INSA Toulouse, Cycle préparatoire

TD Transformée de Laplace

Exercice 1. Transformées de fonctions par Laplace
Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes, et préciser leur ensemble de définition :

1- $f(t) = \sin(\omega\, t)H(t)$.

2- $f(t) = e^{-\lambda t}\sin(\omega\, t)H(t)$.

où $H(t)$ désigne la fonction de Heaviside.

Indice : On s'appuiera sur la transformée de l'exponentielle complexe.

Corrigé

1. En cours nous avons vu le cas $cos(\omega t)$. Le calcul pour $sin(\omega t)$ est similaire. On écrit :

$$sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

Par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}$, on a :

$$\mathcal{L}(sin(\omega t))(p) = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}(e^{i\omega t})(p) - \mathcal{L}(e^{-i\omega t})(p))$$

Or nous avons calculé la transformée de l'exponentielle complexe : $\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{p-i\omega}$.
Ce qui donne après simplification des calculs :

$$\mathcal{L}(sin(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

2. On écrit :

$$e^{-\lambda t}sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{(-\lambda+i\omega)t} - e^{(-\lambda-i\omega)t})$$

Par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}$, et connaissant la transformée de l'exponentielle complexe on obtient :

$$\mathcal{L}(e^{-\lambda t}sin(\omega t))(p) = \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{(p^2 + 2\lambda p + \rho^2)}$$

avec $\rho^2 = \lambda^2 + \omega^2$.

Exercice 2. Transformées inverses

Donner l'expression de la fonction originale pour chacune des fonctions suivantes :

1- $F(p) = \dfrac{c}{p},\ c \in \mathbb{R}.$

2- $F(p) = \dfrac{c}{p^m} + \dfrac{d}{p^n},\ (c, d) \in \mathbb{R}^2.$

3- $F(p) = \dfrac{1}{(p-a)},\ a \in \mathbb{R}, a \neq p.$

4- $F(p) = \dfrac{1}{(p-a)^n},\ a \in \mathbb{R}, a \neq p.$

5- $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+a^2)},\ a \in \mathbb{R}.$

6- $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+a^2)},\ a \in \mathbb{R}.$

Corrigé

cf Tables fournies.

Exercice 3. Propriétés de base de la transformée de Laplace

Montrer les propriétés suivantes.

1. Théorème du déplacement.
Si $F(p) \equiv \mathcal{L}(f(\lambda t))(p)$ est l'image de $f(t)$, alors $F(p+q)$ est l'image de $e^{-qt}f(t)$.

2. Translation. Pour $a > 0$,

$$\mathcal{L}(f(t-a))(p) = e^{-pa}\mathcal{L}(f(t))(p)$$

3. Changement d'échelle. Pour $\lambda > 0$,

$$\mathcal{L}(f(\lambda t))(p) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}(f(t))(\frac{1}{\lambda}p)$$

Corrigé

Calculs élémentaires à partir de la définition de la transformée de Laplace.

Exercice 4. Transformées de signaux de base

Représenter graphiquement puis calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes (fonctions classiques en électricitéé) :

1- Dirac décalé δ_a.

2- Echelon unité décalé de a, $f(x) = H(x-a)$.
Soit $f(x) = 0$ pour $x < a$; $f(x) = 1$ pour $x > a$.

3- $f(x) = 1$ pour $0 < x < a$; $f(x) = 0$ pour $x > a$.

4- Dent de scie périodique.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(x - na)$$

où $\varphi(x) = x$ pour $0 < x < a$; $\varphi(x) = 0$ pour $x > a$.

Exercice 5. Transformées inverses

Calculer les fonctions originales des fonctions suivantes.

1. $F(p) = \frac{6}{2p-3} - \frac{3+4p}{9p^2-16} + \frac{8-6p}{16p^2+9}$

2. $F(p) = \frac{6p-4}{p^2-4p+20}$

Exercice 6. Résolution d'Equations Différentielles Ordinaires (EDO) linéaires

En utilisant la transformation de Laplace, calculer la solution $y(t)$ de chacune des EDO linéaires suivantes.

1-

$$\begin{aligned} y^{(3)}(t) - 3y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) - y(t) = t^2 \exp(t) \quad t \geq 0 \\ y(0) = 0;\ y^{(1)}(0) = 0;\ y^{(2)}(0) = -2 \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = \exp(-t) \quad t \geq 0 \\ y(0) = 0;\ y^{(1)}(0) = 1 \end{aligned}$$

Exercice 7. Résolution d'Equations Différentielles Ordinaires (EDO) linéaires

En utilisant la transformation de Laplace, calculer la solution $y(t)$ de l'EDO d'ordre 2 suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 2\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = f(t) \quad t \geq 0$$
$$y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

avec f fonction donnée, continue, bornée sur $[0, +\infty[$. De plus, on suppose que f vérifie les conditions suffisantes d'existence de sa transformée de Laplace.

Corrigé

Notons $F = \mathcal{L}(f)$ la transformée de Laplace de f. Par hypothèse, f vérifie les conditions suffisantes d'existence de sa transformée de Laplace (cf théorème du cours) ; ainsi F est bien définie. On note : $U = \mathcal{L}(y)$.
Les conditions $y(0) = y'(0) = 0$ entrainent que :

$$\mathcal{L}(y')(p) = pU \text{ et } \mathcal{L}(y'')(p) = p^2U$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle vérifiée par y, en s'appuyant sur la propriété de linéarité de l'opérateur, on obtient :

$$(p^2 + 2p + 1)\,U(p) = F(p)$$

soit :

$$U(p) = \frac{F(p)}{(p+1)^2} \text{ pour } p \neq -1$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$y(t) = f(t) \star \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(p+1)^2})$$

Il reste à calculer la fonction originale de l'élément simple $\frac{1}{(p+1)^2}$.
Pour cela, on utilise la table fournie. Or on a :

$$\mathcal{L}^{-1}(t)(p) = \frac{1}{p^2} \text{ pour } p \neq 0$$

Et (théorème du déplacement), pour $F(p)$ image de $f(t)$, on a :

$$F(p+1) = \mathcal{L}^{-1}(e^{-t}f(t))(p)$$

D'où :

$$\frac{1}{(p+1)^2} = \mathcal{L}^{-1}(t\ e^{-t})(p) \text{ pour } p \neq -1$$

Ainsi, la solution de l'EDO est :

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)\,(t-\tau)\,e^{\tau-t}\,d\tau \qquad \text{pour } t \geq 0$$

Probléme (relativement difficile) : Intégration et transformée de Laplace.

I) On cherche à calculer l'intégrale $I(\lambda)$ définie par :

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t-(1/t)}\, t^{-3/2}\, dt.$$

1- Montrer que $I(\lambda)$ est bien définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2- Montrer que $I(0) = \sqrt{\pi}$.
On rappelle que :

$$\int_0^{+\infty} exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3- Montrer que $I(\lambda)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$I'(\lambda) + 2I(\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda \in]0, +\infty[$$

4- En déduire $I(\lambda)$.

(*Indication : résoudre l'équation différentielle linéaire du 1er ordre par la méthode "classique" -cf rappels dans le polycopié du cours-).*

II)

1- On considére la fonction $f(x) = x^{-3/2}\, e^{-1/x}$.
a) Montrer que sa transformée de Laplace $F(p)$ est bien définie pour $p \in [0, +\infty[$.
b) Calculer $F(p)$.

2- On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x y^{-3/2}\, e^{-1/y}\, dy.$$

Calculer sa transformée de Laplace notée $G(p)$.