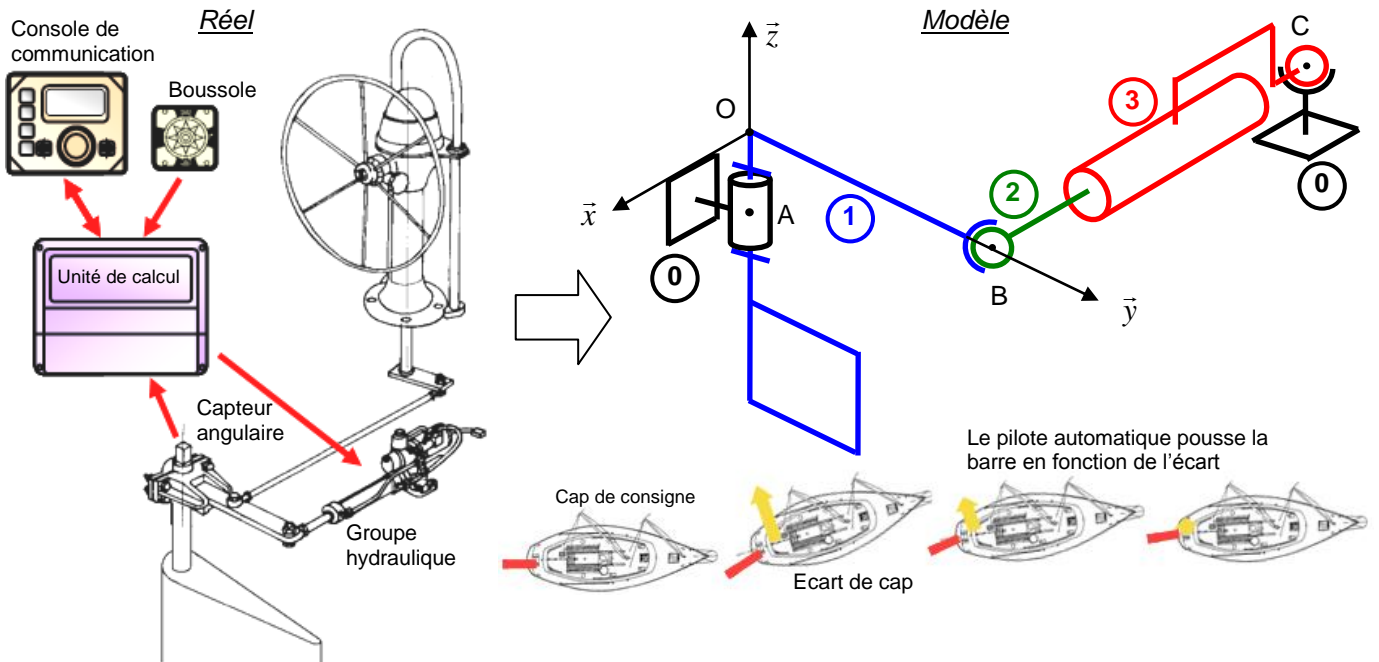

Principe Fondamental de la Statique

Notion de système matériel



On s'intéresse à un pilote automatique de voilier qui permet d'ajuster automatiquement le cap d'un bateau sans l'intervention du marin. L'ensemble gouvernail barre franche, repéré 1, est en liaison pivot d'axe (Az) par rapport au voilier repéré 0. Lorsque le pilotage est automatique, l'ensemble gouvernail barre franche est actionné par un vérin linéaire repéré (2+3).

Pilote automatique de voilier

1. Schéma d'architecture et graphe de structure

Le schéma cinématique minimal utilisé jusqu'à présent en cinématique et que l'on construit en parallèle d'un graphe des liaisons, est un outil qui permet de visualiser les mouvements relatifs des différentes classes d'équivalence cinématique d'un mécanisme et ne tient pas compte de l'agencement des composants technologiques utilisés pour réaliser les différentes liaisons.

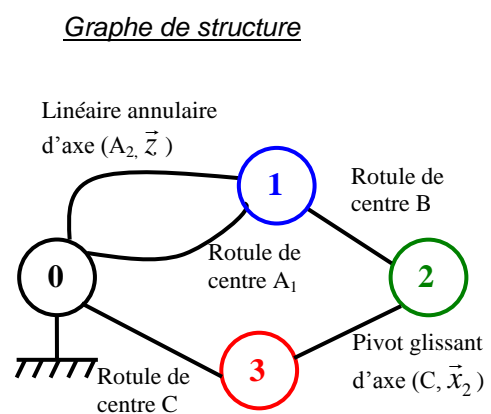
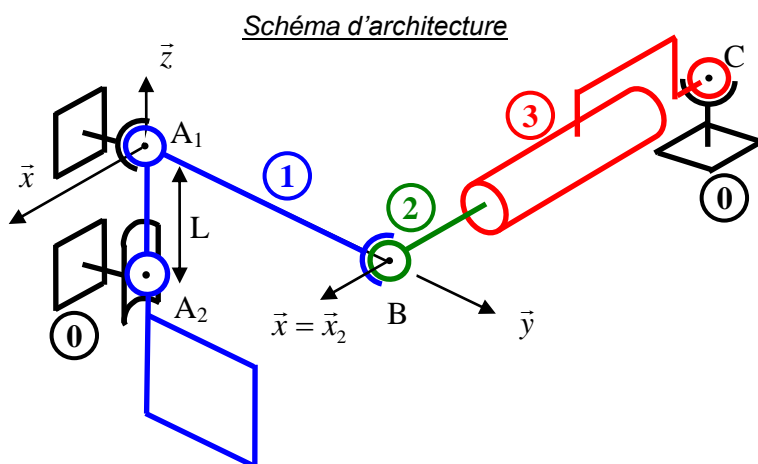
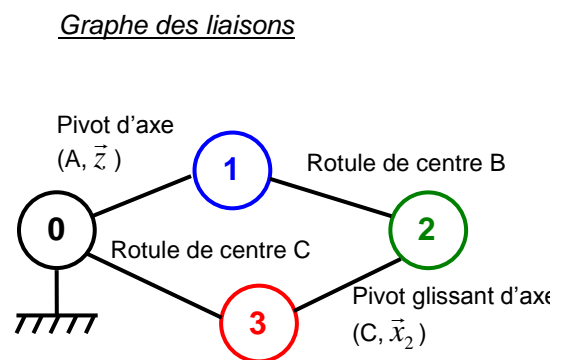
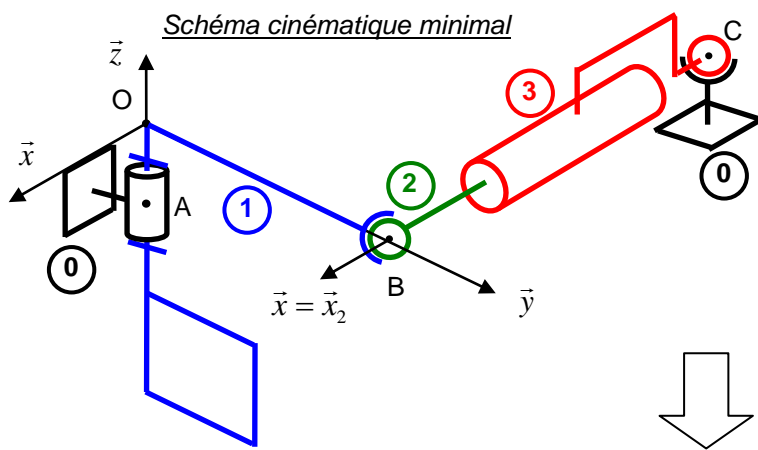
Un des objectifs des problèmes de statique étant de dimensionner les composants technologiques constituant les liaisons, l'outil schéma cinématique n'est pas adapté pour ces problèmes. On utilise alors le schéma d'architecture qui tient compte des composants technologiques qui composent les liaisons. Il est construit en parallèle d'un graphe de structure.



La modélisation cinématique (schéma cinématique) et architecturale (schéma architectural) d'un système mécanique est abordée dans le cours de technologie. Pour le cours de mécanique, ces schémas sont donnés.

