__Exo__ $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ __Etude de fonction__

$f(x) = ch(1/x)$.

On a : $f = g \circ h$ avec : $h(x) = 1/x$
$g(y) = ch(y)$

$\left.\begin{array}{l} h(x) \text{ est } \mathcal{C}^0, \text{ et m̂ } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*. \\ g(y) \text{ ——— } \text{ sur } \mathbb{R}. \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*$

$f(x)$ est paire ; une étude sur $\mathbb{R}^+_*$ suffit.

On a : $f'(x) = sh(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} sh(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}^+_*$

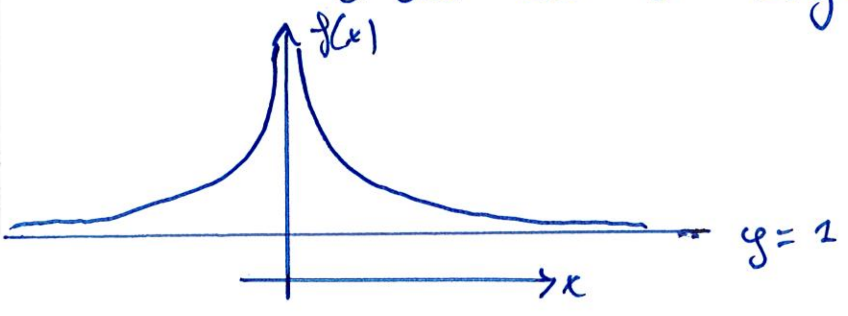
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$, $f'(x) < 0$; d'où f strict ↘.

- Comport^t de f en 0^+ et en $+\infty$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{y \to +\infty} ch(y) = +\infty$. D^{te} asymptote en 0 : $x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to 0^+} ch(y) = 1$.

d'où la d^{te} asymptote en $+\infty$: $y = 1$.



sur $\mathbb{R}^*_-$: graphe symétrique p.r. à l'axe des ordonnées.

Exo

Equivalents en 0

Rappel de cours : $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} \frac{1}{s!} f^{(s)}(a).(x-a)$

où s : ordre de la 1ère dérivée non nulle en a.
(f doit être $\mathcal{C}^s$ en $x = a$ bien entendu).

a) $\ln(1+x) - 0 \underset{0}{\sim} 1 . x \Rightarrow \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

b) $\tan x \underset{0}{\sim} x$

NB Ces fcts st ttes $\mathcal{C}^2$ au moins en $x=0$ d'où la validité des D.L. de Taylor

d) Taylor en 0 : $(1-x)^\alpha = 1 - \alpha . (1-x)^{\alpha-1}\Big|_{x=0} . x + \underset{0}{o}(x)$

$\Rightarrow (1-x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} -\alpha x$, et ce pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

---

c) $1 - \cos(x)$.

DL Taylor en $x=0$

$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + \underset{0}{o}(x^2)$

D'où : $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

d) $\operatorname{ch} x - 1$

Idem Taylor en 0 nous donne :

$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} x^2$

3) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x)$; f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$

On écrit : $f(x) = \ln(x)\left[\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} + 1\right]$

pour $x \in \mathcal{D}_f =]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$

On remarque ensuite que :

$$\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}}_{\overset{=}{\text{déf}}\ \varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

en vertu du théorème des croissances comparées.

Soit : $f(x) = \ln(x)(1+\varepsilon(x))$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[0^+]{} 0$

D'où : $\underline{f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)}$

Questo : comment trouver "l'astuce" seul ?

On remarque que : $\sqrt{x} \xrightarrow[0^+]{} 0$; $\ln(x) \xrightarrow[0^+]{} -\infty$

Dc clairement $\sqrt{x}$ est un négligeable devant $\ln(x)$ "le dominant".

Il suffit alors de factoriser le dominant pour découvrir le résultat.

