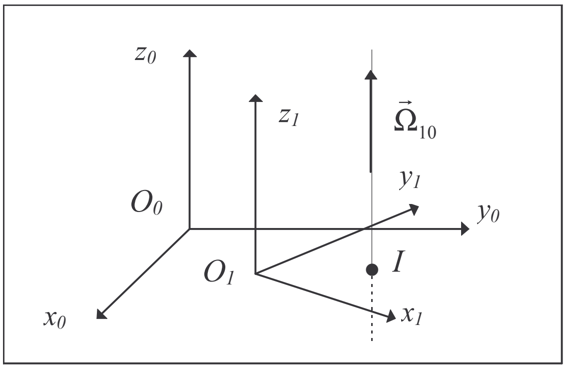
MOUVEMENTS PARTICULIERS

I MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

I.1 Définitions-Notations



Soient un repère fixe $\mathcal{R}_0$ et un repère mobile $\mathcal{R}_1$ tels que le plan $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ reste confondu avec le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ au cours du mouvement.

L'axe $\vec{z}_1$ étant invariant au cours du mouvement, on a :

$$\left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$$

ce qui signifie que le vecteur instantané de rotation est porté par $\vec{z}_1$.

A un instant *t* donné du mouvement, on peut distinguer deux cas :

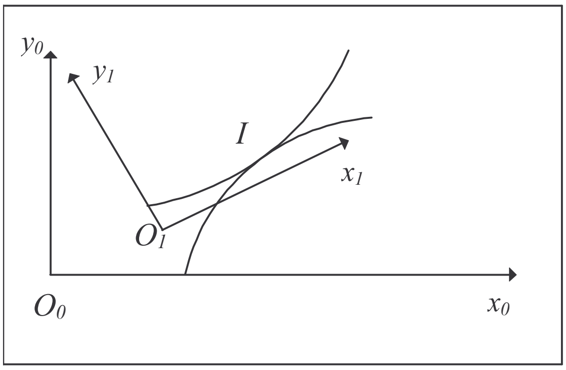
- $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$: le mouvement de 1 par rapport à 0 est une translation ;
- $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \neq \vec{0}$: l'axe central du mouvement de 1 par rapport à 0 existe. Il coupe le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ au point I, appelé centre instantané de rotation.

Au cours du mouvement, l'axe central (et donc le point I) évolue : il décrit :

- par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ un cylindre appelé surface axoïde base (ou tout simplement base),
- par rapport au repère $\mathcal{R}_1$ un cylindre appelé surface axoïde roulante (ou tout simplement roulante).

Comme le plan $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ reste confondu avec le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, la trajectoire d'un point *P* de $\mathcal{R}_1$ reste dans un plan perpendiculaire à (Δ) ; la vitesse de ce point est donc elle-même également perpendiculaire à (Δ). Ainsi l'invariant scalaire $\mathcal{A}$ est nul.

Au cours d'un mouvement plan sur plan, le champ des vitesses du solide 1 est, à l'instant *t*, identique à celui obtenu dans une rotation autour de (Δ) ; la roulante roule sans glisser sur la base.



I.2 Recherche analytique du CIR

Supposons connus à l'instant *t* les vecteurs $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}$ et $\vec{V}(O_1 \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0)$. On résout l'équation :

$$\vec{V}(I \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_1 \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{OI} = \vec{0}$$

Les vecteurs vitesses étant portés par le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, on obtient deux équations scalaires à deux inconnues x_I et y_I :

- x_I et y_I sont définis comme les coordonnées de *I* dans le repère $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, on obtient une équation paramétrique de la base ;
- x_I et y_I sont définis comme les coordonnées de *I* dans le repère $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$, on obtient une équation paramétrique de la roulante.

I.3 Recherche géométrique du CIR

Quelque soit le point *P* du repère $\mathcal{R}_1$, on a :

$$\vec{V}(P \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(I \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{IP} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{IP}$$

Le point *I* se situe donc sur la perpendiculaire en *P* au vecteur vitesse $\vec{V}(P \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0)$. Il suffit de connaître la vitesse de deux points du repère $\mathcal{R}_1$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ pour déterminer graphiquement la position du centre instantané de rotation du mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Application : porte de garage.

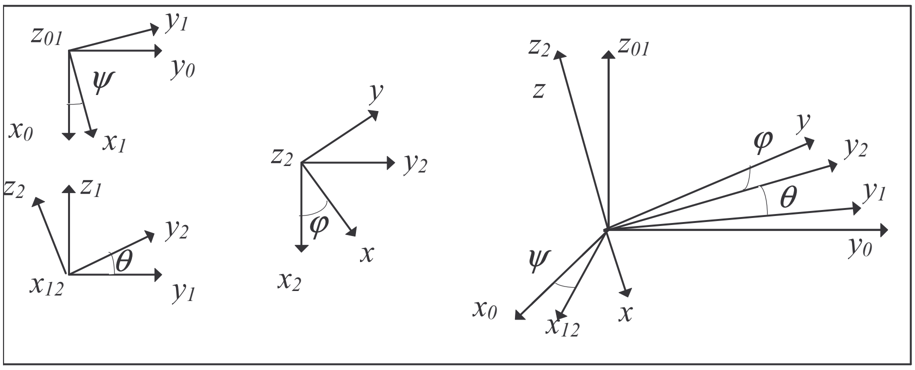
II MOUVEMENT DE ROTATION AUTOUR D'UN POINT

Dans le cas général, la position d'un solide (repère attaché $\mathcal{R}$) par rapport à un solide de référence (repère attaché $\mathcal{R}_0$) dépend de 6 paramètres :

- les 3 coordonnées (dans le repère de référence) du point *O*, centre du repère lié au solide et qui permettent d'effectuer une translation de repère,
- les 3 angles donnant l'orientation du repère $\mathcal{R}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.

On parle de mouvement de solide autour d'un point quand un point de $\mathcal{R}$ - choisi généralement comme origine - reste fixe dans le mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ (liaison rotule par exemple). La position du solide ne dépend plus que de 3 paramètres angulaires.

Traditionnellement, on choisit de représenter la position du solide par les angles d'Euler dont la succession est la suivante :



- ψ : angle de précession (rotation d'axe $O\vec{z}_0$),
- θ : angle de nutation (rotation d'axe $O\vec{x}_1$),
- φ : angle de rotation propre (rotation d'axe $O\vec{z}_2$),

Ainsi le mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ peut être considéré comme la composition trois mouvement de rotation autour de trois axes :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}$$

ou :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\varphi}\vec{z}_2$$

Remarque : Ces trois axes ne forment pas un repère orthonormé. On pourra également être amené à évaluer le vecteur rotation dans une même base - par exemple $\mathcal{R}_2$:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \left|\begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{array}\right._{\mathcal{R}_2}$$

Application : gyroscope.