Exemple du pilote automatique de bateau :

La liaison pivot d'axe (A, \vec{z}) entre l'ensemble gouvernail - barre franche (1) et la coque du voilier (0) est un modèle adapté pour une étude cinématique. Il traduit le mouvement de 1/0 observé sur le système réel. L'étude statique s'intéresse au guidage en rotation, c'est-à-dire aux surfaces en contact permettant de réaliser physiquement cette liaison. En l'occurrence ici, la liaison est réalisée par deux roulements à billes à contact radial éloignés d'une distance L . Le modèle retenu est celui d'une liaison rotule de centre A_1 et d'une liaison linéaire annulaire en A_2 d'axe (A_2z), ce qui permettra de déterminer les actions mécaniques sur chacun des roulements. Le passage du réel au modèle architectural est abordé dans le cours de technologie.



2. Isolement d'un système matériel et bilan d'actions mécaniques

L'isolement consiste à définir une frontière fictive qui englobe tout le système isolé E que l'on cherche à étudier. Cette frontière fictive permet d'identifier un milieu intérieur au système isolé et un milieu extérieur \bar{E} au système isolé.



Le système matériel isolé E peut être un solide, une portion de solide, un ensemble de solides, le mécanisme entier, ...

Nous avons vu dans le cours de modélisation des actions mécaniques que la notion d'action mécanique n'a de sens que si l'on a clairement identifié le solide ou le système sur lequel est appliquée cette action.



Toute démarche de résolution d'un problème de statique commence par la recherche d'un isolement.

Le bilan des actions mécaniques consiste alors à répertorier toutes les actions mécaniques qui sont susceptibles d'intervenir dans le problème.



Les actions mécaniques extérieures correspondent à toutes les actions mécaniques exercées par le milieu extérieur (solide, fluide, ressort, pesanteur, ...) et qui agissent SUR un élément du système isolé.

Les actions mécaniques intérieures correspondent à toutes les actions mécaniques exercées par un élément (solide, fluide, ressort, ...) appartenant au système isolé et qui agit SUR un élément du système isolé.



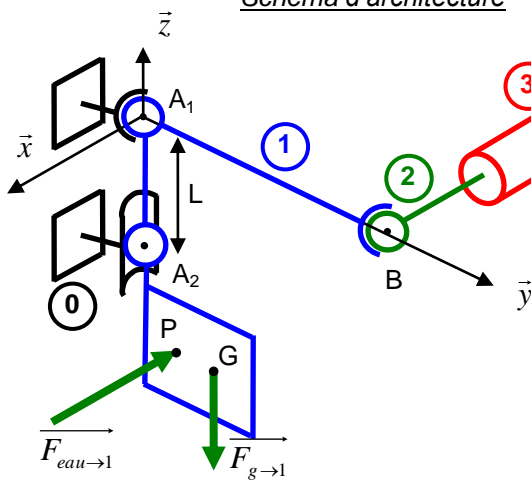
Les actions mécaniques intérieures ne sont jamais prises en compte lors de l'écriture du principe fondamental de la statique.



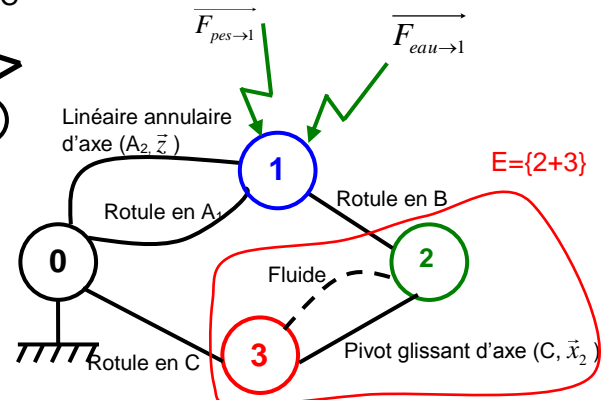
On peut s'aider du graphe d'analyse pour effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures à un système. Le graphe d'analyse correspond au graphe de structure auquel on ajoute toutes les actions mécaniques extérieures.

Exemple du pilote automatique de bateau :

Schéma d'architecture



Graphe d'analyse



On réalise dans un 1^{er} temps le bilan complet des actions mécaniques agissant sur le pilote automatique. On ajoute ces données sur le graphe d'analyse et éventuellement sur le schéma d'architecture :

- L'eau exerce une action mécanique sur le gouvernail modélisée globalement par une force $\vec{F}_{eau \rightarrow 1} = -F \cdot \vec{x}$ en P.
- Le fluide exerce une action mécanique sur le corps du vérin 3 ainsi que sur la tige du vérin 2, on la note en utilisant un train pointillé et en indiquant fluide sur le graphe d'analyse.
- L'action mécanique de la pesanteur \vec{g} agit seulement sur l'ensemble (1) (et le bâti). L'hypothèse est faite ici d'une action de pesanteur négligeable sur les solides 2 et 3.

On peut ensuite décider d'isoler par exemple le système matériel $E = \{2+3\}$ et on entoure sur le graphe d'analyse cet ensemble $\{2+3\}$:

- L'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 (liaison rotule de centre B), l'action mécanique du solide 0 sur le solide 3 (liaison rotule de centre C) sont les actions mécaniques extérieures agissant sur l'ensemble E.
- L'action mécanique du fluide et l'action mécanique du solide 2 sur le solide 3 (pivot glissant d'axe Cx_2) sont les actions mécaniques intérieures de E.



Un autre outil très efficace pour traduire l'isolement d'un solide et le bilan des actions mécaniques extérieures est l'outil de représentation. Il est conseillé lorsque cela est possible de représenter le système isolé et de représenter sur la figure les actions extérieures.

Nous verrons que dans le cas d'un problème plan, cette représentation sera systématique

Le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

1. Notion d'équilibre

Le principe fondamental de la statique s'applique à des systèmes matériels en équilibre par rapport à un repère galiléen (repère lié à la terre).

Référentiel Galiléen : Un référentiel Galiléen est l'association d'un repère géométrique et d'un repère temporel pour lequel le Principe Fondamental de la Statique est vérifié. On considère Galiléen :

- ✓ Tout repère fixe (i.e. sans mouvement) par rapport à la Terre.
- ✓ Tout repère en mouvement de translation rectiligne (i.e. sa trajectoire est une droite) uniforme (sa vitesse est constante) par rapport à la terre.

Equilibre d'un système matériel : Un système E est en équilibre dans un référentiel Galiléen si, au cours du temps, chaque point de E conserve la même position par rapport au repère géométrique du référentiel.

2. Enoncé du PFS

Pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un repère galiléen, il faut que la somme des actions mécaniques extérieures à E soit nulle.

Etant donnée la modélisation des actions mécaniques, le PFS nous donne donc deux équations vectorielles :

- ✓ Le théorème de la résultante statique : $\sum \overrightarrow{F_{E \rightarrow E}} = \vec{0}$
- ✓ Le théorème du moment statique : $\sum \overrightarrow{M_{A \rightarrow E}} = \vec{0}$,quel que soit le point A.



On peut également traduire ces deux égalités vectorielles à l'aide de l'outil torseur :

$$\sum \{\mathfrak{S}_{E \rightarrow E}\} = \{0\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum \overrightarrow{F_{E \rightarrow E}} \\ \sum \overrightarrow{M_{A \rightarrow E}}_A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{où A est un point quelconque}$$



Lorsque l'on somme des torseurs ces derniers doivent tous être écrits au même point.



La condition $\sum \{\mathfrak{S}_{E \rightarrow E}\} = \{0\}$ est une condition nécessaire mais pas suffisante à l'équilibre du système.



Exemple du pilote automatique :

Ecriture du théorème de la résultante statique et du moment statique au point A₁ sur l'ensemble E={1}.

Théorème de la résultante statique :

$$\overrightarrow{F_{eau \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{Rotule0 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{LA0 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{g \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = \vec{0}$$

Théorème du moment statique au point A₁ :

$$M_{A_1(\overrightarrow{F_{eau \rightarrow 1}})} + M_{A_1(\overrightarrow{F_{Rotule0 \rightarrow 1}})} + M_{A_1(\overrightarrow{F_{LA0 \rightarrow 1}})} + M_{A_1(\overrightarrow{F_{g \rightarrow 1}})} + M_{A_1(\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}})} = \vec{0}$$



Le théorème de la résultante statique et le théorème du moment statique sont ensuite projetés sur les 3 axes d'une même base, ce qui conduit à 6 équations scalaires dans le cas d'un problème spatial.

Cas d'un problème plan



Dans le cas d'un problème plan, on obtient 3 équations scalaires, 2 équations d'efforts et une seule équation de moments.

