TD - Séries de Fourier.

Exo 1 a)

- $\displaystyle\int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0$ pour $k = 1, 2, 3 \ldots$?

La fct sinus est impaire et l'intervalle d'intégrat° centré en 0 / d'où le résultat.

- $\displaystyle\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 2\int_{0}^{+L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$ car la fct cos. est paire.

$$= \frac{2L}{k\pi}\left[\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]_0^{+L} = \frac{2L}{k\pi}\left(\sin(k\pi) - \sin(0)\right)$$

$$= 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

b) $\displaystyle\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

$\displaystyle= 2\int_{0}^{+L} \cos(-)\cos(-)\, dx$ car la fct. $[\cos(-)\cos(-)]$ est paire

$$= \int_0^L \cos\left((m-n)\frac{\pi}{L}x\right) dx + \int_0^L \cos\left((m+n)\frac{\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \frac{L}{\pi(m-n)}\left[\sin\left((m-n)\frac{\pi}{L}x\right)\right]_0^L + \frac{L}{\pi(m+n)}\left[\sin\left((m+n)\frac{\pi}{L}x\right)\right]_0^L$$

pour $m \neq n$

$= 0$ pour $m \neq n$

Pour $m = n$,

$$\int_{-L}^{+L} \cos(-)\cos(-)\,dx$$

$$= \int_0^L \cos(0)\,dx - \int_0^L \cos\left(2n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$= L - \frac{L}{2n\pi}\underbrace{\cancel{\left[\sin\left(2n\frac{\pi}{L}x\right)\right]_0^L}}_{=0}$$

