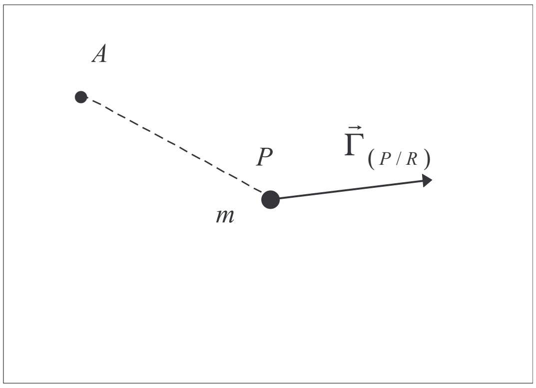
TORSEUR DYNAMIQUE

C'est le torseur dont la résultante est le vecteur quantité d'accélération.

I DEFINITION POUR UN POINT MATERIEL



On appelle quantité d'accélération du point P dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ la quantité :

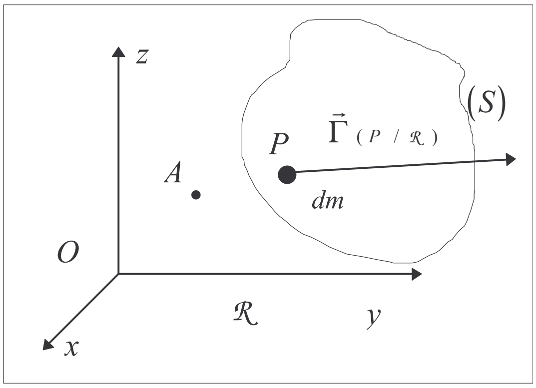
$$\vec{R}_d = m \; \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})} \qquad [M][L][T]^{-2}$$

On appelle moment dynamique en un point A du point M dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ la quantité :

$$\vec{\delta}_{A(P/\mathcal{R})} = \vec{AP} \wedge m\,\vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})} \qquad [M][L]^2[T]^{-2}$$

II DEFINITION DU TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Au point courant P on associe la masse élémentaire dm.



Le torseur dynamique associé à l'ensemble des quantités d'accélération de chaque point du solide a pour éléments de réduction en A :

$$\left[\mathcal{D}_{(S/\mathcal{R})}\right] = \left[\quad \vec{R}_{d\,(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm \qquad \vec{\delta}_{A\,(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm \right]_A$$

où :

- $\vec{R}_{d\,(S/\mathcal{R})}$ est la résultante dynamique,
- $\vec{\delta}_{A\,(S/\mathcal{R})}$ est le moment dynamique au point A.

Ces quantités sont liées par la relation classique de changement de point du champ des moment d'un torseur. Soit :

$$\vec{\delta}_{A\,(S/\mathcal{R})} = \vec{\delta}_{B\,(S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{d\,(S/\mathcal{R})}$$

III EXPRESSION DE LA RESULTANTE DYNAMIQUE

On a d'après la définition du centre d'inertie :

$$m\,\vec{OG} = \int_S \vec{OP}\, dm$$

où G désigne le centre d'inertie du solide (S) et m sa masse. En dérivant deux fois par rapport au temps dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{OG}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{OP}\right)_{\mathcal{R}} dm$$

$$m\,\vec{\Gamma}_{(G/\mathcal{R})} = \int_S \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

Finalement :

$$\vec{R}_{d\,(S/\mathcal{R})} = m \quad \vec{\Gamma}_{(G/\mathcal{R})}$$

La résultante dynamique est la quantité d'accélération du centre d'inertie G affecté de la masse totale m.

IV EXPRESSION DU MOMENT DYNAMIQUE D'UN SOLIDE RIGIDE

Soit un point A n'appartenant pas nécessairement au solide (S). Le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{A\,(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

En dérivant par rapport à t dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A\,(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \left(\frac{d}{dt}\vec{AP}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm + \int_S \vec{AP} \wedge \left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} dm$$

Or :

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{AP}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}\vec{OP}\right)_{\mathcal{R}} - \left(\frac{d}{dt}\vec{OA}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R})}$$

D'où :

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \left(\vec{V}_{(P/\mathcal{R})} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R})}\right) \wedge \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm + \int_S \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

On fait ainsi apparaître le moment dynamique $\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})}$:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} = -\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \int_S \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm + \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})}$$

Finalement :

$$\forall A \qquad \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} + m\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

Cas particuliers où le second terme s'annule: :

- si A est un point fixe de $\mathcal{R}$, ou si $\vec{V}_{(A/\mathcal{R})}$ est colinéaire à $\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$, le moment dynamique en A s'écrit :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}}$$

- si A est le centre d'inertie G de (S), le moment dynamique s'écrit :

$$\vec{\delta}_{G(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{G(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}}$$

- on peut également appliquer la relation :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \vec{\delta}_{G(S/\mathcal{R})} + \vec{AG} \wedge m\vec{\Gamma}_{(G/\mathcal{R})}$$

V APPLICATION : BOSSE DE BERCY