Exo. D.L. de Taylor.

a) Corrigé poly. cours p 33

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sin(x)}$: quotient de D.L. attendu...

↳ on va chercher à se ramener au DL d'une fct du type : $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u \underset{0}{\longrightarrow} 0$.

On a : $f(x) = \dfrac{x}{x - \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}(x^3)}$

d'où $f(x) = \dfrac{1}{1 + \underbrace{\left[-\frac{1}{6}x^2 + \underset{0}{o}(x^2)\right]}_{= u(x) \underset{0}{\longrightarrow} 0}}$

Et : $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \underset{0}{o}(u^2)$.

On souhaite un D.L. de $f(x)$ en $o(x^2)$.
d'où le DL de $\dfrac{1}{1+u}$ ordre 1 suffit, et :

$f(x) = 1 - \left[-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right] + \underset{0}{o}(x^2) \Rightarrow \underline{f(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \underset{0}{o}(x^2)}$

Exercice 3

1) $$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = \frac{u + \frac{u^3}{6} + \underset{0}{o}(u^3)}{1 + \frac{u^2}{2} + \underset{0}{o}(u^3)}$$

$$= \left(u + \frac{u^3}{6}\right)\left(1 - \frac{u^2}{2}\right) + \underset{u \to 0}{o}(u^3)$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + \underset{u \to 0}{o}(u^3)$$

c) $f(x) = (1+\sin(x))^x$ D.L. ordre 2 en $x=0$

On écrit :

$$f(x) = \exp\left[x \ln(1+\sin(x))\right]$$

On a : $u = \sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

et : $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \underset{0}{o}(u^2)$

$\sin(x) = x + \underset{0}{o}(x^2)$ — noter bien l'ordre 2 et non 1

D'où :

$$\ln(1+\sin(x)) = \left(x + \underset{0}{o}(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(x + \underset{0}{o}(x^2)\right)^2 + \dots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}(x^2)$$

soit : $f(x) = \exp\left[x^2 + \underset{0}{o}(x^2)\right]$

Et en $u=0$, $\exp(u) = 1 + u + \underset{0}{o}(u)$

D'où :

$$\boxed{f(x) = 1 + x^2 + \underset{0}{o}(x^2)}$$

Exo 2 DL Taylor

a) En 0 : $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 - \underbrace{\frac{x^2}{2} + o_0(x^3)}_{=u \xrightarrow[0]{} 0}}$; $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o_0(u^2)$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2} + o_0(x^3)\right) + o_0(x^4) + 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)$$

b) En $x = 1$. $y = 1 - x \xrightarrow[1]{} 0$

$f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{1-y} = g(y)$

DL de $g(y)$ en $y = 0$.

$$g(y) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o_0(y^3)$$

$$\rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{8}(1-x)^2 + \frac{1}{16}(1-x)^3 + o_1((1-x)^3)$$

Exo DL Taylor

a) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{\ln(1+x)}{1+\underbrace{2x+x^2}_{\to 0}}$. Ordre 3 souhaité

(Le dénominateur est un polynôme de la forme $1+\underset{\to 0}{u}$

On a, en 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{0}{o}(x^3)$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2\right) + \underset{0}{o}(x^3)$$

et

$$\frac{1}{1+\underbrace{(2x+x^2)}_{\equiv u \xrightarrow[x\to 0]{} 0}} = 1 - (2x+x^2) + (2x+x^2)^2 + \underset{0}{o}(x^2)$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 + \underset{0}{o}(x^2)$$

ordre 2 suffisant car : $\ln(1+x) = \underline{x}(1+\dots) + o(x^3)$

D'où :

$$f(x) = \ln(1+x) \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}(x^2)\right)$$

$$\cdot \left(1 - 2x + 3x^2 + \underset{0}{o}(x^2)\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{2}x\right)\left(1 - 2x + 3x^2\right) + \underset{0}{o}(x^3).$$

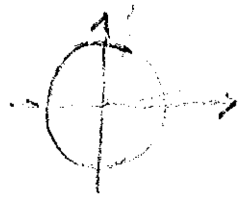
$$= \dots = \underline{x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{3}x^3 + \underset{0}{o}(x^3)}.$$

b) On a :

$f(x) = \exp\left(x \cdot \ln(\sin(x))\right)$. Ordre 2.

