelles

La section précédente fournit les primitives de quelques fonctions usuelles. On y retrouve des fonctions rationnelles (également appelées fractions rationnelles). On va chercher à se ramener à ces situations connues par changement de variable ou intégration par parties.

La première étape consiste à décomposer la fraction rationnelle en *éléments simples*, c'est à dire sous la forme :

$$\boxed{F = E + \frac{P}{Q} \text{ avec } P \text{ et } Q \text{ facteurs irréductibles.}}$$

On n'a alors plus que des polynômes ou des termes de la forme :

$$\frac{1}{(x-a)^n} \quad \text{et} \quad \frac{a\,x+b}{(x^2+p\,x+q)^n}$$

avec $p^2 - 4\,q < 0$.

1. Primitives des termes de la forme $\frac{1}{(x-a)^n}$

Il suffit de poser $u = (x-a)$. On vérifie que :

- si $n = 1$, la primitive est de la forme : $\ln|x-a| + k$,
- sinon , elle est de la forme : $\dfrac{1}{(1-n)\,(x-a)^{n-1}} + k$.

Exercice 2.1. *Soit :* $F(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)\ (x+3)^3}$. *Montrer que l'on a :*

$$\int F(x)dx = \frac{3}{64}\ln(\frac{x-1}{x+3}) + \frac{3}{16\,(x+3)} - \frac{1}{8\,(x+3)^2}$$

Solution : On montre que :

$$F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+3)} + \frac{c}{(x+3)^2} + \frac{d}{(x+3)^3}$$

avec $a = 3/4^3$, $b =$ *etc ; puis on intégre...*

2. Primitives des termes de la forme $\dfrac{a\,x+b}{(x^2+p\,x+q)^n}$

Nous sommes dans le cas où : $(p^2 - 4\,q) < 0$. On commence alors par écrire le trinôme figurant au dénominateur sous la forme suivante :

$$x^2 + p\,x + q = (x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}. \tag{2.1}$$

C'est à dire sous la forme d'un *carré parfait + le terme correctif requis.*

Ensuite en posant $t = \sqrt{\dfrac{4}{4q-p^2}}\,(x + \dfrac{p}{2})$, on obtient :

$$x^2 + p\,x + q = \frac{(4q - p^2)}{4}\,(t^2+1) \equiv cste \cdot (t^2+1) \tag{2.2}$$

On **a cherché ici à faire ressortir le terme** $(t^2 + 1)$.

EXERCICE 2.2. *Ecrire l'expression* $(x^2 + x + 3)$ *sous la forme* $\alpha(t^2 + 1)$. *Vous précisez les expressions de* α *et* t.

EXEMPLE 2.1. *Soit :*

$$F_5 = \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+x+1)} + \frac{dx+e}{(x^2+x+1)^2}$$

avec $a = 1$, $b = c = -1$, $d = 0$, $e = -1$.
Ainsi pour la fonction F_5, *on écrit :* $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left((\frac{2}{\sqrt{3}}\,(x+\frac{1}{2}))^2 + 1\right)$.
On posera ici $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\,(x+\frac{1}{2})$. *Cela équivaut à* $x = \frac{t\sqrt{3}-1}{2}$ *et entraine* $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$.
On obtient :

$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}(t^2+1)$$

Au-delà, on aura :

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{\sqrt{3}\,(t^2+1)}dt,$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{8\sqrt{3}}{9}\,\frac{1}{(t^2+1)^2}dt.$

On est donc ramené au calcul de primitives de termes de la forme :
$\dfrac{t}{(t^2+1)^n}$ ou $\dfrac{1}{(t^2+1)^n}$.

(1) si $n=1$, une primitive de $\dfrac{t}{(t^2+1)}$ est : $\dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)+k$.

(2) si $n>1$, une primitive de $\dfrac{t}{(t^2+1)^n}$ est : $\dfrac{1}{2\,(1-n)\,(t^2+1)^{n-1}}+k$.

(3) si $n=1$, une primitive de $\dfrac{1}{(t^2+1)}$ est : arctan $(t)+k$.

(4) si $n>1$, une intégration par partie permet de ramener le calcul d'une primitive de $\dfrac{1}{(t^2+1)^n}$ à celle de $\dfrac{1}{(t^2+1)^{n-1}}$.
De proche en proche, on peut calculer toutes ces primitives à partir du cas $n=1$...

** Pour aller plus loin **.

Calculons la primitive de $\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$ *(cas 4) avec* $n=2$*).*

Pour commencer on décompose le terme comme suit (astuce) :

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt + \int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Le premier terme du second membre est seulement

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)}\,dt.$$

Le second terme se traite comme suit

$$\int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \int u(t)v'(t)\,dt$$

avec $u(t)=t/2$ *et* $v'(t)=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}$*. Comme* $v(t)=\frac{1}{(t^2+1)}$*, une intégration par partie donne*

$$\int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+1)}\,dt.$$

On a alors

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2\,(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + k.$$

On peut alors calculer :

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right) + k,$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right) + k.$

Finalement on obtient une primitive de F_5 *:*

$$\int F_5(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)} - \frac{7\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Tous les cas pour lesquels on dispose d'une méthode générale pour calculer une primitive consistent à se ramener par une intégration par partie ou un changement de variable à la primitive d'une fraction rationnelle.