$\boxed{\text{En } +\infty}$ $\Rightarrow$ on met en facteur le dominant

2)

a) Comme $x \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

et $\sin(x)$ borné dans $\mathbb{R}$.

On écrit : $f(x) = x - \sin x = x\left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right)$

et $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Démo : $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = \dfrac{|\sin x|}{|x|} \leq \dfrac{1}{|x|} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

d'où $\underline{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x}$

b) $f(x) = \underset{\xrightarrow[+\infty]{}+\infty}{x}\ \underset{\xrightarrow[+\infty]{}+\infty}{e^x} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

L'équivalent le plus simple semble être xe^x !...

⚠ Ns n'avons pas $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$

même si l'expo l'emporte sur la puissance...

En effet, $f(x) = e^x \cdot (1 + \underbrace{(x-1)}_{\cancel{\xrightarrow[+\infty]{} 0}})$

Exo   Equivalents en 0 puis $+\infty$.

a) On a : $\sin x \underset{0}{\sim} x$

⚠ on ne peut pas conclure car on obtient : $(x - \sin x) \underset{0}{\sim} x - x = 0$ ...

On écrit alors un DL Taylor en 0 à l'ordre requis pour obtenir plus d'information :

$$x - \sin(x) = 0 + x\underbrace{\left(1 - \cos(x)\big|_{x=0}\right)}_{=0} + \frac{x^2}{2}\cdot \sin(x)\big|_{x=0}$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\cos x\big|_{x=0} + \underset{0}{o}(x^3)$$

On encore (cf cours) : $\sin x \underset{0}{\sim} x - \frac{1}{3!}x^3 + \underset{0}{o}(x^5)$

D'où :

$$(x - \sin x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{6}x^3$$

b) DL Taylor en 0 à l'ordre requis pour obtenir l'informat° i.e. l'expression du 1er terme non nul

$$x e^x = 0 + x \cdot \left(e^x(1+x)\right)\Big|_{x=0} + \underset{0}{o}(x)$$

$$= x + \underset{0}{o}(x)$$

$$\Rightarrow \underline{x e^x \underset{0}{\sim} x}$$

<u>Autre sol°</u>. On a : $\lim_{x \to 0} e^x = 1 \neq 0$

d'où : $e^x \underset{0}{\sim} 1$ et : $x e^x \underset{0}{\sim} x \cdot 1 = x$

(produit d'équiv.)

Exo : Calcul de limites

a) ~~Corrigé poly. cours p17~~

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^m - 1} = \ ?$; $m \neq 0$

On a : $x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)$

d'où : $\dfrac{x-1}{x^m - 1} = \dfrac{1}{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1} \xrightarrow[x \to 1]{} \dfrac{1}{m}$

c) $\lim\limits_{+\infty} \left[x \ln\left(1 + \dfrac{x}{3+x^2}\right) \right]$

Chgt de var. : $t = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0^+$? Pas très adapté ici.

Par contre : $u = \dfrac{x}{3+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0^+$

Aussi, $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$

D'où en $+\infty$, $\ln\left(1 + \dfrac{x}{3+x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{3+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$

Soit : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \cdot x = 1$. Dc : $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1$

Exo. Calcul de limites

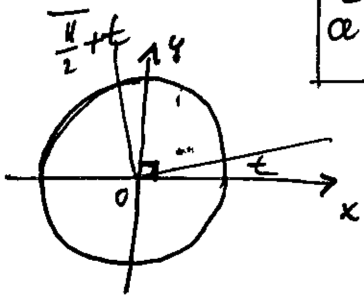
a) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \underbrace{(\pi - 2x)\tan x}_{= f(x)} = ?$

On effectue le chg^t de var. $t = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. $t \xrightarrow[x \to \pi/2]{} 0$

On définit g(t) ainsi

On a : $f(x) = g(t) = -2t \tan(t + \pi/2)$

Rem : limite indéterminée à ce stade-ci.