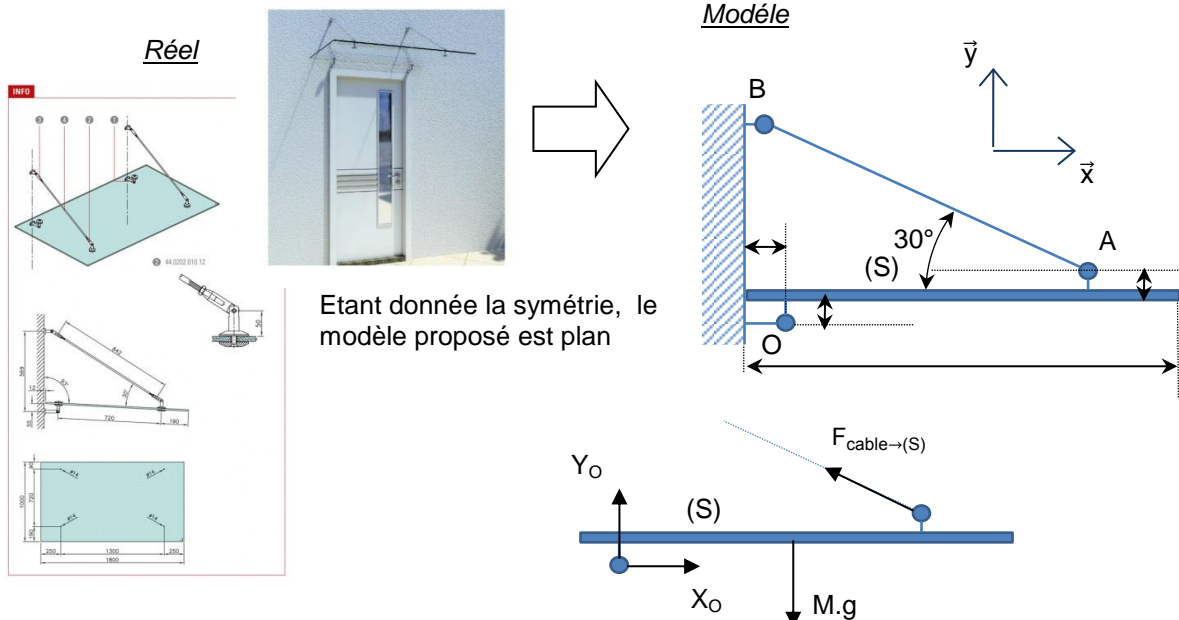
$$\checkmark \quad \sum \vec{F}_{E \rightarrow E} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{E \rightarrow E} \cdot \vec{x} = 0 \\ \sum \vec{F}_{E \rightarrow E} \cdot \vec{y} = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad \sum \vec{M}_{A \rightarrow E} = \vec{0} \rightarrow \sum \vec{M}_{A \rightarrow E} \cdot \vec{z} = 0$$



Le calcul des moments par rapport à un point peut souvent s'appuyer sur la définition utilisant la force multipliée par le bras de levier que l'on peut visualiser sur la représentation du système isolé.

Exemple : auvent articulé



Etant donnée la symétrie, le modèle proposé est plan

Sur l'exemple de l'auvent, le modèle proposé est plan avec l'hypothèse d'un système symétrique. La représentation des efforts appliqués sur l'auvent (S) est aisée dans le plan xy.



La représentation des efforts se doit d'être cohérente et doit faciliter la résolution. Ici, la convention adoptée (qui n'est pas normalisée donc qui peut varier suivant les personnes) est

- de représenter des composantes de forces lorsque la force est inconnue (ici X_0 et Y_0)
- de représenter les efforts orientés lorsque leur sens et leur direction sont connus (ici, la force de pesanteur appliquée en G et dirigée verticalement vers le bas, Mg étant sa norme et la force du câble dirigée suivant le câble et de norme inconnue notée $F_{\text{cable} \rightarrow (S)}$)

3. Principe des actions réciproques

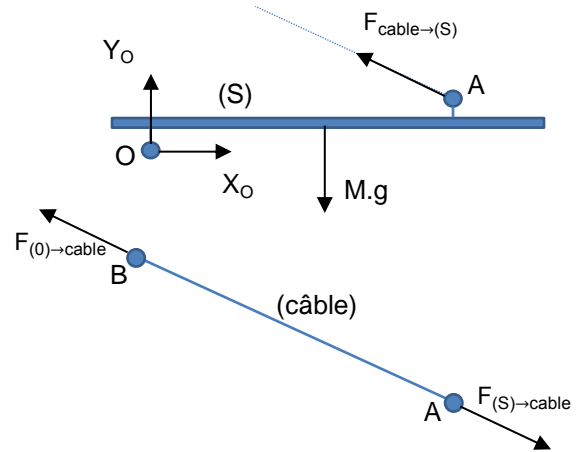
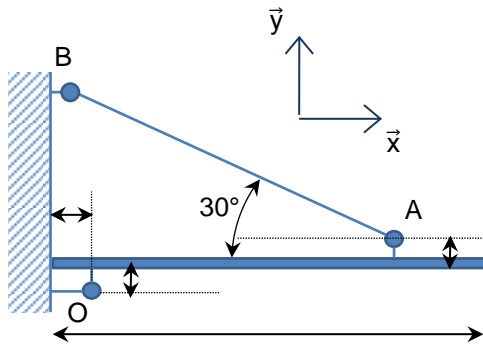
Tout système matériel (1) exerçant une force sur un autre système matériel (2) subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le système matériel (2).

$$\vec{F}_{(1) \rightarrow (2)} = -\vec{F}_{(2) \rightarrow (1)}$$

Généralisation : Si un système matériel (1) exerce une action mécanique sur un autre système matériel (2), alors le système (2) exerce sur (1) une action mécanique opposée.

$$\{\mathcal{S}_{E_1 \rightarrow E_2}\} = -\{\mathcal{S}_{E_2 \rightarrow E_1}\}$$

Exemple : auvent articulé



Sur l'exemple de l'auvent, l'effort du câble sur (S) au point A $\vec{F}_{cable \to (S)}$ s'oppose à l'effort de (S) sur le câble $\vec{F}_{(S) \to cable}$.

4. Cas particuliers importants

4-1 Solides soumis à deux forces

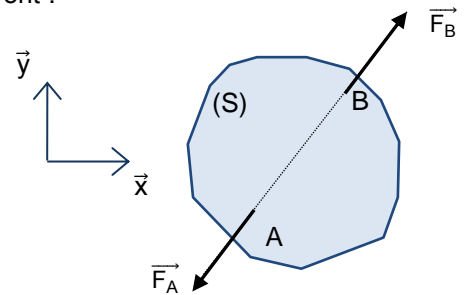
Si un solide en équilibre est soumis à l'action de deux forces, ces forces ont :

- même intensité
- même direction
- elles sont de sens opposés

Démonstration

Dans le cas d'un solide (S) soumis à deux forces appliquées en A et en B, le PFS donne :

$$\begin{cases} \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_{A(\vec{F}_A)} + \vec{M}_{A(\vec{F}_B)} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_A = -\vec{F}_B \\ \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0} \end{cases}$$



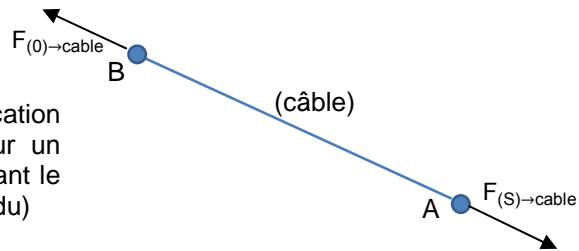
On déduit que l'effort \vec{F}_B est colinéaire à \vec{AB} et que \vec{F}_A et \vec{F}_B sont deux forces opposées.

Exemple de l'auvent : le câble supposé de masse négligeable est soumis à deux forces. Ces deux forces sont donc de même norme et de sens opposé.

$$F_{(0) \to cable} = F_{(S) \to cable}$$

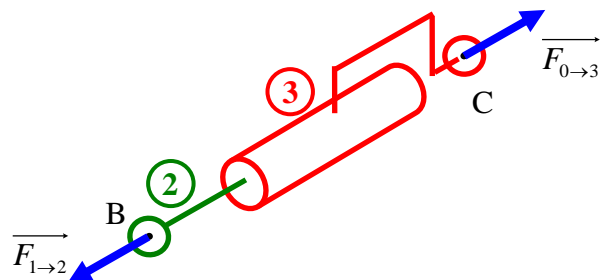


Dans les problèmes abordés, sauf indication contraire, l'effort exercé par un câble sur un solide (S) aura une direction connue (suivant le câble) et un sens connu (le câble étant tendu)



Exemple du pilote automatique : L'ensemble 2+3 est soumis à 2 forces, ces deux forces ont donc même norme et sont directement opposées.

