GEOMETRIE DES MASSES

Après avoir vu les notions de :

- longueur - permettant de définir la géométrie d'un système,
- temps - permettant de créer un champ de vitesses, c'est à dire de mettre en place une cinématique,

nous allons formuler le concept de masse qui, associé ultérieurement à une géométrie et une cinématique données, permet de mettre en place le concept de quantité de mouvement, c'est à dire une cinétique.

I MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL

I.1 Définition

Soit un système (S) et un point courant $P \in (S)$. On associe au point P un volume élémentaire $d\mathcal{V}$ de masse dm.

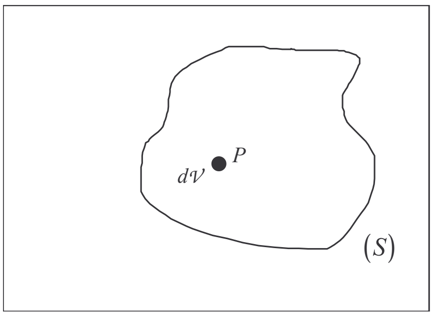
On définit la masse spécifique - ou masse volumique :

$$\rho_v = \frac{dm}{d\mathcal{V}} \qquad \text{unité : } [\rho_v] = [M] \cdot [L]^{-3}$$

ρ_v n'est pas nécessairement une constante ; elle peut varier en fonction du point P (quand le matériau considéré n'est pas homogène) ou en fonction du temps. Ainsi la masse m du système s'écrit de façon générale :

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_v(P)\, d\mathcal{V}$$

où le domaine d'intégration n'a pas non plus nécessairement une géométrie fixe (si le système est déformable).



Hypothèse : on se placera ici, comme dans les chapitres précédents, dans le cadre des solides rigides ; de plus - sauf mention contraire - on considèrera que ρ est une constante.

Par ailleurs, on sera souvent amené à considérer des solides de géométrie particulière :

- des solides dits "solides-plaque" (ou plaques) ; ils sont tels qu'une dimension (l'épaisseur) est très inférieure aux dimensions longitudinales. Leur masse est donnée par l'expression :

$$m = \iint_S \rho_s(P)\, d\mathcal{S}$$

où $d\mathcal{S}$ est un élément de surface et ρ_S une masse surfacique $[\rho_S] = [M]\cdot[L]^{-2}$

- des solides dits "solides-barre" (ou barres) ; ils sont tels qu'une dimension (l'élancement) est très supérieure aux dimensions transversales. Leur masse est donnée par l'expression :

$$m = \int_L \rho_l(P)\, ds$$

où ds est un élément d'arc et ρ_l la masse linéique $[\rho_l] = [M]\cdot[L]^{-1}$

- des solides constitués d'un nombre fini de points matériels ; on parle de répartition de masse discrète. Leur masse est donnée par l'expression :

$$m = \sum_i m_i$$

I.2 Calcul de la masse

La détermination de la masse d'un solide passe donc, dans le cas général, par le calcul d'une intégrale de volume. Le cours de mathématiques correspondant sera vu plus tard dans l'année mais ceci ne nous empêche nullement d'en présenter les éléments suffisants pour ce cours.

Ainsi :

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_v \, d\mathcal{V}$$

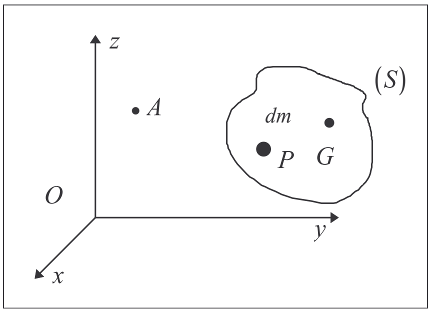
ou $d\mathcal{V}$, élément de volume, prend les expressions usuelles :

- $dx\, dy\, dz$ en coordonnées cartésiennes,
- $rdr\, d\theta$ en coordonnées polaires,
- $rdr\, d\theta\, dz$ en coordonnées cylindriques,

Le calcul de la masse m s'effectue en intégrant successivement suivant les trois directions, les bornes d'intégration pouvant être variables.