or $\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$

$= \dfrac{\cos t}{-\sin t} = \dfrac{-1}{\tan t}$

d'où : $g(t) = \dfrac{2t}{\tan t} \underset{0}{\sim} \dfrac{2t}{t} = 2$

d'où : $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = 2$

Ex 9 b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$ $\quad f(x) = x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^x - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right]$ ③

La puissance dépend de x, on l'écrit alors sous la forme : $\exp\left(x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) \equiv g_1(x)$

et $\exp\left(2x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \equiv g_2(x)$

On cherche la lim. en $+\infty$, on effectue alors le chgt de var. : $t = \frac{1}{x}$.

On a :

- $g_1(t) = \exp\left[\frac{1}{t} \ln(1+2t)\right]$ $\qquad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

$$= \exp\left[\frac{1}{t}\left(2t - \frac{1}{2}4t^2 + o(t^2)\right)\right] = \exp\left[2 - 2t + o(t)\right]$$

- $g_2(t) = \exp\left[\frac{2}{t} \cdot \ln(1+t)\right]$

$$= \exp\left[2 - t + o(t)\right]$$ $\qquad \exp(u) = 1 + u + o(u^2)$

D'où :

$$f(t) = \frac{1}{t}\left[e^2 \cdot \underbrace{\exp(-2t + o(t))}_{= 1 - 2t + o(t)} - e^2 \cdot \underbrace{\exp(-t + o(t))}_{= 1 - t + o(t)}\right]$$

$$= \frac{1}{t} e^2 \left(0 - t + o(t)\right) = -e^2 + o(1)$$

D'où : $\boxed{\lim_{+\infty} f(x) = -e^2}$

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x)$; $f(x) = x^2\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right)$

$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$; $f(x) = g(y) = \frac{1}{y^2}\left(\cos y - 1\right)$

D.L. en 0 : $\cos y = 1 - \frac{1}{2} y^2 + o(y^3)$

$\Rightarrow \cos y - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} y^2$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0} g(y) = \underline{-\frac{1}{2}}.$

Exercice 1.

On pose $t = x-1$: $t \xrightarrow[x \to 1]{} 0$. On a :

$$\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{2}{1-(1+t)^2} - \frac{3}{1-(1+t)^3}$$

$$= \frac{2}{1-(1+2t+t^2)} - \frac{3}{1-\left(1+3t+3t^2+\underset{t\to 0}{o}(t^2)\right)}$$

(on fait un DL_2 en $t=0$)

$$= \frac{2}{-2t-t^2} - \frac{3}{-3t-3t^2+\underset{t\to 0}{o}(t^2)}$$

$$= -\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{2}} + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t+\underset{t\to 0}{o}(t)}$$

$$= \frac{1}{t}\left(-1+\frac{t}{2}+1-t+\underset{t\to 0}{o}(t)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \underset{t\to 0}{o}(1).$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = -\frac{1}{2}$.

Exo 1 Limites

a) $\left[\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right]^x \xrightarrow[+\infty]{} ?$

Astuce : $\ln(x+1) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{= \frac{1}{x} + o_{+\infty}(1/x)}$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$

$= 1 + \dfrac{1}{x \ln x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x\ln x}\right)$

D'où : $x \ln\left[\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right] = x \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)}_{= u \xrightarrow[+\infty]{} 0}\Big)$

$= \dfrac{1}{\ln x} + o\left(\dfrac{1}{\ln x}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

D'où $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} e^0 = 1$

b) $\dfrac{1}{x}\Big(\underbrace{\ln(1+x)}_{\underset{0}{\sim} x - \frac{x^2}{2}} - \underbrace{\sin x}_{\underset{0}{\sim} x - \frac{x^3}{6}}\Big) \xrightarrow[0^+]{} ?$

$= \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)$

$\underset{0}{\sim} \dfrac{-x}{2} \xrightarrow[0]{} 0$