On suppose également ici que l'on néglige l'action de la pesanteur sur l'ensemble {2+3}.



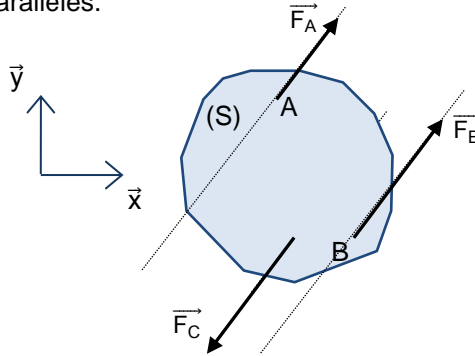
4-2 Solides soumis à trois forces

Dans le cas d'un solide soumis à trois forces appliquées en A, B et en C, le PFS donne :

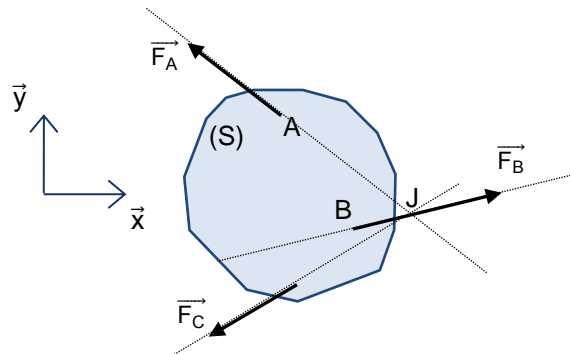
$$\begin{cases} \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_{J(\vec{F}_A)} + \vec{M}_{J(\vec{F}_B)} + \vec{M}_{J(\vec{F}_C)} = \vec{0} \end{cases}$$

La première équation implique que les trois forces sont coplanaires.

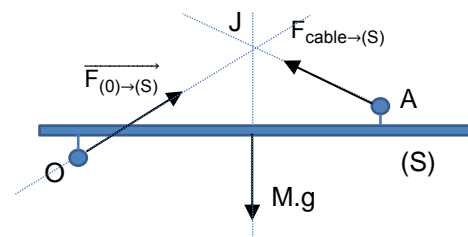
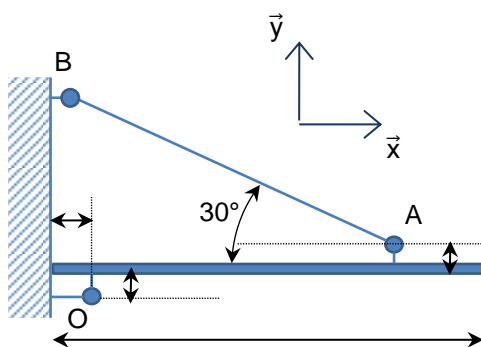
Cas n°1 : si deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B sont de même direction, alors la force \vec{F}_C est également de même direction. Les trois forces \vec{F}_A , \vec{F}_B et \vec{F}_C sont alors parallèles.



Cas n°2 : si les forces ne sont pas parallèles, il existe un point J intersection des deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B . L'équation de moment en J implique alors que la force \vec{F}_C passe également par le point J. Les trois forces \vec{F}_A , \vec{F}_B et \vec{F}_C sont concourantes en un même point J.



Exemple : auvent articulé



En isolant l'auvent (S), on constate qu'il est soumis à trois forces. On en déduit que ces trois forces sont concourantes au point J ce qui nous donne la direction de $\vec{F}_{(0) \rightarrow (S)}$.



Les propriétés mises en évidence sur les cas particuliers de solides (ou ensembles de solides) soumis à deux forces ou à trois forces sont largement exploitées dans le chapitre suivant et qui concerne la statique graphique.

Résolution d'un problème de statique par l'outil graphique

1. Problèmes plans

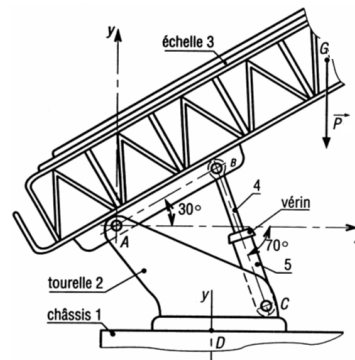
Un problème de statique est qualifié de problème plan si le système étudié est uniquement sous l'effet d'actions mécaniques dont les résultantes sont coplanaires et les moments éventuels perpendiculaires à ce plan.

Ces conditions imposent une symétrie matérielle du système par rapport au plan considéré.



Tous les problèmes plans ne peuvent pas être traités graphiquement. Seuls les systèmes soumis à 2 forces ou à 3 forces sont abordés dans ce cours. Etant donné les outils numériques actuels, le principal intérêt pour l'ingénieur de cette approche graphique est de sentir « physiquement comment sont répartis les efforts sur le système étudié ».

Exemple : déploiement d'une échelle de pompier



Le déploiement de l'échelle (3) s'effectue à partir d'un vérin (4) et (5) articulé sur la tourelle (2). Pour l'étude de l'effort du vérin sur l'échelle, en supposant que la charge soit dans le plan de symétrie de l'échelle Axy , la force du vérin ainsi que la force de pesanteur sont situées dans ce plan. Le problème peut donc être considéré comme un problème plan.

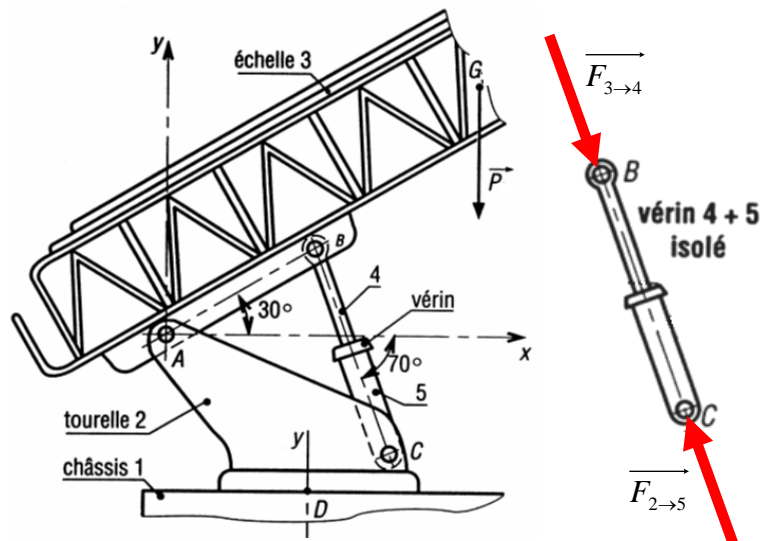
2. Cas des systèmes soumis à 2 forces

Si un système matériel en équilibre subit l'action unique de 2 glisseurs alors ces 2 glisseurs ont même norme et sont directement opposés.

Exemple de l'échelle de pompier

On isole l'ensemble $E=\{4+5\}$ et on effectue le Bilan des actions mécaniques extérieures.

On constate que l'ensemble est soumis à 2 forces en B et C \rightarrow ces 2 forces ont donc même norme et sont directement opposées.



3. Cas des systèmes soumis à 3 forces

Si un système matériel en équilibre subit l'action unique de 3 forces alors les résultantes des 3 forces sont :

- coplanaires,
- concourantes ou parallèles
- de somme vectorielle nulle



On se limite au cas de forces non parallèles. Dans le cas de forces //, une résolution analytique dans le plan conduit directement au résultat.

Méthode de construction pour la résolution graphique de ce type de problème

Etape 1 : On doit connaître au minimum une force + une direction d'une autre force.

Etape 2 : On définit le point J intersection des deux directions connues.

Etape 3 : On construit la troisième direction qui passe par le point J et le point d'application de la troisième force.

Etape 4 : On réalise la somme vectorielle à partir de la force connue sur une construction dont on a défini l'échelle appelée triangle des forces.