II CENTRE D'INERTIE

II.1 Définition



Le centre d'inertie G (centre de gravité) d'un solide (S) de masse m est le barycentre de tous les points matériels de (S) affectés de leur masse respective. On a :

$$m\,A\vec{G} = \int A\vec{P}\,dm$$

où l'opérateur d'intégration $\int$ représente $\iiint_{\mathcal{V}}$, $\iint_{\mathcal{S}}$ ou $\int_{\mathcal{L}}$ ou Σ selon les cas, et où A est un point quelconque de l'espace. Ainsi :

$$A\vec{G} = \frac{1}{m}\int A\vec{P}\,dm$$

II.1.1 Remarque

Soit un repère $\mathcal{R}$ d'origine O. On pose :

$$O\vec{G} = \left|\begin{matrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$$

On a :

$$x_G = \frac{1}{m}\int x\,dm \qquad y_G = \frac{1}{m}\int y\,dm \qquad z_G = \frac{1}{m}\int z\,dm$$

Ainsi, en coordonnées cartésiennes :

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_v x\,dx\,dy\,dz \qquad y_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_v\; y\,dx\,dy\,dz \qquad z_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_v z\,dx\,dy\,dz$$

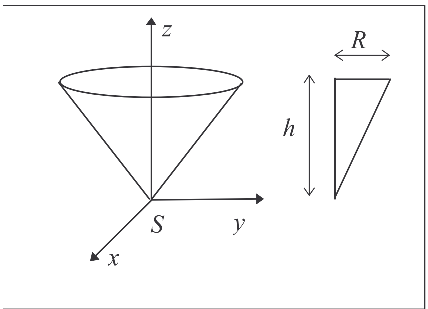
II.1.2 Propriétés

Si un solide homogène (S) présente :

- un plan de symétrie, alors le centre d'inertie se trouve dans ce plan ;
- un axe de symétrie, alors le centre d'inertie se trouve sur cet axe ;
- un centre de symétrie, alors le centre d'inertie est ce point.

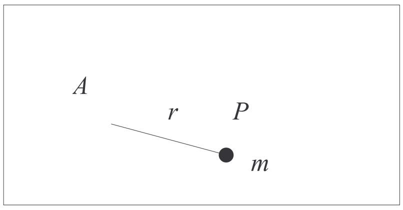
Ces propriétés évidentes résultent des méthodes d'intégration sur des domaines présentant des symétries. Elles ne seront pas démontrés ici dans leur généralité.

Application : centre de gravité d'un triangle, centre de gravité d'un cône.



III MOMENTS D'INERTIE

Soit un point matériel P de masse m fixé au bout d'un fil sans masse (A,P) de longueur r. Le concept d'inertie de P au point A est en relation avec l'investissement énergétique (la quantité d'énergie) nécessaire pour lancer la masse en rotation autour du point A :



On pose :

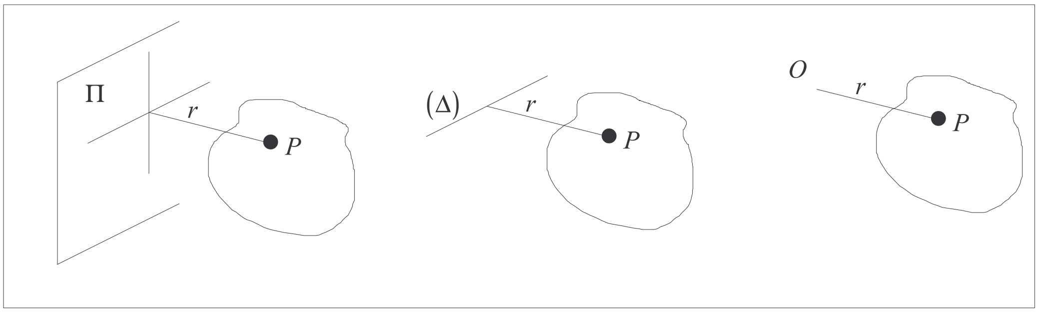
$$\mathrm{I} = m\,r^2 \qquad\qquad [I]=[M]\cdot[L]^2$$

Ainsi :

- si le fil est plus long, l'énergie nécessaire sera quadratiquement plus importante ;
- si la masse est plus importante, l'énergie nécessaire sera proportionnellement plus importante.

