Principe fondamental de la dynamique - Théorèmes généraux

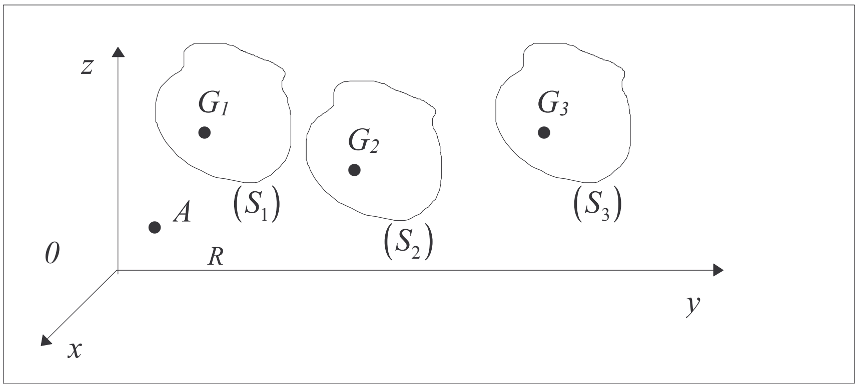
I DEFINITIONS - RAPPELS

I.1 Ensemble matériel

C'est un ensemble constitué par plusieurs solides (rigides ou non) pouvant présenter des liaisons entre eux.

I.2 Torseurs cinétique et dynamique d'un ensemble matériel

Soit Σ un ensemble de solides S_i de centres de gravité et de masses respectifs G_i et m_i en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ de centre O.



On a :

$$m(\Sigma) = \sum_i m_i$$

Le centre d'inertie de l'ensemble Σ est le point G défini par :

$$m(\Sigma)\vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OG_i}$$

d'où, en dérivant par rapport au temps dans le repère $\mathcal{R}$:

$$m(\Sigma)\vec{V}(G/\mathcal{R}) = \sum_i m_i \vec{V}(G_i/\mathcal{R})$$

et :

$$m(\Sigma)\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}) = \sum_i m_i \vec{\Gamma}(G_i/\mathcal{R})$$

De même, le moment cinétique en un point A de l'ensemble Σ est :

$$\vec{\sigma}_{A(\Sigma/\mathcal{R})} = \int_{\Sigma} \vec{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} dm = \sum_{i} \int_{S_i} \vec{AM} \wedge \vec{V}_{(M/\mathcal{R})} dm$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_{A(\Sigma/\mathcal{R})} = \sum_{i} \vec{\sigma}_{A(S_i/\mathcal{R})}$$

Finalement, en termes de torseurs cinétique et dynamique :

$$\left[\mathcal{C}i_{(\Sigma/\mathcal{R})}\right]_A = \sum_i \left[\mathcal{C}i_{(s_i/\mathcal{R})}\right]_A$$

et :

$$\left[\mathcal{D}_{(\Sigma/\mathcal{R})}\right]_A = \sum_i \left[\mathcal{D}_{(s_i/\mathcal{R})}\right]_A$$

II ENONCE DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Il existe au moins un repère - appelé repère galiléen (ou absolu) - et une chronologie - appelée chronologie absolue - tel que, pour tout ensemble matériel Σ (de solides rigides ou non), le torseur dynamique est égal au torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur l'ensemble matériel.

$$\left[\mathcal{D}_{(\Sigma/\mathcal{R})}\right] = \left[F_{ext/\Sigma}\right]$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_{d(\Sigma/\mathcal{R})} & \vec{\delta}_{A(\Sigma/\mathcal{R})} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \vec{R}_{[F_{ext/\Sigma}]} & \vec{M}_{A[F_{ext/\Sigma}]} \end{bmatrix}_A$$

Remarque :

- les torseurs sont écrits au même point ;
- le cadre de la mécanique classique implique l'invariabilité de la masse d'un système au cours du temps ;
- le repère galiléen est, en principe, celui de Copernic ; en pratique, tout repère lié à la terre est suffisant pour la plupart des problèmes considérés dans ce cours ;
- dans ce cours, on rappelle que l'on ne s'intéresse qu'aux solides rigides ; la résultante dynamique se calcule alors grâce aux formules énoncées dans le chapitre précédent ;
- on rappelle que la notion d'effort extérieur dépend de l'ensemble considéré.

III CONSEQUENCES : THEOREMES GENERAUX

L'égalité du torseur dynamique et du torseur des efforts extérieurs entraîne :

- l'égalité des résultantes : c'est le théorème de la résultante dynamique ou théorème du centre de gravité,
- l'égalité des moments en un point A : c'est le théorème du moment dynamique.