Exemple de l'échelle de pompier. : On isole le solide 3 et on effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures.. On constate que le solide (3) est soumis à 3 forces non parallèles :

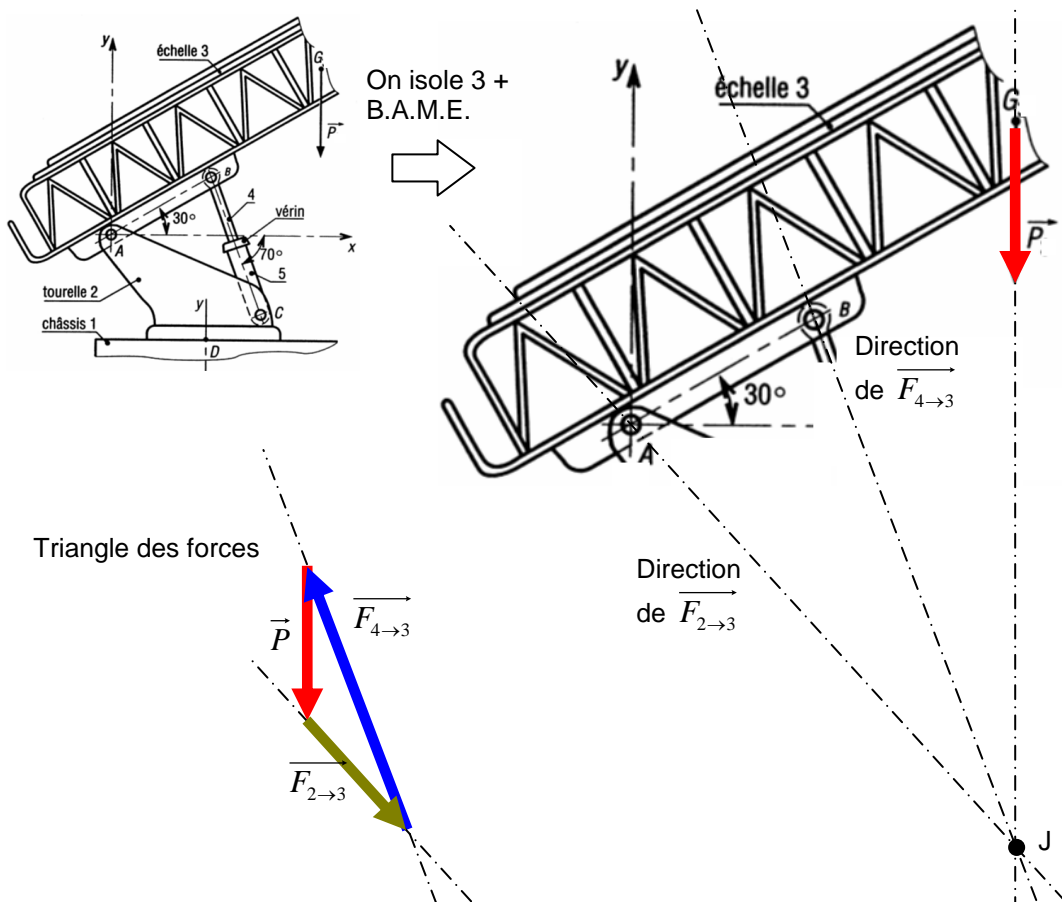
- La force de la pesanteur appliquée en G verticale vers le bas
- La force du solide 4 dont la direction est connue (voir chapitre précédent)
- L'action du solide 2 au niveau de l'articulation.

Etape 1 : On connaît \vec{P} + la direction de $\vec{F}_{4 \rightarrow 3}$.

Etape 2 : On définit le point J intersection des directions de \vec{P} et de $\vec{F}_{4 \rightarrow 3}$.

Etape 3 : On construit la troisième direction qui passe par le point J et le point A.

Etape 4 : On réalise la somme vectorielle sur le triangle des forces. On en déduit $\vec{F}_{4 \rightarrow 3}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$.



4. Méthode générale pour la résolution graphique des problèmes de statique

Etape 1 : On réalise un graphe de structure.

Etape 2 : On réalise un bilan complet des actions mécaniques et on complète le graphe de structure (qui devient un graphe d'analyse). On ajoute éventuellement ces actions mécaniques sur le schéma d'architecture.

Etape 3 : On élabore la stratégie de résolution et on regarde si l'on peut résoudre le problème graphiquement. On part de la (des) force(s) connue(s) et on progresse en isolant les solides soumis à 2 forces ou à 3 forces pour aller jusqu'à l'effort recherché

Etape 4 : On fixe une échelle (pour le tracé des forces) et on réalise les constructions graphiques sur les figures. On ajoute au fur et à mesure les informations obtenues (direction ou force entièrement connue) sur le tracé.

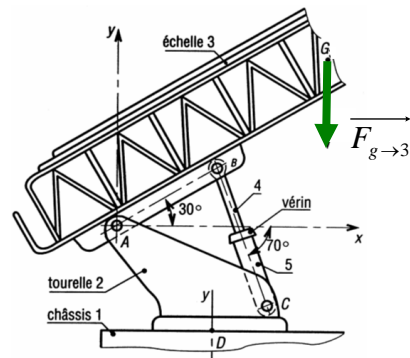
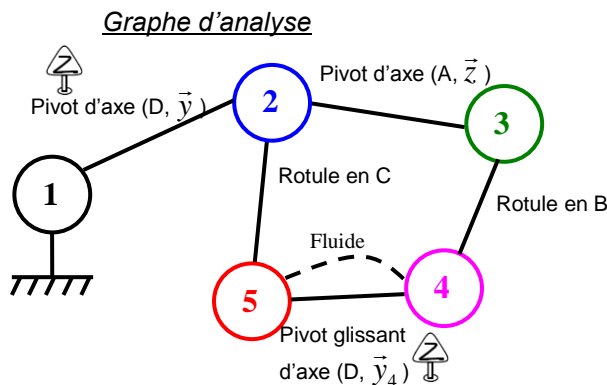
Etape 5 : On mesure l'effort recherché à l'aide de l'échelle.

Etape 6 : On indique les résultats en précisant «Graphiquement on obtient ... » et on valide ou non ou non le critère de performance attendu de la fonction de service.

Exemple de l'échelle de pompier

Objectif d'étude : à partir de l'effort connu en G, on recherche l'action exercé par le vérin pour valider son choix.

Etape 1 + 2 : Graphe d'analyse.

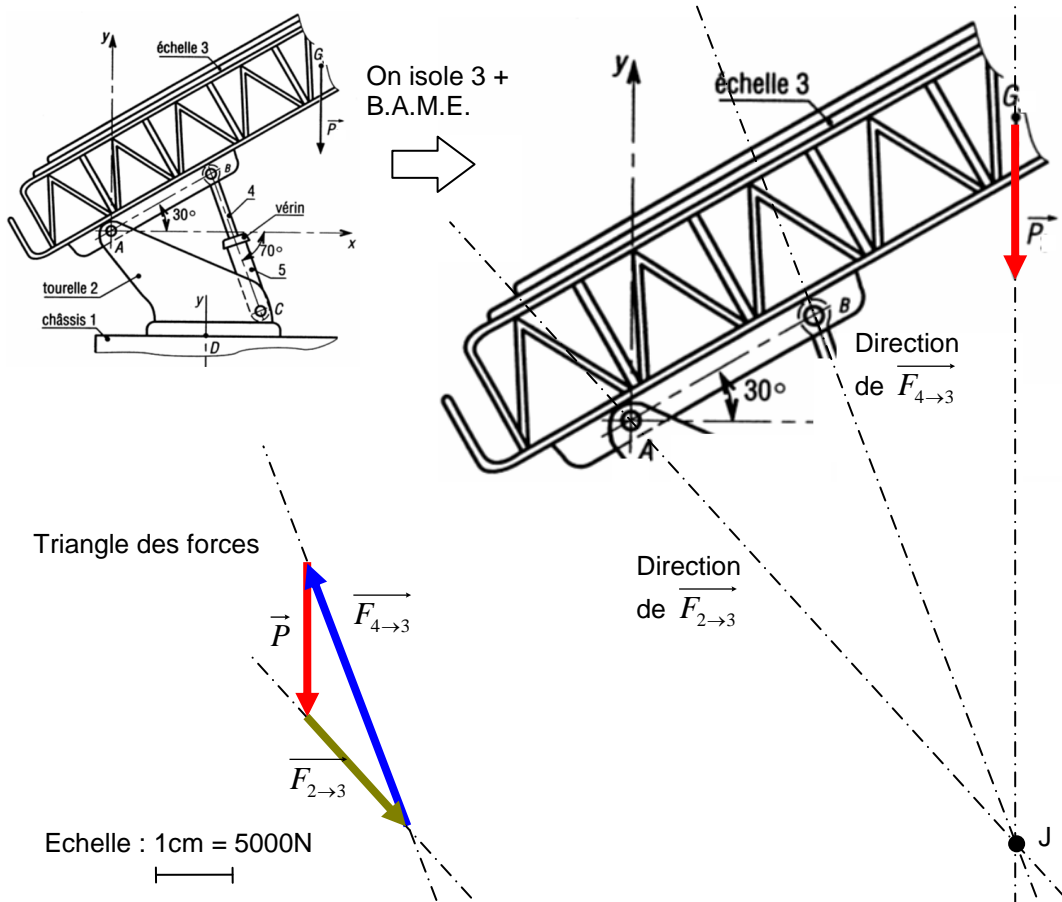


Etape 3 : Stratégie de résolution : on cherche $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$. et on connaît $\vec{F}_{pes \rightarrow 3}$ et $\vec{F}_{pes \rightarrow 2}$

On part de $\vec{F}_{pes \rightarrow 3}$. En isolant le solide 3 seul : on a un solide soumis à 3 forces dont un est connu ($\vec{F}_{pes \rightarrow 3}$) mais on ne connaît pas la direction d'au moins une des 2 autres forces. Il faut identifier au moins une direction supplémentaire : soit celle de $\vec{F}_{4 \rightarrow 3}$ ou celle de $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$.