III.1 Définitions

Etant donné un solide (S), on définit différents moments d'inertie :



III.1.1 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan

On appelle moment d'inertie par rapport à un plan (π) la quantité :

$$\mathrm{I}_\pi(s) = \int_S r^2\ dm$$

où r est la distance du point courant du solide au plan (π).

III.1.2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite

On appelle moment d'inertie par rapport à une droite (Δ) la quantité :

$$\mathrm{I}_\Delta(s) = \int_S r^2\ dm$$

où r est la distance du point courant du solide à la droite (Δ).

III.1.3 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point

On appelle moment d'inertie par rapport à un point A la quantité :

$$\mathrm{I}_A(s) = \int_S r^2 \, dm$$

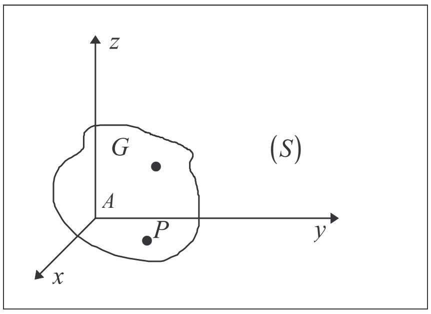
où r est la distance du point courant du solide au point A.

Remarque : ces quantités sont toutes positives.

III.2 Moments d'inertie et produits d'inertie pour un solide

III.2.1 Définitions

Soit un solide (S) auquel on associe un repère $\mathcal{R}(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ supposé lié au solide au cours du temps.



Conformément aux définitions précédentes, on peut calculer les moments d'inertie par rapport aux axes $(A\vec{x})$, $(A\vec{y})$ et $(A\vec{z})$. On pose :

$$\mathrm{A} = \mathrm{I}_{A\vec{x}}(s) = \int_S \left(y^2 + z^2\right) dm \text{ , moment d'inertie par rapport à } (A\vec{x}),$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{I}_{A\vec{y}}(s) = \int_S \left(x^2 + z^2\right) dm \text{ , moment d'inertie par rapport à } (A\vec{y}),$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{I}_{A\vec{z}}(s) = \int_S \left(x^2 + y^2\right) dm \text{ , moment d'inertie par rapport à } (A\vec{z}).$$

De plus on forme les quantités suivantes (homogènes à des inerties) :

$$\mathrm{D} = \mathrm{I}_{A\vec{y}A\vec{z}}(s) = \int_S y\, z\, dm \text{ , produit d'inertie par rapport aux axes } (A\vec{y}) \text{ et } (A\vec{z}),$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{I}_{A\vec{x}A\vec{z}}(s) = \int_S x\, z\, dm \text{ , produit d'inertie par rapport aux axes } (A\vec{x}) \text{ et } (A\vec{z}),$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{I}_{A\vec{x}A\vec{y}}(s) = \int_S x\, y\, dm \text{ , produit d'inertie par rapport aux axes } (A\vec{x}) \text{ et } (A\vec{y}).$$

appelées produits d'inertie du solide (S) et dont la signification apparaîtra plus tard.

III.2.2 Propriétés

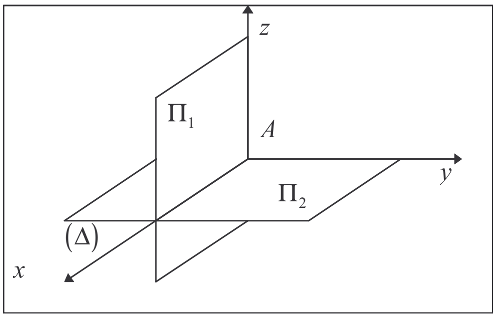
On a :

$$\mathrm{A} = \mathrm{I}_{A\vec{x}}(s) = \int_S r^2 \, dm = \int_S \left(y^2 + z^2\right) dm = \int_S y^2 \, dm + \int_S z^2 \, dm = \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{y}}(s)$$