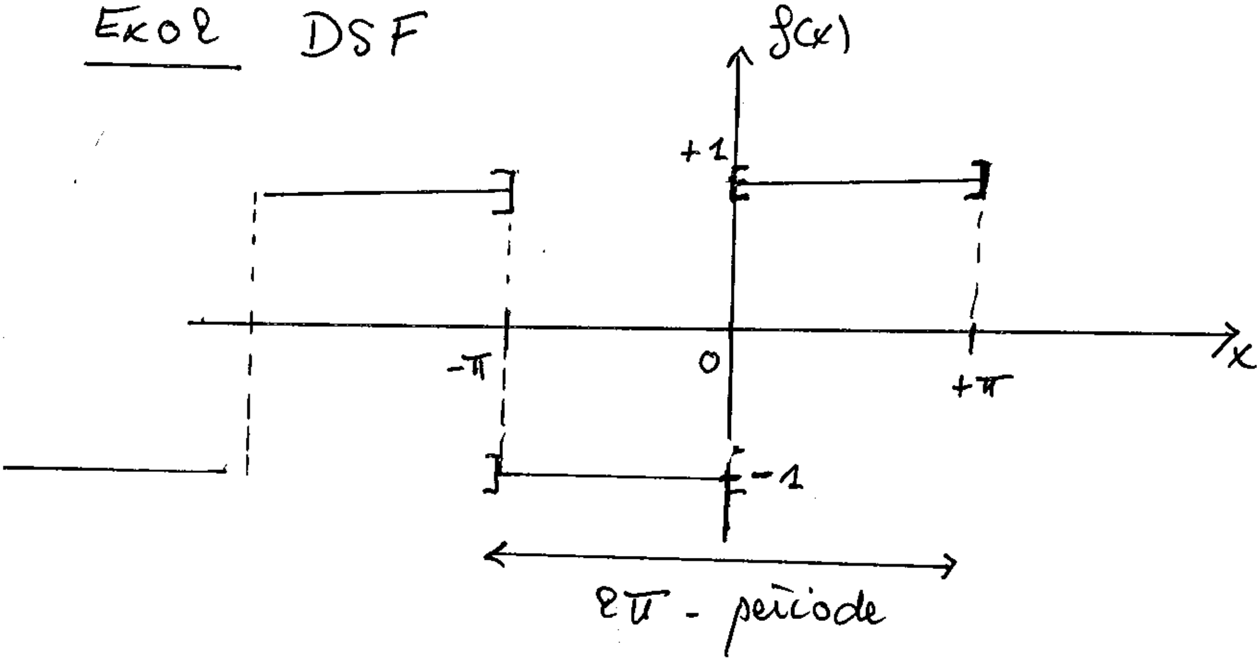
$$= L.$$

De m̂ pour : $\int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

$$= 2\int_0^{+L} \sin(-)\sin(-)\,dx = \dots$$

. Bcp plus simple ! On remarque que l'intégrande $\sin(-)\sin(-)$ est impaire et l'intervalle d'intégrat° centré en 0, d'où le résultat.

Exo 2 DSF



la fct f(x) ainsi construite est 2π-périodique, et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle est dévellopable en série de Fourier en vertu du théorème du cours (Cdts de Dirichlet).

Ecrivons son D.S.F. forme réelle.

$f(x)$ est impaire $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 0$.

Calculons les coefs b_n, $n \geq 1$.

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\omega n x)\, dx + \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} (-1) \sin(\omega n x)\, dx$$

$\underline{\omega = 1}$

$$= \frac{-1}{n\pi} \left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]_{-\pi}^{0}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases} \quad n \geq 1$$

On pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1} \sin((2p+1)x)$$

Cette série est convergente (Th. de Dirichlet) et l'on a :

$f(x) = S(x)$ aux pts x où f est cont.

$S(x) = \frac{1}{2}\left[f^+(x) + f^-(x)\right]$ aux pts de discontinuité.

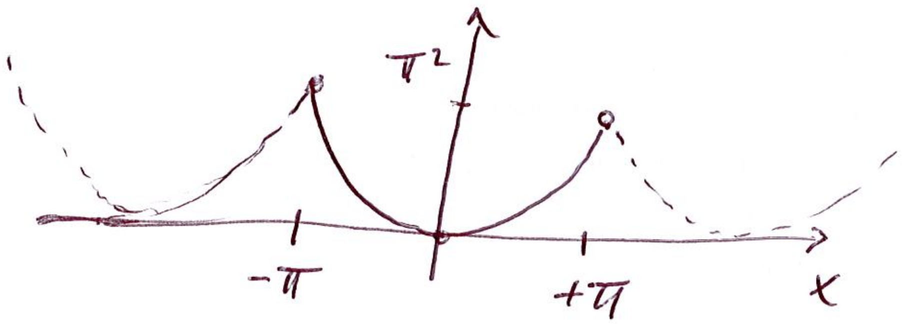
En $x=0$, on a alors :

$$S(0) = \frac{1}{2}\left(f^+(0) + f^-(0)\right) = \frac{1}{2}\left(1+(-1)\right) = 0 .$$

TD Séries Fourier, Exo 3

$f(x)$, 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

f satisfait les cdts de Dirichlet (th. du cours), elle est donc développable en S.F. (avec CV ponctuelle de la série car $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$)



$f(x)$ est paire
$f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier

- f est paire $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$.
- $a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2\,dx = \underline{\frac{2}{3}\pi^2}$
- Pour $\underline{n \geq 1}$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(\omega n x)\,dx$

car la fct $[f(x)\cos(-x)]$ est paire

On pose : $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos(\omega n x)\,dx$

$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot I$

Calcul de I.

$$0$$

I.P.P. : $I = \frac{1}{\omega n}\cancel{\left[x^2 \sin(\omega n x)\right]_0^{\pi}}$

$$- \frac{2}{\omega n}\int_0^{\pi} x \sin(\omega n x)\, dx \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$\Rightarrow I = -\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

I.P.P. à nouveau :

$$I = \frac{2}{n^2}\left[x \cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{+2}{n^2}\pi(-1)^n - \frac{2}{n^3}\underbrace{\cancel{\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi}}}_{=0}$$

$$\Rightarrow I = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}$$

Et donc, pour $n = 0$, $a_n = a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$

pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot 4$

Soit : $S(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(nx)$

Et $S(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ($\text{car } f$ continue sur $\mathbb{R}$).