On ne peut pas isoler le solide 2 car il est soumis à une action mécanique qui ne se réduit pas à une force dans le plan. On isole donc {4+5} : Le système est soumis à 2 forces. On en déduit donc la direction de $\vec{F}_{3 \rightarrow 4}$ ($= -\vec{F}_{4 \rightarrow 3}$)
On peut résoudre graphiquement car le solide 3 est soumis à 3 forces dans le plan (A, \vec{x} , \vec{y}).

Etape 4 : Constructions graphiques.



Etape 5 : Graphiquement on a $\|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| = 3,3 \text{ cm}$ soit $\|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| = 16500 \text{ N}$.

Etape 6 : Graphiquement on a $\|\vec{F}_{4 \rightarrow 3}\| = 9500 \text{ N}$ et on valide ou non le critère de performance attendu lié au choix du vérin.

Démarche d'application du PFS

1. Etapes de la démarche lorsque l'isolement est identifié



Lorsque l'on applique un PFS, les différentes étapes sont toujours les mêmes, à savoir :

On ISOLE un solide ou un système de solides



On le REPRESENTE ou on l'identifie sur le graphe d'analyse



On effectue le BILAN des Actions Mécaniques EXTérieures

- Actions à distance (dans la plupart des cas action de la pesanteur)
- Actions de contact (liaisons, ressorts, amortisseurs, actionneurs, fluide)
- On traduit les lois de comportement (lois de Coulomb par exemple)



Le bilan des actions mécaniques extérieures est parfois grandement facilité par le graphe d'analyse



On écrit le PFS et on recherche les équations utiles étant donné l'objectif d'étude

$$\sum \vec{F}_{\overline{S} \rightarrow (S)} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_{A\overline{S} \rightarrow (S)} = \vec{0}$$



Pour l'équation des moments, on choisit judicieusement le point d'expression.



On ECRIT les équations et on VERIFIE si besoin les hypothèses liées aux lois de comportement



Pour le bilan des actions mécaniques, trois outils peuvent être utilisés suivant le type de problèmes : l'outil torseur (utile pour les problèmes dans l'espace), l'outil vecteur dans le cas des forces (utile pour les problèmes plan en particulier), l'outil graphique (utile principalement pour les problèmes plan et permettant de visualiser le problème)

2. Résolution d'un problème de statique

Dans un cas général, la résolution d'un problème de statique peut s'avérer complexe même si les savoirs fondamentaux sont limités (seuls le principe fondamental est à savoir),
Pour l'ingénieur, la résolution d'un problème de statique passe dans un cas général par 4 grandes étapes

2-1 L'identification du problème à résoudre

On peut identifier trois types de problème mobilisant le principe fondamental de la statique.

- ✓ La détermination des actions mécaniques dans une liaison (par exemple action de liaison de(0)→(1) sur le pilote de volier
- ✓ La détermination de l'action mécanique d'un actionneur (vérin, moteur électrique,..) (par exemple action exercée par le vérin sur l'échelle de pompier)
- ✓ La détermination des conditions d'équilibre d'un ensemble mécanique

2-2 La modélisation du système étudié

Cette modélisation comporte généralement trois phases

- ✓ Une phase de paramétrage

Cette phase consiste à mettre en place les différents paramètres dans la position étudiée (par exemple sur l'auvent pour la mise en place de la géométrie ou pour l'échelle pour l'identification de la position étudiée)

- ✓ Une phase de modélisation des liaisons et des actions mécaniques

Cette phase permettant le passage du réel au modèle architectural est abordée dans le cours de technologie. Elle consiste à identifier les différents éléments de liaison et de proposer un modèle adapté.

- ✓ Une phase de mise en place des hypothèses d'étude



Pour le cours la mise en place de ces hypothèses, l'ingénieur pose un certain nombre de questions
Peut-on négliger le poids des pièces devant les autres forces mises en jeu ?
Peut-on faire l'hypothèse de liaisons parfaites ?
Le système étudié peut-il être considéré comme statiquement plan ?



Pour le cours de mécanique, cette phase de modélisation n'est pas demandée. Les modèles sont déjà posés ainsi que le paramétrage associé.

2-3 La résolution du problème étudié

S'assurer que le problème est soluble par les équations de la statique



Pour un solide ou un ensemble de solides en équilibre, la détermination des actions mécaniques de liaison n'est pas toujours faisable avec le Principe Fondamental de la Statique.
Pour le système d'équations soit résoluble, il faut que le nombre d'inconnues « statiques » du système soit égal au nombre d'équations. Dans ce cas le système est dit isostatique. Dans le cas contraire, le PFS ne suffit pas à calculer les actions de liaison, le système est dit hyperstatique.

On pose : $h = E_s - I_s$ E_s nombre d'équations utiles issues du PFS I_s nombre d'inconnues de liaison

si $h=0$, le système est isostatique (la résolution du problème est possible)

si $h > 0$ le système est hyperstatique,

Pour résoudre le problème l'ingénieur peut:

- revoir le modèle pour diminuer le nombre d'inconnues statiques (revoir le modèle choisi pour les différentes liaisons, chercher d'éventuelles symétries,....)
- rechercher des équations supplémentaires par exemple pour un contact ponctuel avec frottement, en se plaçant à l'équilibre strict (à la limite du glissement). On écrit alors une relation supplémentaire
- utiliser les équations de la résistance des matériaux tenant compte de la déformabilité des solides (voir cours de 3^{ème} année)

Choisir les outils adaptés au problème traité



Pour résoudre un problème de statique, l'ingénieur a à sa disposition plusieurs outils de résolution

- L'outil graphique utilisé pour des problèmes plan pour des solides ou ensembles de solides soumis à deux ou trois forces,
- L'outil analytique présenté également dans le cours mais qui utilise ou non l'outil torseur suivant la complexité du problème (problème spatial ou problème plan)
- L'outil numérique non abordé ici.

Problème spatial :

Dans le cas d'un problème spatial, une résolution analytique utilisant les torseurs peut être privilégiée. En effet, le calcul des moments des actions mécaniques en un même point s'appuie sur le produit vectoriel car les bras de levier sont alors complexes à calculer.

Problème plan :

Dans le cas d'un problème plan, on peut utiliser une résolution analytique ou une résolution graphique. Dans les deux cas, l'ingénieur s'appuie la plupart du temps sur une figure représentant le système isolé et les actions mécaniques extérieures appliquées.

Elaborer une stratégie de résolution

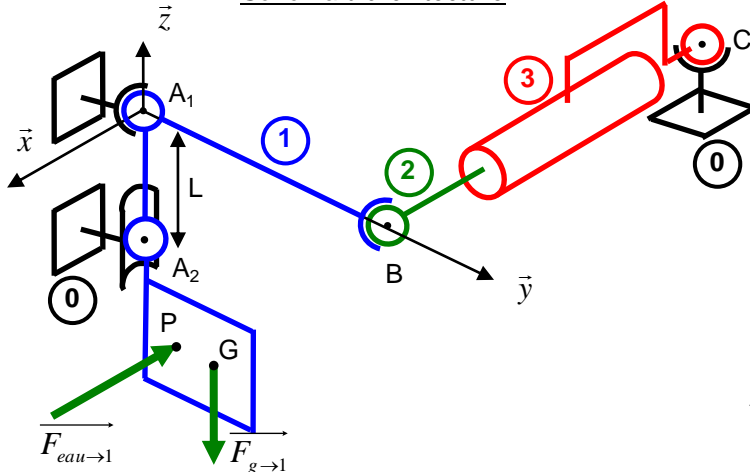
C'est probablement avec la traduction des lois du frottement la principale difficulté des problèmes de statique.