Ainsi :

$$\mathrm{I}_{A\vec{x}}(s) = \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{y}}(s)$$

Théorème : Le moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires passant par cette droite :



$$\mathrm{I}_{\Delta}(s) = \mathrm{I}_{\pi 1}(s) + \mathrm{I}_{\pi 2}(s)$$

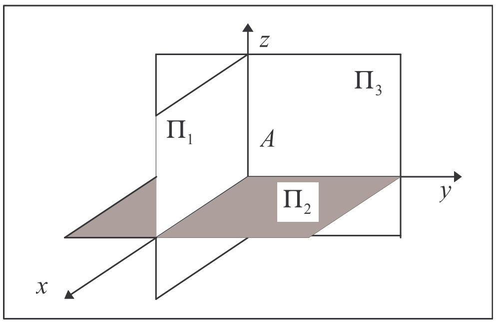
On a, d'autre part :

$$\mathrm{I}_A(s) = \int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot dm = \int_S x^2 \cdot dm + \int_S y^2 \cdot dm + \int_S z^2 \cdot dm = \mathrm{I}_{\vec{y}O\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}O\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}O\vec{y}}(s)$$

Ainsi :

$$\mathrm{I}_A(s) = \mathrm{I}_{\vec{y}A\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{y}}(s)$$

Théorème : Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans perpendiculaires se rencontrant en ce point.



$$\mathrm{I}_A(s) = \mathrm{I}_{\pi 1}(s) + \mathrm{I}_{\pi 2}(s) + \mathrm{I}_{\pi 3}(s)$$

IV OPERATEUR D'INERTIE - MATRICE D'INERTIE

IV.1 Définitions

Soit un solide (S), un point A quelconque (qui n'appartient pas nécessairement à (S)) et une base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On définit un opérateur linéaire $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$, appelé matrice d'inertie du solide (S) en A relativement à la base $\mathcal{B}$. Cet opérateur est tel que :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=\int_S A\vec{P}\wedge\left(\vec{u}\wedge A\vec{P}\right)dm$$

où $\vec{u}$ est un vecteur quelconque dans $\mathcal{B}$ et P le point courant de (S).

Signification : Soit l'opérateur matriciel $[K]$ qui, à tout vecteur $\vec{u}$, fait correspondre le vecteur $A\vec{P}\wedge\vec{u}$. $[K]$ est tel que : $[K]\cdot\vec{u}=A\vec{P}\wedge\vec{u}$. On a :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=-\int_S A\vec{P}\wedge\left(A\vec{P}\wedge\vec{u}\right)dm$$

d'où :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=-\int_S [K]^2\cdot\vec{u}\;dm$$

IV.2 Composantes de $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$

Soit $\vec{u}=\begin{vmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$ le vecteur quelconque et $P(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ le point courant de (S), avec $\mathcal{R}=(A,\mathcal{B})$. On a :

$$[K]\cdot\vec{u}=A\vec{P}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}yu_z-zu_y\\zu_x-xu_z\\xu_y-yu_x\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}0&-z&y\\z&0&-x\\-y&x&0\end{bmatrix}\cdot\begin{vmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{vmatrix}$$

d'où : $[K]=\begin{bmatrix}0&-z&y\\z&0&-x\\-y&x&0\end{bmatrix}$ et : $[K]^2=\begin{bmatrix}-z^2-y^2&xy&zx\\xy&-z^2-x^2&yz\\zx&yz&-y^2-x^2\end{bmatrix}$

On a :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=-\int_S[K]^2\cdot\vec{u}\;dm=\left(-\int_S[K]^2\;dm\right)\cdot\vec{u}$$