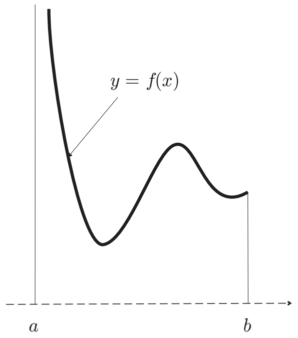
Ceci reste possible pour les fractions en sin *et* cos *et les fractions en* sh *et* ch.

$**$

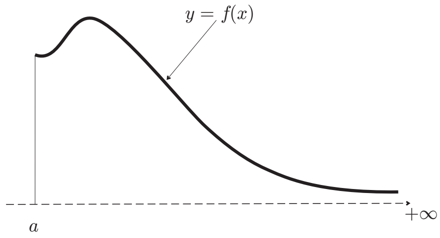
Chapitre 3

Intégrales généralisées

Nous allons maintenant étendre la notion d'intégrale lorsque *l'intervalle d'intégration est non borné* ou lorsque la *fonction n'est pas bornée*, cf figure.



Fonction non bornée en a



Intervalle d'intégration non borné

1. Définitions et propriétés immédiates

1.1. Intégrales en dehors du cadre des intégrales simples. On veut définir l'intégrale d'une fonction f, définie sauf au plus en un nombre fini de points d'un intervalle I, dans les cas suivants :

1) **l'intervalle d'intégration I est non borné** : $]-\infty, +\infty[$ ou une demi-droite,
2) la fonction f **ne reste pas bornée** lorsque $x \to a$, $a \in I$. a peut être à l'intérieur de I ou être une extrémité de I.

> Grâce à la relation de Chasles, on peut se ramener à l'une des deux situations suivantes :
>
> 1) l'intervalle I est de la forme $[a, +\infty[$ (ou $I =]-\infty, a]$) lorsque l'intervalle d'intégration est non borné ;
> 2) $I =]a, b]$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \to a$. (Ou encore : $I = [a, b[$ et $f(x)$ ne reste pas bornée lorsque $x \to b$).

1.2. Définition des intégrales généralisées.

Nous commençons par le cas où on veut intégrer une fonction f sur l'intervalle $]a,b]$, qui n'est pas bornée lorsque $x \to a$.

Cas 1 : f non bornée lorsque $x \to a$.
On pourra le faire si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) la fonction f est intégrable sur $[x,b]$ pour tout x, $a < x < b$ (i.e. il s'agit d'une intégrale simple $\forall x$) ;

(2) la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^b f(t)\ dt$$

admet une **limite finie** ℓ lorsque $x \to a$. (On a $x \in]a,b]$).

On dit alors que **l'intégrale est convergente**. La limite ℓ est la valeur de cette intégrale :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\ dt}$$

L'intégrale est dite divergente si $\int_x^b f(t)\ dt$ ne tend pas vers une limite finie lorsque $x \to a$.

Exemple 3.1.
a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ *diverge. (Notez le problème en* 0*).*
b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ *converge. (Notez qu'il s'agit bien d'une intégrale généralisée).*
c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}dt$ *est une intégrale simple et non pas généralisée. (Et nous savons en calculer sa valeur).*

Cas 2 : Intégrale de f sur un intervalle non borné $[a, +\infty[$

Examinons maintenant le cas où on veut intégrer une fonction f sur l'intervalle non borné $[a, +\infty[$.

Là aussi, on pourra le faire si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) la fonction f est **intégrable** sur $[a, x]$ pour tout $x > a$;

(2) la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

admet une **limite finie** ℓ lorsque $x \to +\infty$.

De la même façon que pour le premier cas, on dit alors que **l'intégrale est convergente**. La limite ℓ est la valeur de l'intégrale de f entre a et $+\infty$:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\ dt.}$$

On dit qu'elle est divergente si $\int_a^x f(t)\ dt$ ne tend pas vers une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

REMARQUE 3.1. *Par commodité, on utilise souvent la notation*

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad ou \quad \int_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

pour désigner une intégrale généralisée que l'on veut étudier (voire calculer ! ?) même si on ne sait a-priori pas si elle est convergente ou non.

EXEMPLE 3.2.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *converge.*

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ *diverge.*

Condition nécessaire de convergence. Nous avons la proposition suivante qui donne une **condition nécessaire de convergence** de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ lorsque la fonction f tend vers une limite ℓ lorsque $x \to +\infty$.

PROPOSITION 3.1. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$, *alors*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ est divergente.}$$

REMARQUE 3.2. *Cela est bien une condition nécessaire et* **non suffisante**.

