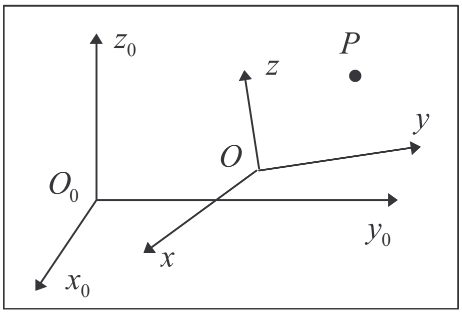
COMPOSITION DE MOUVEMENTS

I DEFINITIONS-NOTATIONS

Soit un repère $\mathcal{R}$ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$. On considère un point P de l'espace.



On définit alors trois mouvements :

- le mouvement de P par rapport à $\mathcal{R}_0$: l'observateur est fixe par rapport à $\mathcal{R}_0$ et observe le mouvement de P ; c'est le mouvement absolu défini par :

$$\text{la vitesse absolue } \vec{V}(P/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d O_0\vec{P}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

$$\text{l'accélération absolue } \vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d^2 O_0\vec{P}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

  les dérivations se font dans $\mathcal{R}_0$.

- le mouvement de P par rapport à $\mathcal{R}$: l'observateur est fixe par rapport à $\mathcal{R}$ et observe le mouvement de P ; c'est le mouvement relatif défini par :

$$\text{la vitesse relative } \vec{V}(P/\mathcal{R}) = \left(\frac{dO\vec{P}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$\text{l'accélération relative } \vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}) = \left(\frac{d^2 O\vec{P}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

  les dérivations se font dans $\mathcal{R}$.

- le mouvement d'entrainement du point P par rapport à $\mathcal{R}_0$: l'observateur est fixe par rapport à $\mathcal{R}_0$ et observe le mouvement du point de $\mathcal{R}$ qui coïncide à l'instant t avec le point P considéré ; le mouvement d'entrainement est défini par :

$$\text{la vitesse d'entrainement notée pour l'instant } \vec{V}(P,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$$

$$\text{l'accélération d'entrainement notée pour l'instant } \vec{\Gamma}(P,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$$

  et dont les expressions sont pour l'instant inconnues.

II COMPOSITION DES DERIVATIONS

Soient à présent deux points A et B en mouvement à la fois par rapport à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{R}_0$. On pose $\vec{AB} = \vec{U}$. Soient x, y et z les composantes de $\vec{U}$ dans $\mathcal{R}$.

On dérive $\vec{U}$ dans $\mathcal{R}_0$ (cela signifie que l'observateur, placé dans $\mathcal{R}_0$, étudie la variation du vecteur $\vec{U}$ dans le temps) :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z})\right)_{\mathcal{R}_0} = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge (x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z})$$

d'où la formule fondamentale :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{U}$$

Cas particulier : $\vec{U}$ est fixe dans $\mathcal{R}$: on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{U}$$

On retrouve la formule du repère mobile.

III COMPOSITION DES VITESSES

On recherche une relation entre ces différentes vitesses.

Soient x, y et z les coordonnées de P dans $\mathcal{R}$. Soient x_0, y_0 et z_0 les coordonnées de P dans $\mathcal{R}_0$. On part de l'expression :

$$\vec{V}(P \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(O \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{OP}$$

Par ailleurs :

$$\vec{V}(P / \mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{O_0P}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{O_0O}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \left(\frac{d}{dt}(x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z})\right)_{\mathcal{R}_0}$$

Soit :

$$\vec{V}(P / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(O / \mathcal{R}_0) + \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge (x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z})$$

On reconnait dans l'association des premier et dernier termes du membre de droite l'expression du champ des vitesses d'un solide rigide. Ainsi la relation entre les différentes vitesses apparaît sous la forme :

$$\vec{V}(P / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(P / \mathcal{R}) + \vec{V}(P \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0)$$

IV COMPOSITION DES ACCELERATIONS

On recherche une relation du même type que la précédente entre les différentes accélérations.