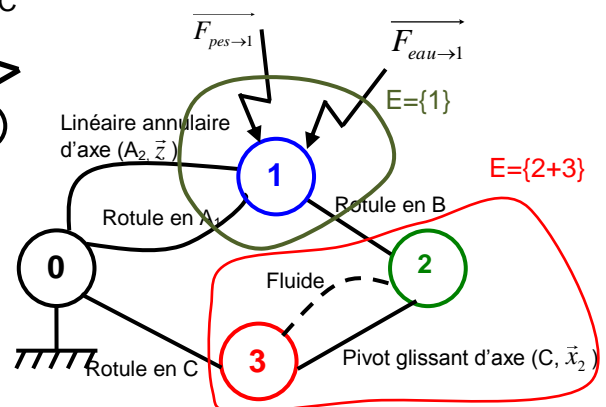
Pour des problèmes complexes, la stratégie d'isolement peut s'appuyer sur le graphe d'analyse qui permet de visualiser le nombre d'inconnues « statiques » pour un isolement donné. A partir de ce graphe, en fonction de l'objectif visé, on peut élaborer une démarche d'isolement.

Exemple du pilote automatique de bateau :

Schéma d'architecture



Graphe d'analyse



Objectif de l'étude : déterminer les actions de liaison de (0) sur (1)

Le graphe d'analyse permet de constater que l'isolement de (1) fait intervenir 8 inconnues « statiques » (2 pour la liaison linéaire annulaire en A_2 , 3 pour la liaison rotule en A_1 et 3 pour la liaison rotule en B). L'action de la pesanteur $\vec{F}_{pes \rightarrow 1}$ et l'action de l'eau $\vec{F}_{eau \rightarrow 1}$ sont connues.

Il en est de même si on isole l'ensemble {1+2+3}.

Le graphe d'analyse permet également de constater que l'ensemble {2+3} est soumis à deux forces (2 liaisons rotules) → Donc, on connaît la direction de ces forces. Il reste donc qu'une seule inconnue d'effort entre (1) et (2) qui correspond à l'intensité de la force de poussée.

La stratégie d'isolement est donc :

1/ on isole {2+3}. On déduit la direction de la force de (1) sur (2) (ou de (2) sur (1))

2/ on isole {1}. On a alors 6 équations de la statique et 6 inconnues : l'intensité de l'effort de poussée, les 2 composantes de l'effort de la liaison linéaire annulaire en A_2 , les 3 composantes de l'effort de la liaison rotule en A_1 .

2-4 L'interprétation des résultats obtenus



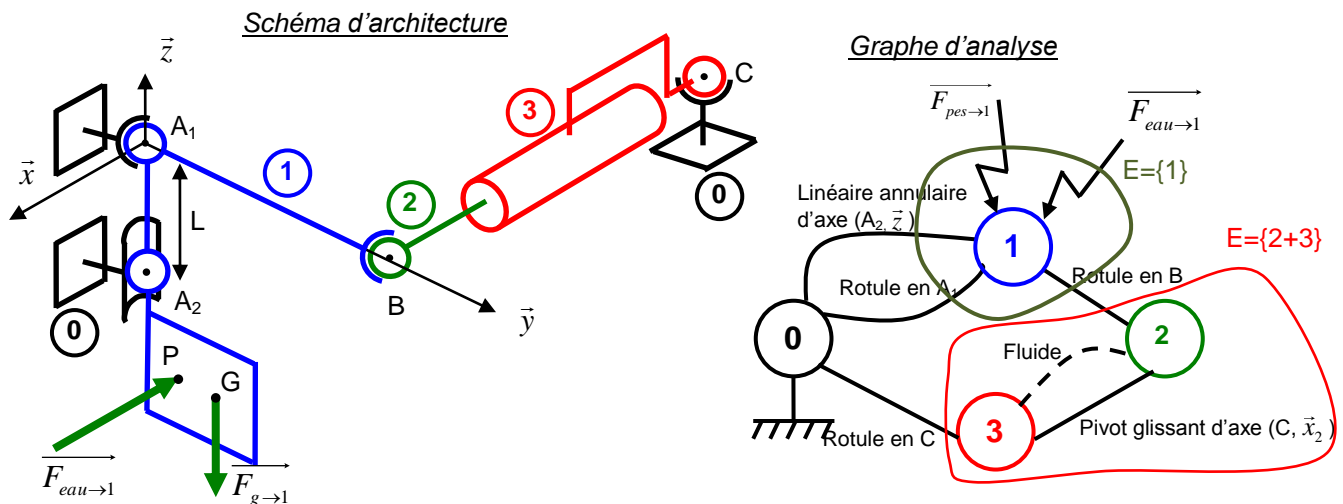
Cette dernière phase est souvent négligée par l'étudiant. Elle reste néanmoins fondamentale. Il est en effet nécessaire :

- De vérifier l'homogénéité des dimensions de l'équation obtenue
- De spécifier les unités pour les résultats numériques
- De vérifier et de s'interroger sur l'ordre de grandeur de la valeur trouvée.

3. Exemples

3-1. Exemple du pilote automatique de bateau

Objectif de l'étude : recherche des actions de liaison en A_1 et A_2 ainsi que l'effort du vérin



Données :

- L'eau exerce une action mécanique sur le gouvernail modélisée globalement par une force $\vec{F}_{eau \rightarrow 1} = -F \cdot \vec{x}$ en P de coordonnées $(0, y_P, -z_P)$.
- Le fluide exerce une action mécanique sur le corps du vérin 3 ainsi que sur la tige du vérin 2.
- Seuls les solides 0 (de centre de gravité G et de masse M_0) et 1 (de centre de gravité G_1 et de masse M_1) sont soumis à l'action mécanique de la pesanteur.
- A_1 a pour coordonnées $(0, 0, 0)$; A_2 a pour coordonnées $(0, 0, -L)$; G_1 a pour coordonnées $(0, y_{G1}, -z_{G1})$; B a pour coordonnées $(0, a, 0)$.



Pour la présentation du système et la stratégie de résolution, se référer aux chapitres précédents.

1^{er} isolement

On isole l'ensemble $E=\{2+3\}$

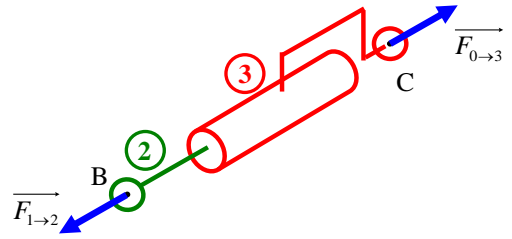
On le représente (si c'est possible)

On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures

L'ensemble E est soumis à deux forces (rotule en B et rotule en C)

Le PFS implique que les forces appliquées en B et C sont dirigées suivant (BC) qui correspond à la direction $B\vec{x}$.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}$$



2^{ème} isolement

On isole le solide (1)

On le représente (si c'est possible)

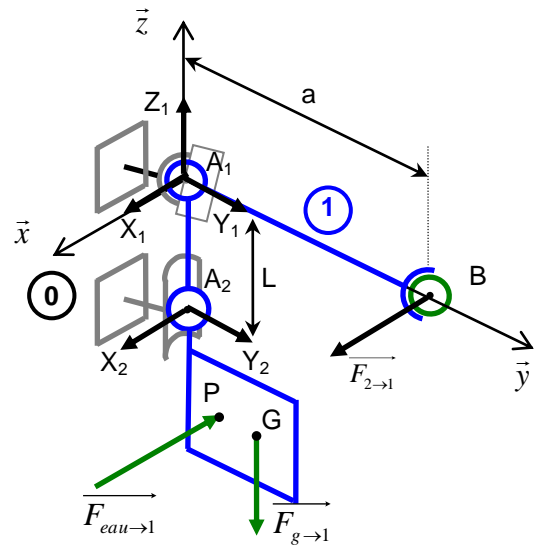
On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures

- Action de la pesanteur : $\vec{F}_{pes \rightarrow 1} = -M_1 \cdot g \cdot \vec{z}$ au point G
- Action de l'eau $\vec{F}_{eau \rightarrow 1} = -F \cdot \vec{x}$ au point P
- Action de (2) : $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = F_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}$ (isolement précédent)

- Action du bâti en A_1 : liaison rotule $\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix}_{A_1,xyz}$