III.1 Théorème du centre de gravité

Théorème : la résultante générale du torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur un ensemble matériel Σ est égale à la résultante dynamique de l'ensemble Σ :

$$\vec{R}_{d\,(\Sigma / \mathcal{R})} = \vec{R}_{[F_{ext/\Sigma}]}$$

On obtient :

- 3 équations scalaires dans le cas général,
- 2 équations scalaires pour un problème plan.

III.2 Théorème du moment dynamique

Théorème : le moment en un point A du torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur un ensemble matériel A est égal au moment dynamique :

$$\vec{\delta}_{A\,(\Sigma / \mathcal{R})} = \vec{M}_{A[F_{ext/\Sigma}]}$$

On obtient :

- 3 équations scalaires dans le cas général,
- 1 équation scalaire pour un problème plan.

Cas particulier :

$$\text{si } \begin{cases} \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} = \vec{0} \text{ ou} \\ A \equiv G \text{ ou} \\ \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} // \vec{V}_{(G/\mathcal{R})} \end{cases} \quad \text{alors comme } m\,\vec{V}_{A/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{G/\mathcal{R}} = \vec{0} \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\sigma}_{A\,(\Sigma/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_{A[F_{ext/\Sigma}]}$$

Cette restriction est appelée parfois "théorème du moment cinétique".

III.3 Cas de la statique

Dans le cas de la statique, tous les points de Σ sont fixes par rapport à $\mathcal{R}$. On a :

$$\forall P, \vec{V}_{(P \in \Sigma / \mathcal{R})} = \vec{0}$$

Le principe fondamental de la statique s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R}_{[F_{ext/\Sigma}]} & \vec{M}_{A[F_{ext/\Sigma}]} \end{bmatrix}_A$$

Ainsi présentée, la statique, étudiée précédemment, est un cas particulier de la dynamique.

IV THEOREME DE L'ACTION ET DE LA REACTION

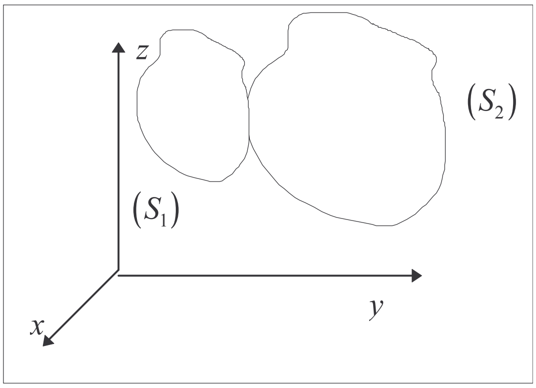
Soient deux ensembles matériels S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}$.

Soient :

- $[F_{1/2}]$ le torseur des actions de S_1 sur S_2,
- $[F_{2/1}]$ le torseur des actions de S_2 sur S_1.

Soient :

- $[\mathcal{D}(1/\mathcal{R})]$ le torseur dynamique du mouvement de S_1 par rapport à $\mathcal{R}$,
- $[\mathcal{D}(2/\mathcal{R})]$ le torseur dynamique du mouvement de S_2 par rapport à $\mathcal{R}$,



On applique le PFD au solide (1) : parmi les forces extérieures à 1, on distingue :

- les actions sur 1 de la part de 2.
- les actions sur 1 qui sont extérieures à 1 et à 2.

On a :

$$\left[\mathcal{D}(1/\mathcal{R})\right]=\left[F_{2/1}\right]+\left[F_{\text{ext à 1 et }2/1}\right]$$

On applique de façon similaire le PFD au solide (2) :

$$\left[\mathcal{D}(2/\mathcal{R})\right]=\left[F_{1/2}\right]+\left[F_{\text{ext à 1 et }2/2}\right]$$

On applique le PFD à l'ensemble (1+2) :

$$\left[\mathcal{D}(1+2/\mathcal{R})\right]=\left[F_{\text{ext à 1 et }2/(1+2)}\right]$$

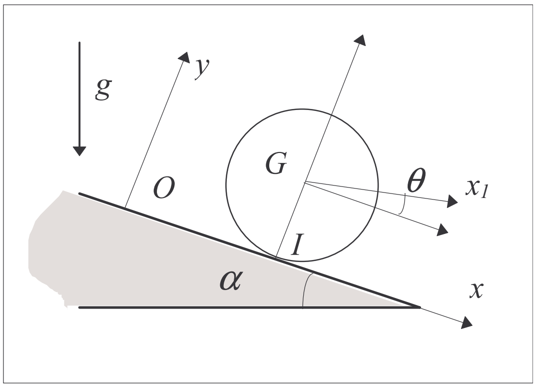
On obtient par différence :

$$\left[F_{1/2}\right]+\left[F_{2/1}\right]=\left[0\right]$$

Théorème : le torseur des actions d'un ensemble S_1 sur un ensemble S_2 est l'opposé du torseur des actions de S_2 sur S_1.

V APPLICATIONS

V.1 Cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné



V.2 Pendule double