Chgt de var. $y = x - \frac{\pi}{2}$; $y \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}^+]{} 0^+$

$f(x) = \exp\left[\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \ln\left(\cos(y)\right)\right]$



En 0 : $\cos(y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \underset{0}{o}(y^2)$

$\ln(\cos(y)) = \ln\Big(1 + \underbrace{\left[-\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right]}_{\equiv u(y) \xrightarrow[y \to 0]{} 0}\Big)$

$= -\frac{1}{2}y^2 + \underset{0}{o}(y^2)$

d'où : $\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \ln\left(\cos(y)\right)$

$= -\frac{\pi}{4}y^2 + \underset{0}{o}(y^2) \xrightarrow[y \to 0]{} 0$

En 0, on a : $e^u = 1 + u + \underset{0}{o}(u)$

$\Rightarrow f(x) = 1 + \left(-\frac{\pi}{4}y^2 + o(y^2)\right) + \underset{0}{o}(y^2)$

Finalt,

$$f(x) = 1 - \frac{\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \underset{\frac{\pi}{2}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) \text{ ordre } 2.$$

2) On écrit un DL de $f(x)$ en $+\infty$

$$f(x) = x + x \, \text{th}\Big(\underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}_{= u(x)} \Big).$$

On commence par écrire un DL_3 de $u(x)$, à partir d'un DL_2 de $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$:

$$u(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Comme $u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on peut utiliser le DL_3 de th u en 0 :

$$\operatorname{th} u(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{4}{3x^3} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

On obtient donc

$$f(x) = x + x\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$= x + 1 - \frac{4}{3x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La courbe de f, $\mathcal{C}_f$, admet donc une asymptote droite d'éq. $y = x+1$ en $+\infty$ et $f(x) - (x+1)$ est du signe de $-\frac{4}{3x^2}$ en $+\infty$ donc <0 : $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exo Branches infinies.

On cherche à étudier le comport^t à l'∞ de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x+1}{1+e^{1/x}}$$

Pour $x>0$, $f(x)$ est C^∞.
(et m̂ sur $\mathbb{R}$ tout entier)

- Etude en $+\infty$ $\Rightarrow$ Chg^t de var. $y = 1/x \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0^+$
- DL Taylor de e^y en 0 :

$$1 + e^y = 2 + y + \frac{1}{2}y^2 + \underset{0}{o}(y^2)$$

- D'où :

$$f(x) = (1+x)\frac{1}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \underset{0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{(1+x)}{2}\frac{1}{1 + \underbrace{\left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \underset{0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}_{= u(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0}}$$

Et : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \underset{0}{o}(u^2)$

D'où :

$$f(x) = \frac{1+x}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right) + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1+x)\left[1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2x} + x - \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

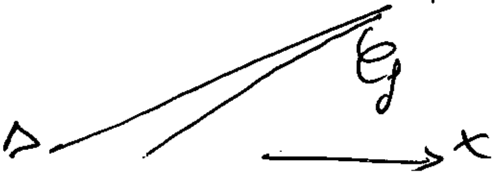
$$= \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc :

$$\left[f(x) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'où, en $+\infty$, $f(x)$ admet Δ comme droite asymptote avec $\Delta : y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

De plus, le graphe de f est ~~en~~-dessous de sa d^te^ asymptote (car $\frac{-1}{4x} \leq 0$ pour $x > 0$)



b) $f(t) = (1+t)\arctan\left(1+\frac{2}{t}\right)$ (Branche Infini)

On a : $\lim\limits_{+\infty} \arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

d'où $f(t) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

<u>Chgt de var.</u> : $x = \frac{1}{t}$. $\left(x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0^+\right)$.

On écrit un dévelopt asymptotique de $g(x)$ en 0 et à la précisiᵒ x (a-priori...)
$(g(x) = f(t))$

On a : $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\arctan(1+2x)$

$= \frac{1}{x}\arctan(1+2x)\cdot(x+1)$

∘ D.L. de $\arctan(1+2x)$ en 0 à l'ordre 3 :

en 0 : $\arctan(1+y) = \arctan(1) + y\cdot\frac{1}{2} + \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{2} + o(y^3)$

$\Rightarrow$ $\arctan(1+2x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{4}(2x)^2 + \frac{1}{12}(2x)^3 + o(x^3)$
en 0 (car $y = 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$)

∘ D'où : $g(x) = \left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{x} + 1 - x + \frac{8}{12}x^2\right)(x+1) + o(x^2)$

$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{\pi}{4}+1\right) - \frac{1}{3}x^2 + \frac{\pi}{4}\frac{1}{x} + o(x^2)$

Soit :

$$f(t) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} t - \frac{1}{3}\frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

D'où

$$f(t) - \Delta(t) = -\frac{1}{3}\frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

