INSA Toulouse, cycle préparatoire

Analyse 1 : feuille de TD #1

Equivalences de fonctions, limites

Exercice 1 Etude de fonction

Etudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = ch(\frac{1}{x})$.
Cet exercice ne s'appuie pas directement sur les notions introduites dans le présent enseignement mais demeure une bonne remise en route...

Exercice 2 Fonctions équivalentes

I) Donner un équivalent en 0 de :
a) $\ln(1+x)$
b) $\tan(x)$
c) $1-\cos(x)$
d) $ch(x)-1$.
e) $(1-x)^\alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$
f) $\sqrt{x} + \ln(x)$.
Astuce : on écrira la fonction sous la forme : $\ln(x)(\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} + 1)$.

g) $f(x) = \sqrt{1 - cos(x)}$.
Correction : cf polycopié de cours

III) Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de :
a) $x - \sin(x)$
b) $x\exp(x)$.
Indice : potentiellement pas simplifiable ?

Exercice 3 Calcul de limites
Calculer les limites suivantes :

a) $f(x) = (\pi - 2x)\tan x$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^m - 1}$ avec $m \neq 0$.
Indice : L'astuce classique d'écriture de $(x^m - 1)$ *permet de conclure rapidement.*

c) $f(x) = x\ln(1 + \dfrac{x}{3+x^2})$ en $+\infty$.

Exercice 4 Calcul de limites
Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes.

a)
$$\lim_{x\to\pi/2} (\sin x)^{1/(2x-\pi)}$$

Indice : a une certaine étape du calcul, on utilisera la formule trigonométrique : $sin(x) = cos(\pi/2 - x)$.

b)
$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\ln|x|}$$

c)
$$\lim_{x\to 1} [\frac{2}{(1-x^2)} - \frac{3}{(1-x^3)}]$$

d)
$$\lim_{x\to+\infty} (\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)})^x$$

e)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$$

Exercice 5 Calcul de limites
Calculer les limites suivantes :
a) $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{tan(x)(1-sin(x))}{sin(2x)}$.
Indice : le changement de variable habituel puis le cercle trigonométrique et on s'en sort.

Correction dans le polyécopié de cours.

b) $f(x) = x[(1+\dfrac{2}{x})^x - (1+\dfrac{1}{x})^{2x}]$ en $+\infty$.

Indice. Commencez par écrire classiquement la puissance ainsi : $y^x = \exp(x\ln(y))$ *puis changement de variable habituel en* $1/x$ *puis ...*