- Action du bâti en A_2 : liaison linéaire annulaire d'axe $A_2\vec{z}$

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A_2,xyz}$$



Ecriture du PFS

$$\sum \vec{F}_{\bar{i} \rightarrow (1)} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_{A_1 \bar{i} \rightarrow (1)} = \vec{0}$$

Equations obtenues

$$\sum \vec{F}_{\bar{i} \rightarrow (1)} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 + F_{2 \rightarrow 1} - F = 0 \\ Y_1 + Y_2 = 0 \\ Z_1 - M_1 \cdot g = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{A_1 \bar{i} \rightarrow (1)} = \vec{0} \rightarrow \{A_1 A_2 \wedge \vec{F}_{A_2}\} + \{A_1 P \wedge \vec{F}_{eau \rightarrow 1}\} + \{A_1 G \wedge \vec{F}_{pes \rightarrow 1}\} + \{A_1 B \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1}\} = \vec{0}$$

Les équations de moment s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_p \\ -z_p \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_{G_1} \\ -z_{G_1} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_1 \cdot g \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_{2 \rightarrow 1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{cases} L \cdot Y_2 - y_{G_1} \cdot M_1 \cdot g + a \cdot F_{2 \rightarrow 1} = 0 \\ -L \cdot X_2 + z_p \cdot F = 0 \\ y_p \cdot F - a \cdot F_{2 \rightarrow 1} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Du système de 6 équations à 6 inconnues, on déduit :

- L'effort du vérin : $F_{2 \rightarrow 1} = \left(\frac{y_p}{a} \right) \cdot F$
- L'action mécanique dans la liaison linéaire annulaire :

$$X_2 = \left(\frac{z_p}{L} \right) \cdot F \text{ et } Y_2 = \left(\frac{-y_p}{L} \right) \cdot F - \left(\frac{y_{G_1}}{L} \right) \cdot M_1 \cdot g$$

- L'action mécanique dans la liaison rotule :

$$X_1 = F - \left(\frac{y_p}{a} \right) \cdot F - \left(\frac{z_p}{L} \right) \cdot F ; Y_1 = \left(\frac{y_p}{L} \right) \cdot F + \left(\frac{y_{G_1}}{L} \right) \cdot M_1 \cdot g \text{ et } Z_1 = M_1 \cdot g$$



Si l'objectif avait été de déterminer juste l'effort du vérin $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, il suffisait alors d'écrire juste l'équation des moments autour de l'axe $A_1 \vec{z}$.

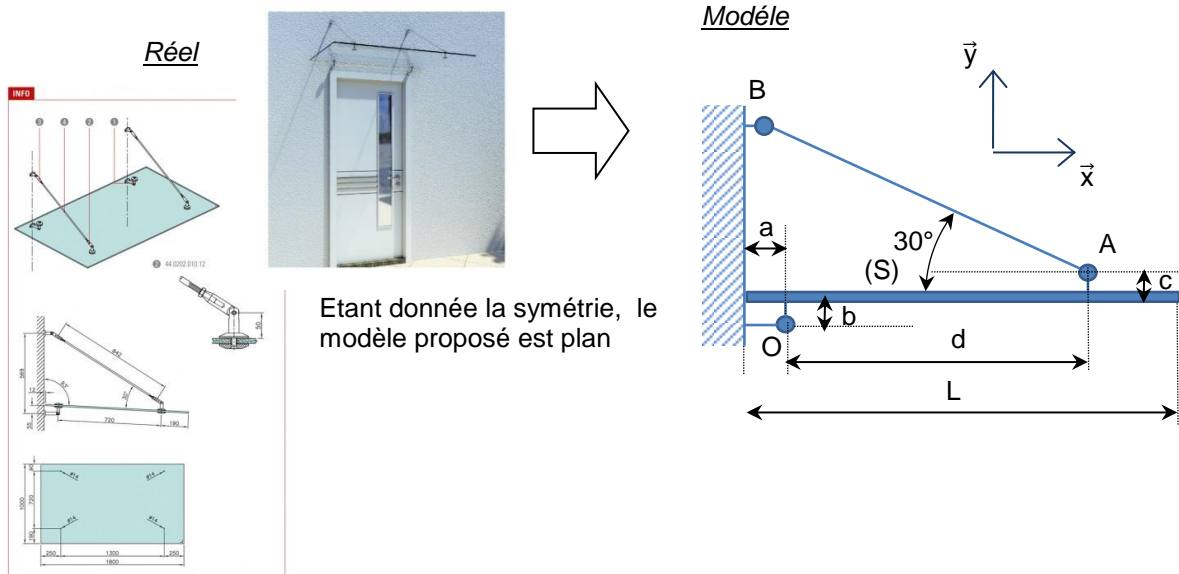
$$\sum M_{A_1 \vec{z} \rightarrow (1)} \cdot \vec{z} = 0$$



Pour l'ingénieur confirmé, la résolution de l'équation de moment peut également s'effectuer directement à partir de la figure (sans passer par le produit vectoriel)

3-2. Exemple de l'auvent

Objectif de l'étude : recherche les actions dans le câble pour vérifier son dimensionnement



Données :

- La plaque de verre est homogène et a une masse égale à 20kg soit 10kg par câble
- Les dimensions sont $L=1000\text{mm}$, $a=90\text{mm}$, $b=c=55\text{mm}$, $d=720\text{mm}$.

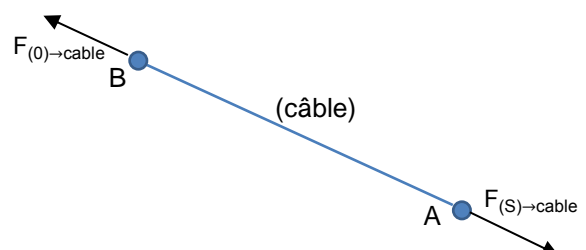
Le problème peut être considéré comme plan.

1^{er} isolement

On isole le câble

La masse du câble étant négligée, le câble est soumis à deux forces dirigées suivant la direction du câble (AB)

On note l'intensité de l'effort dans le câble F.



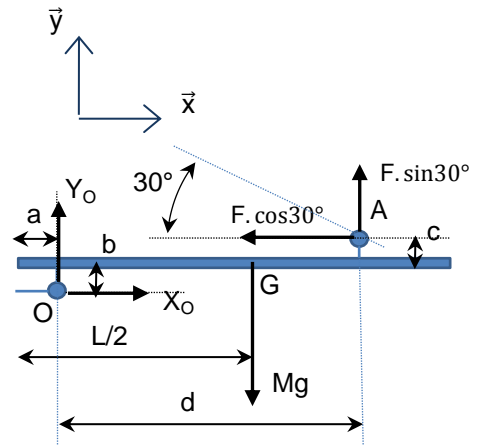
2^{ème} isolement

On isole la demi plaque (S)

On la représente

On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures

- Action de la pesanteur : $\vec{F}_{pes \rightarrow S} = -M.g.\vec{y}$ au point G
- Action du câble $\vec{F}_{cable \rightarrow S}$ au point A suivant (AB). On représente sur la figure ci-contre les coordonnées en fonction de l'angle d'inclinaison
- Action du bâti correspondant à une articulation (deux composantes d'effort dans le plan : $\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$)



Ecriture du PFS

$$\sum \vec{F}_{S \rightarrow (S)} = \vec{0}$$

$$\sum M_{O \vec{S} \rightarrow (S)} = \vec{0}$$



On ne recherche pas les efforts dans la liaison en O \rightarrow L'équation de moment autour du point O va donc nous permettre d'accéder directement à la détermination de l'effort dans le câble.

Equations (on écrit donc uniquement l'équation de moment qui permet d'accéder directement au résultat)

$$\sum M_{O \vec{S} \rightarrow (S)} = \vec{0} \rightarrow -(L/2-a).Mg + d.F.\sin 30^\circ + (b+c).F.\cos 30^\circ = 0$$



L'équation de moment autour de $O\vec{Z}$ s'écrit très facilement à partir de la figure en multipliant la force par le bras de levier avec un signe + si on tourne autour de $+\vec{z}$ et avec un signe - si on tourne autour de $-\vec{z}$.

$$\text{On déduit : } F = (L/2-a).Mg / \{d.\sin 30^\circ + (b+c).\cos 30^\circ\}$$

Application numérique :

$$F = 200.410 / (360 + 110\sqrt{3}/2) = 180\text{N}$$

L'effort dans le câble est donc égal à 180N