Déterminons dans un premier temps l'expression du champ des accélérations d'un solide rigide. On part de l'expression :

$$\vec{V}(P \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(O \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{OP}$$

En dérivant dans $\mathcal{R}_0$, on obtient:

$$\vec{\Gamma}(P \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) = \left(\frac{d}{dt}\vec{V}(O \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0)\right)_{R_0} + \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{OP}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

Soit :

$$\vec{\Gamma}(P \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(O \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{OP}\right) + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{OP}$$

On dérive à présent dans $\mathcal{R}_0$ l'expression de la composition des vitesses. On obtient aisément :

$$\vec{\Gamma}(P / \mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(P / \mathcal{R}) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{V}(P / \mathcal{R}) + \vec{\Gamma}(O \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{OP}\right) + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{OP}$$

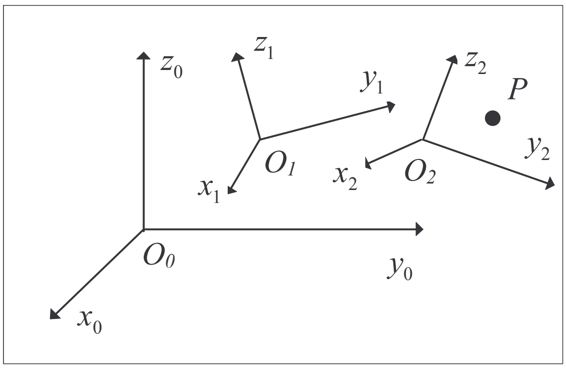
On reconnaît dans les trois derniers termes l'expression de $\vec{\Gamma}(P \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0)$ écrite précédemment. Ainsi :

$$\vec{\Gamma}(P / \mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(P / \mathcal{R}) + \vec{\Gamma}(P \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{V}(P / \mathcal{R})$$

Remarque : l'accélération d'entrainement n'est pas la dérivée de la vitesse d'entrainement ; le dernier terme du membre de droite est appelé accélération de Coriolis.

V COMPOSITION DES MOUVEMENTS DE SOLIDES

Soit un solide S_2 (de repère attaché $\mathcal{R}_2$) en mouvement à la fois par rapport à un solide S_1 (de repère attaché $\mathcal{R}_1$) et par rapport à un solide de référence S_0 (de repère attaché $\mathcal{R}_0$). On considère un point matériel *P* du solide S_2.



V.1 Composition des vecteurs vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit, en spécifiant à présent que le point *P* est un point matériel de $\mathcal{R}_2$:

$$\vec{V}(P \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(P \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1) + \vec{V}(P \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0)$$

Le premier terme est la vitesse du point *P* de $\mathcal{R}_2$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Le second terme est la vitesse du point P de $\mathcal{R}_2$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_1$.

Le dernier terme est la vitesse du point P dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ mais cette fois comme si, à l'instant t, abstraction étant faite du solide $\mathcal{R}_2$, il était figé dans $\mathcal{R}_1$.

Exemple : voyageur dans un train

V.2 Composition des vecteurs rotations

Soit $\vec{U}$ un vecteur fixe de $\mathcal{R}_2$. On a :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{U}$$

et, de même :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{U} \text{ et } \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}$$

En retranchant ces deux dernières équations de la première, on obtient :

$$\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} - \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}\right)\right) \wedge \vec{U} = \vec{0}$$

Comme cette expression est vraie quelque soit le vecteur $\vec{U}$:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}$$

V.3 Conséquence

Les relations de composition de mouvement entre vitesses et entre vecteurs rotation permettre d'écrire une relation similaire pour les torseurs cinématiques. Ainsi, le torseur cinématique $\left[\mathcal{C}_{2/0}\right]$ du mouvement de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ (mouvement de S_2 par rapport à S_0) vérifie la relation :

$$\left[\mathcal{C}_{2/0}\right] = \left[\mathcal{C}_{2/1}\right] + \left[\mathcal{C}_{1/0}\right]$$