Exemple : l'intégrale de Riemann suivante diverge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2[\sqrt{t}]_1^{+\infty} \to +\infty$$

Une erreur à ne pas commettre : affirmer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, *alors l'intégrale est convergente.*

Sans plus d'information, l'intégrale peut bien être convergente ou divergente...

2. Les intégrales (généralisées) de Riemann

Les intégrales généralisées présentées dans ce paragraphe sont bien plus que des exemples : elles **constituent des intégrales de référence** qui permettent d'étudier la convergence d'un grand nombre d'intégrales généralisées à l'aide de critères qui seront prsentés dans la suite. Elles sont appelées intégrales de Riemann.

On a le **résultat fondamental** suivant.

PROPOSITION 3.2.

(1) Pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ est convergente si } \alpha < 1 \text{ et divergente si } \alpha \geq 1.$$

(NB. Le cas limite $\alpha = 1$ correspond au ln, qui diverge en 0).

(2) Pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ convergente si } \alpha > 1 \text{ et divergente si } \alpha \leq 1.$$

(NB. Le cas limite $\alpha = 1$ correspond au ln, qui diverge en $+\infty$).

DÉMONSTRATION. ** Pour aller plus loin ** La démonstration est immédiate ; on calcule l'intégrale et on passeàla limite. Pour tout $0 < x < a$ (resp. $x > a$), la fonction $t \to 1/t^\alpha$ est continue sur $[x, a]$ (resp. $[a, x]$). Elle est donc intégrable et le calcul de son intégrale se ramène à la détermination d'une de ses primitives :

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1/t^{\alpha-1}), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln t, & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On a alors

$$\int_x^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(a^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(a/x), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\lim_{x \to 0} \int_x^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha \geq 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}a^{1-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Le cas de la seconde intégrale généralisée s'obtient de la même façon à partir de la primitive $t \to F(t)$ ci-dessus. $\square$

3. Intégrales de fonctions positives

Le théorème suivant donne des critères permettant d'assurer que **l'intégrale généralisée d'une fonction positive** converge ou diverge. A noter que si la fonction est de signe constant mais négative, il suffit de considérer $(-f)$ pour entrer le cadre présent.

Pour commencer on a le théorème suivant (* Pour aller plus loin *) :

THÉORÈME 3.1. *Soit* $f \geq 0$ *sur* $\mathcal{D}_f \cap [a, +\infty[$ *(resp. sur* $\mathcal{D}_f \cap]a, b]$*).*
L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *(resp.* $\int_a^b f(x)\ dx$*) est convergente si et seulement si il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \leq M,\ \forall x \in [a, +\infty]$
(resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\ dt \leq M,\ \forall x \in]a, b]$ *).*

De ce théorème découle les résultats suivants (comparaison de fonctions positives).

COROLLAIRE 3.1. *Soient* f **et** g **deux fonctions positives** *vérifiant :*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap [a, +\infty[\,,\ (resp. \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap]a, b])$$

- *Si* $\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ *est convergente (resp.* $\int_a^b g(x)\ dx$ *est convergente),*
  alors $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *est convergente (resp.* $\int_a^b f(x)\ dx$ *est convergente).*

- *Si* $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *est divergente (resp.* $\int_a^b f(x)\ dx$ *est divergente),*
  alors $\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ *est divergente (resp.* $\int_a^b g(x)\ dx$ *est divergente).*

COROLLAIRE 3.2. *Soient* f **et** g **deux fonctions positives** *pour tout* $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap [a, +\infty[$, *(resp.* $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap]a, b]$*).*

- Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ *alors*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ et } \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ sont de même nature}$$

i.e. sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

- Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *alors :*

$$\int_a^{b} f(x)\, dx \text{ et} \int_a^{b} g(x)\, dx \text{ sont de même nature.}$$

EXERCICE 3.1. *Déterminer la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x\sqrt{x}} dx$$

4. Convergence absolue

L'importance des critères de convergence sur les intégrales de fonctions positives vient en grande partie du critère suivant.

THÉORÈME 3.2. *Si l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$ *(resp.* $\int_a^b |f(x)|\ dx$*) est convergente, alors* $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *(resp.* $\int_a^b f(x)\ dx$*) est convergente. On dit alors que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *(resp.* $\int_a^b f(x)\ dx$*) est* ***absolument convergente****.*
Autrement formulé,

$$\boxed{\textit{absolument convergente} \Longrightarrow \textit{convergente}}$$

Attention : la réciproque est fausse.
En effet, une intégrale généralisée peut être convergente sans être absolument convergente.
Par exemple, on peut montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ alors que } \int_0^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}| dx = +\infty$$

Le théorème de comparaison pour fonctions positives est l'outil fondamental pour étudier la convergence absolue. Aussi, si f n'est pas de signe constant, il est toujours intéressant de commencer par étudier la convergence absolue...