2.

L'égalité de Parseval nous donne :

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\, dx}_{A} = \underbrace{\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2} a_n^2}_{B}$$

Soit : $A = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{+\pi} f(x)^2\, dx$ car f^2 paire

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\, dx = \frac{1}{5\pi}\pi^5 = \frac{\pi^4}{5}.$$

$$B = \frac{1}{\cancel{4}}\,\frac{\cancel{4}}{9}\pi^4 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2}\,\frac{16}{n^4} = \frac{1}{9}\pi^4 + \sum_{n\geq 1}\frac{8}{n^4}$$

Et donc :

$$\pi^4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{8}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{8}\pi^4 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}\pi^4}$$

Par ailleurs, le D.S.F de f donne pour $x = \pi$:

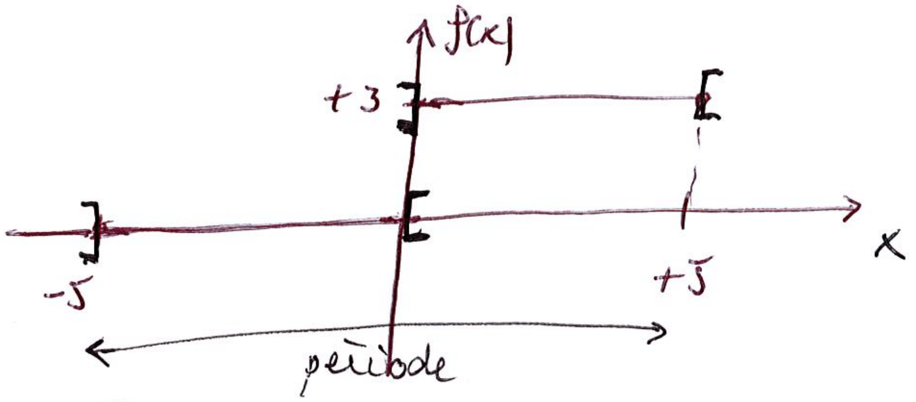
$$f(\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{4}{n^2} (-1)^n$$
$$= \pi^2$$

D'où,

$$4 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2 \implies \boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2}$$

TD ~~Série~~ Fourier . Exo 4

1. $f(x)$ T-périodique avec $T = 10$



f n'est ni paire ni impaire.

Elle est C^1 par morceaux. Elle est donc développable en S.F.

On a :

- $a_0 = \frac{2}{10} \int_{-5}^{+5} f(x)\, dx = \frac{1}{5} \int_0^{+5} 3\, dx = 3$

- Pour $n \geq 1$,

- $b_n = \frac{1}{5} \int_0^{+5} 3 . \sin(\omega n x)\, dx$; $\omega = \frac{\pi}{5}$

$= \frac{-3}{5\omega n} \Big[\cos(\omega n x) \Big]_0^5 = \frac{3}{n\pi} \left[(-1)^{n+1} + 1 \right]$ (*)

- $a_n = \frac{3}{5} \int_0^{+5} \cos\left(\frac{\pi}{5} n x\right) dx = \dots = 0$

2. La série de Fourier correspondante est donc :

$$S(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{3}{n\pi} \left((-1)^{n+1} + 1 \right) \sin\left(n \frac{\pi}{5} x \right)$$

3. Les pts $x = \{-5 ; 0 ; +5\}$ sont des pts où $f(x)$ est non définie.

Par ailleurs, autour de ces pts la fct présente un saut.