VI CINEMATIQUE DU CONTACT

VI.1 Définition

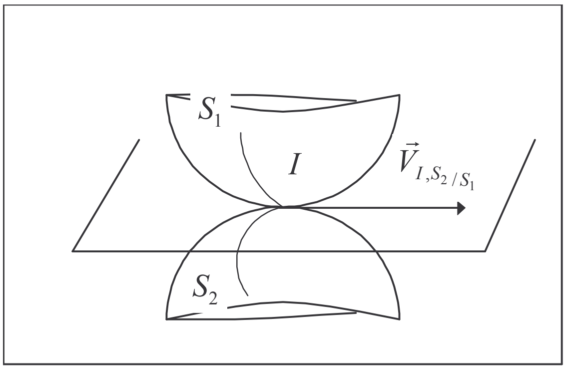
On considère deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel en I.

La définition de ce point I recouvre en fait, du point de vue cinématique, l'existence de trois points particuliers :

- le point matériel I appartenant au solide S_1,
- le point matériel I appartenant au solide S_2,
- le point géométrique I du contact.

Les deux premiers points ont une existence matérielle différente et coïncident au moment du contact avec le troisième ; les trois points, confondus à l'instant t, ne le sont plus à l'instant $t + dt$.

Pour s'en convaincre, prenons l'exemple d'une roue de voiture qui patine sur le sol tandis que la voiture avance.



On définit par ailleurs le plan (π) tangent au contact.

VI.2 Vitesse de glissement

Soit C_{I/S_1} l'ensemble des positions du point de contact *I* sur la surface du solide S_1 c'est à dire la trajectoire du point de contact géométrique *I* par rapport au solide S_1. On définit alors la vitesse :

$$\vec{V}(I / S_1)$$

qui, par définition est tangente à cette trajectoire. Comme cette trajectoire est portée par la surface de S_1, la vitesse $\vec{V}(I / S_1)$ définie en *I* est contenue dans le plan (π).

De même, on considère C_{I/S_2}, ensemble des positions du point de contact *I* sur la surface du solide S_2 c'est à dire la trajectoire du point de contact géométrique *I* par rapport au solide S_2 ; on définit la vitesse :

$$\vec{V}(I / S_2)$$

qui, par définition est tangente à cette trajectoire. Comme cette trajectoire est portée par la surface de S_2, la vitesse $\vec{V}(I / S_2)$ définie en *I* est également contenue dans le plan (π).

La relation de composition des vitesses formulée au point géométrique *I* s'écrit :

$$\vec{V}(I / S_1) = \vec{V}(I / S_2) + \vec{V}(I \in S_2 / S_1)$$

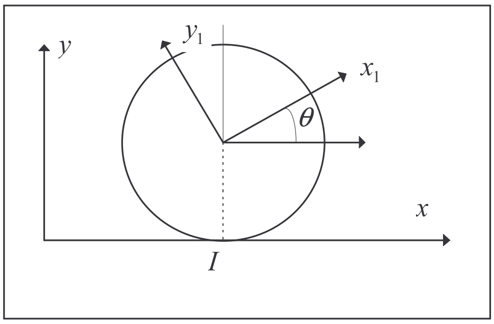
On définit la vitesse de glissement par :

$$\vec{V}(I \in S_2 / S_1) = \vec{V}(I / S_1) - \vec{V}(I / S_2)$$

également contenue dans le plan (π).

Exemple : roue de voiture :

VI.3 Roulement sans glissement



Par définition, il y a roulement sans glissement du solide S_1 par rapport au solide S_2 au point *I* si la vitesse de glissement est nulle :

$$\vec{V}(I \in S_2 \ / \ S_1) = \vec{0}$$

Signification : pour l'exemple de la roue de voiture : la longueur de l'arc décrit par le point géométrique de contact *I* dans son mouvement par rapoort au sol pendant le temps Δt est égale à la longueur du chemin décrit par ce même point géométrique de contact *I* dans son mouvement par rapport à la roue pendant ce même temps.

Remarque : la relation vectorielle précédente fournit, dans le cas général, deux relations scalaires ; dans le cas d'un problème plan, elle fournit une seule relation scalaire.

Remarque : si, lors d'un mouvement, le contact est rompu, cette relation n'a plus lieu d'être.

Autre exemple d'application : engrenage.