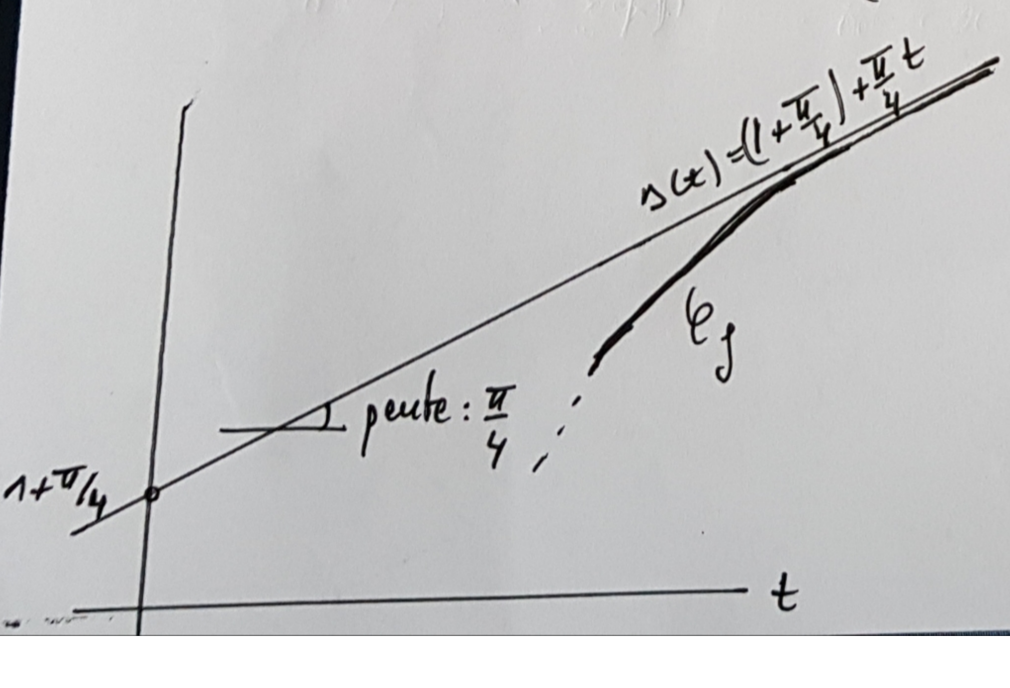
avec $\Delta(t) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} t$

On a donc :

$$\boxed{f(t) - \Delta(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{3}\frac{1}{t^2} \xrightarrow[+\infty]{} 0}$$

$\Delta(t)$: d^te asymptote de f en $+\infty$

Et le graphe de f, noté $\mathcal{C}_f$, est au-dessous de cette d^te en $+\infty$ (car $-\frac{1}{3}\frac{1}{t^2} < 0$ au voisi. de $+\infty$)



Exo Développts asymptotiques

a) $\cot(x)$ en 0 et à la précis° x^3.

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)}$$

Rappel : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o(x^4)\right)}$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$\Rightarrow \cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o(x^3).$$

b) $\underbrace{\left(\frac{1}{\ln(1+x)}\right)^2}_{= f(x)}$ en 0 et à la précis° x.

On a : $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$

Soit :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\left[-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right]}_{=u}},$$

Soit :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{1+\underbrace{\left[-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)\right]}_{u}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left\{1-\left[-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3\right] + \left[\frac{1}{4}x^2-2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]-\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right\}^2$$

$$\frac{1}{1+u} = 1-u+u^2-u^3+o(u^3)$$

+1/24.x^3 + o(x^3)

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)\right\}^2$$

Grosse erreur! effectuer en devlpt en o(x^3) a partir d'informations en o(x^2) !
il va manquer du monde….

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left\{1+\frac{1}{4}x^2+2\cdot\frac{1}{2}x-2\cdot\frac{1}{12}x^2-2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{12}x^3+o(x^3)\right\}$$

terme manquant: +1/12.x^3

+0.x

Text

$$= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}x+o(x)$$

=1/x^2 + 1/x +1/12 + o(x)   = DA de la fct en 0 a la precision o(x)

Exo Dev. Asymptotique

$$f(x) = x \ln(x+1) - (x+1)\ln x \quad \text{en } +\infty$$

Précis° $1/x^2$

$$f(x) = x \ln\left[x\left(1+1/x\right)\right] - (x+1)\ln x$$

$$= x \cancel{\ln x} + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \cancel{x\ln x} - \ln x$$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Posons $u = \frac{1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0^+$

$$f(x) = g(u) = \frac{1}{u}\ln(1+u) - \ln\frac{1}{u}$$

En 0 : $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \underset{0}{o}(u^3)$

$$\Rightarrow g(u) = 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + \underset{0}{o}(u^2)$$

Soit : $f(x) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \ln x$

Exo 2 a) D. A. en $+\infty$ de

$$f(x) = e^{1/x} - e^{1/(x-1)} \quad ; \quad \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Chgt de var. : $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0^+$.

$$g(x) = e^y - e^{\frac{1}{1/y - 1}} = e^y - e^{\left(\frac{y}{1-y}\right)}$$

• D.L. en 0 de $\frac{y}{1-y}$.

$$\frac{y}{1-y} = y\left(1 + y + \underset{0}{o}(y)\right) = y + y^2 + \underset{0}{o}(y^2)$$

• D'où :

$$g(y) \equiv f(x) = 1 + y + y^2 + \underset{0}{o}(y^2) - \exp\left(\underbrace{y + y^2 + \underset{0}{o}(y^2)}_{= u \xrightarrow[y \to 0]{} 0}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + y + y^2 + \underset{0}{o}(y^2) - \left[1 + \left(y + y^2 + \underset{0}{o}(y^2)\right) + \underbrace{\underset{0}{o}(y^2)}_{\underset{0}{o}(u^2)}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = -y^2 + \underset{0}{o}(y^2) = -\frac{1}{x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

b) D'où : $x^2 f(x) = -1 + \underset{+\infty}{o}(1) \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} x^2 f(x) = -1$