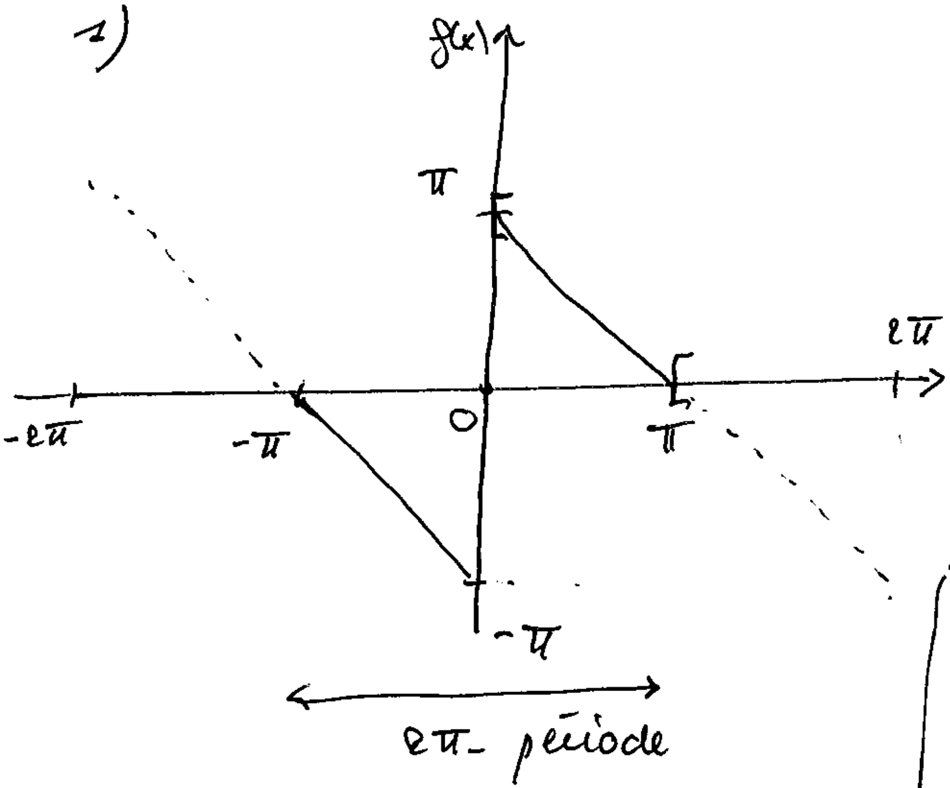
Pour que : $S(x) = f(x) \quad \forall x \in [-5, +5]$

il faut définir f aux pts $\{-5 ; 0 ; +5\}$

ainsi : $f(-5) = f(0) = f(+5) = \frac{3}{2}$.

Exo 5 Calcul d'une S. F. et valeur d'une Somme

1)



f impaire.

2π - périodique.

On a :

$f(x) = (\pi - x)$ pour $x \in [0, 2\pi[$

⚠ Pour $x \notin [0, 2\pi[$, $f(x) \neq (\pi - x)$ ... mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + k2\pi) = f(x)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

f est impaire $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$.

f vérifie les cdts du th. de Dirichlet, elle est dc développable en série de Fourier.

- Pour $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin(\omega n x)\, dx \quad , \quad \omega = 1.$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(nx)\, dx}_{= 0} - \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} x \sin(nx)\, dx}_{= I}$$

$$= -\frac{1}{\pi} . I$$

On calcule :

$$I = \int_0^{2\pi} \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin(nx)}_{u'}\, dx$$

$$\underset{I.P.P.}{=} \frac{-1}{n}\Big[\cos(nx)\, x\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{n}\, 2\pi$$

D'où : $\boxed{\forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{2}{n}}$

On a donc :

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \sin(nx) = 2\sin(x) + \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) + \dots}$$

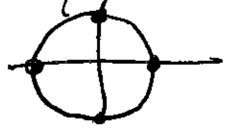
2) $S(x)$ converge (d'après le th. de Dirichlet), et $S(x) = f(x)$ aux pts x où f est continue.

Donc : $\underline{S(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}}$

3) Prenons $x = \frac{\pi}{2}$ ds l'expresn° de $S(x)$,

Sachant que : $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ si n impair

$= 0$ si n pair



On a :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2k} \underbrace{\cancel{\sin(2kx)}}_{=0} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)} \sin((2k+1)x)$$

Et : $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$

D'où :

$$\frac{\pi}{2} = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)} \underbrace{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{(-1)^k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}}$$