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]=-\int_S[K]^2\;dm=\begin{bmatrix}\int_S\left(y^2+z^2\right)dm&-\int_S x\,y\,dm&-\int_S z\,x\,dm\\-\int_S x\,y\,dm&\int_S\left(z^2+x^2\right)dm&-\int_S y\,z\,dm\\-\int_S z\,x\,dm&-\int_S y\,z\,dm&\int_S\left(y^2+x^2\right)dm\end{bmatrix}$$

En reprenant les différentes notations précédentes, la matrice d'inertie du solide (S) en A et relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]=\begin{bmatrix}\mathrm{A}&-\mathrm{F}&-\mathrm{E}\\-\mathrm{F}&\mathrm{B}&-\mathrm{D}\\-\mathrm{E}&-\mathrm{D}&\mathrm{C}\end{bmatrix}$$

Application : matrice d'inertie d'un rectangle, matrice d'inertie d'un disque évidé.

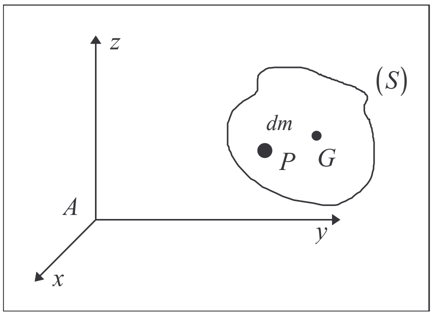
V THÉORÈME DE HUYGENS

Soit $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$ la matrice d'inertie en A et relativement à la base $\mathcal{B}$ d'un solide (S). On a, quelque soit le vecteur $\vec{u}$:

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u} = \int_S A\vec{P}\wedge\left(\vec{u}\wedge A\vec{P}\right)dm$$

où P est le point courant de (S). Soit G le centre de gravité de (S). On rappelle que :

$$\int_S G\vec{P}\,dm = \vec{0}$$



Ecrivons que $A\vec{P} = A\vec{G} + G\vec{P}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u} &= \int_S \left(A\vec{G}+G\vec{P}\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\left(A\vec{G}+G\vec{P}\right)\right)dm \\
&= \int_S A\vec{G}\wedge\left(\vec{u}\wedge A\vec{G}\right)dm + \int_S A\vec{G}\wedge\left(\vec{u}\wedge G\vec{P}\right)dm + \int_S G\vec{P}\wedge\left(\vec{u}\wedge A\vec{G}\right)dm + \int_S G\vec{P}\wedge\left(\vec{u}\wedge G\vec{P}\right)dm \\
&= A\vec{G}\wedge\left(\vec{u}\wedge A\vec{G}\right)\int_S dm + A\vec{G}\wedge\left(\vec{u}\wedge\left(\int_S G\vec{P}\,dm\right)\right) + \left(\int_S G\vec{P}\,dm\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge A\vec{G}\right) + \int_S G\vec{P}\wedge\left(\vec{u}\wedge G\vec{P}\right)dm \\
&= \left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(Gm)\right]\cdot\vec{u} + \vec{0} + \vec{0} + \left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}
\end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right] = \left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(G;m)\right] + \left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(s)\right]$$

Ainsi, la matrice d'inertie en A est la somme de la matrice d'inertie en G et de la matrice d'inertie en A du point G seul affecté de toute la masse m.

Application : rectangle (signification terme à terme)

VI AXES PRINCIPAUX D'INERTIE

VI.I Définitions

La matrice d'inertie $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$ du solide (S) au point A relativement à la base $\mathcal{B}$ est symétrique et donc diagonalisable. Elle admet trois vecteurs propres perpendiculaires deux à deux qui forment une base $\mathcal{B}_p$ dite principale. Ainsi, au point A et relativement à la base $\mathcal{B}_p$, la matrice d'inertie de (S) s'écrit :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}_p}(s)\right]=\begin{bmatrix}\mathrm{A_p} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{B_p} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{C_p}\end{bmatrix}$$

Remarques :

- $\mathrm{A_p}$, $\mathrm{B_p}$ et $\mathrm{C_p}$ sont appelés moments d'inertie principaux de (*S*) au point *A* ;
- le trièdre d'origine A dont les axes sont parallèles aux vecteurs propres est le trièdre principal d'inertie en A ;
- les axes principaux sont les axes tels que les produits d'inertie sont nuls ;
- le trièdre principal d'inertie en G, centre d'inertie du solide, est appelé trièdre central d'inertie.

