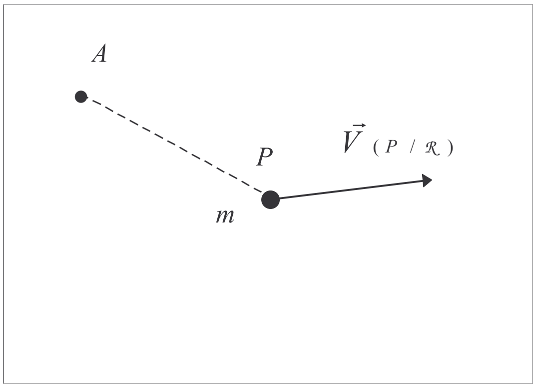
TORSEUR CINETIQUE

C'est le torseur dont la résultante est le vecteur quantité de mouvement.

I DEFINITION POUR UN POINT MATERIEL



On appelle quantité de mouvement du point P dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ la quantité :

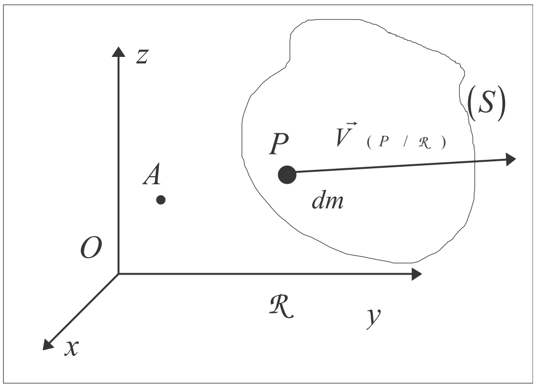
$$\vec{R}_c = m \ \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} \qquad [M][L][T]^{-1}$$

On appelle moment cinétique en un point A du point P dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ la quantité :

$$\vec{\sigma}_{A(P/\mathcal{R})} = \vec{AP} \wedge m \ \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} \qquad [M][L]^2[T]^{-1}$$

II DEFINITION DU TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Au point courant P on associe la masse élémentaire dm.



Le torseur cinétique associé à l'ensemble des quantités de mouvement de chaque point du solide a pour éléments de réduction en A :

$$\left[\mathcal{C}i_{(S/\mathcal{R})}\right]=\left[\vec{R}_{c(S/\mathcal{R})} \;=\; \int_S \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}dm \qquad \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}=\int_S \vec{AP}\wedge\vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\,dm\right]_A$$

où :

- $\vec{R}_{c(S/\mathcal{R})}$ est la résultante cinétique,
- $\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}$ est le moment cinétique au point A.

Ces quantités sont liées par la relation classique de changement de point du champ des moments d'un torseur. Soit :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}=\vec{\sigma}_{B(S/\mathcal{R})}+\vec{AB}\wedge\vec{R}_{c(S/\mathcal{R})}$$

III EXPRESSION DE LA RESULTANTE CINETIQUE

On a :

$$m\,\vec{OG}=\int_S \vec{OP}\,dm$$

o˘ désigne G le centre d'inertie du solide (S) et m sa masse. En dérivant par rapport au temps dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$m\left(\frac{d}{dt}\vec{OG}\right)_{\mathcal{R}}=\int_S\left(\frac{d}{dt}\vec{OP}\right)_{\mathcal{R}}dm$$

$$m\,\vec{V}_{(G/\mathcal{R})} \;=\; \int_S \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\,dm$$

Finalement :

$$\vec{R}_{c(S/\mathcal{R})} \;=\; m\;\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

La résultante cinétique est la quantité de mouvement du centre d'inertie G affecté de la masse totale m.

IV EXPRESSION DU MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE RIGIDE

Soit un point A du solide (S). On a :

$$\vec{V}_{(P\in S/\mathcal{R})}=\vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})}+\vec{PA}\wedge\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Ainsi le moment cinétique devient :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} \;=\; \int_S \vec{AP}\wedge\vec{V}_{(P/\mathcal{R})}dm \;=\; \int_S \vec{AP}\wedge\vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})}dm+\int_S \vec{AP}\wedge\left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\wedge\vec{AP}\right)dm$$

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} \;=\; \int_S \vec{AP}\,dm\wedge\vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})}+\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(S)\right]\cdot\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \;=\; m\,\vec{AG}\wedge\vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})}+\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(S)\right]\cdot\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Finalement :

$$A \in S \qquad \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(S)\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + A\vec{G} \wedge m\vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}$$

Cas particuliers où le second terme s'annule:

- si A est un point fixe du solide (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, le moment cinétique en A s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(S)\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

- si A est le centre d'inertie G, le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{G(S/\mathcal{R})} = \left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(S)\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Si A n'est pas un point du solide (S), on applique la relation de changement de point vers un point où le moment cinétique a une expression simple, par exemple G :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \vec{\sigma}_{G(S/\mathcal{R})} + A\vec{G} \wedge \vec{R}_{c(S/\mathcal{R})}$$

Ce qui donne (Théorème de Koenig) :

$$\forall A \qquad \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(S)\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + A\vec{G} \wedge m\ \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

V APPLICATION : BARRE EN ROTATION