VI.2 Recherche des axes principaux

VI.2.1 Valeurs propres

On recherche les valeurs propres de la matrice $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$. Ainsi λ est valeur propre de $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$ si :

$$\det\left(\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]-\lambda[I]\right)=0 \text{ où } [I]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

VI.2.2 Prise en compte des symétries

Un axe -par exemple l'axe $(A\vec{z})$- est principal d'inertie si :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{z}=\lambda\,\vec{z}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix}\mathrm{A} & -\mathrm{F} & -\mathrm{E}\\ -\mathrm{F} & \mathrm{B} & -\mathrm{D}\\ -\mathrm{E} & -\mathrm{D} & \mathrm{C}\end{bmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\\lambda\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{vmatrix}-\mathrm{E}=0\\-\mathrm{D}=0\\\mathrm{C}=\lambda\end{vmatrix}$$

Il faut donc que E et D soient nuls simultanément :

- premier cas : si (S) admet $(\vec{x}A\vec{y})$ comme plan de symétrie alors :

$$\mathrm{E}=\int_S x\,z\,dm=\int_{S1} x\,z\,dm+\int_{S2} x\,z\,dm=\int_{S1} x\,z\,dm+\int_{S1} x\,(-z)\,dm=0$$

  de même :

$$\mathrm{D}=\int_S y\,z\,dm=0$$

Théorème : si le solide admet un plan de symétrie, alors, en tout point de ce plan, l'axe perpendiculaire à ce plan est principal d'inertie ;

- second cas : si (S) admet $(\vec{y}A\vec{z})$ comme plan de symétrie, alors $\mathrm{E}=0$;
  si (S) admet $(\vec{x}A\vec{z})$ comme plan de symétrie, alors $\mathrm{D}=0$.

  ainsi, si $(A\vec{z})=(\vec{y}A\vec{z})\cap(\vec{x}A\vec{z})$ est axe de symétrie, $\mathrm{E}=\mathrm{D}=0$.

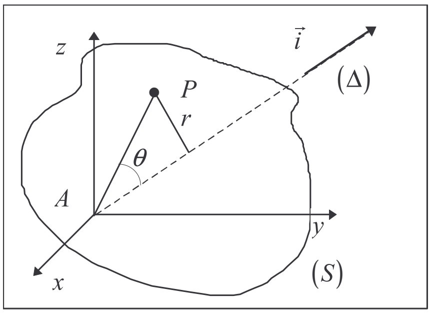
Théorème : si le solide admet un axe de symétrie, cet axe est principal d'inertie ;

Application : plaque plane sans épaisseur

VII MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UNE DROITE PASSANT PAR A

On suppose connue la matrice d'inertie $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$ du solide (S) en A et relativement à la base $\mathcal{B}$. Soit (Δ) un axe passant par A et de vecteur unitaire $\vec{i}$:

$$\left\|\vec{AP}\wedge\vec{i}\right\|=|AP|\sin\theta=r$$



Le moment d'inertie $\mathrm{I}_{\Delta}(s)$ du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) est :

$$\mathrm{I}_{\Delta}(s)=\int_S r^2\,dm=\int_S\left(\vec{AP}\wedge\vec{i}\right)\cdot\left(\vec{AP}\wedge\vec{i}\right)dm$$

d'où :

$$\mathrm{I}_{\Delta}(s)=\int_S\left(\vec{AP}\wedge\vec{i},\vec{AP},\vec{i}\right)dm=\int_S\left(\vec{i},\vec{AP}\wedge\vec{i},\vec{AP}\right)dm=\vec{i}\cdot\int_S\vec{AP}\wedge\left(\vec{i}\wedge\vec{AP}\right)dm$$

Finalement :

$$\mathrm{I}_{\Delta}(s)=\vec{i}\cdot\left(\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{i}\right)$$