LA FLEXION TORSION

Principaux résultats

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion-torsion dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{coh}\}=\begin{Bmatrix} 0 & M_x \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

Nous nous plaçons dans le cas de section circulaire.
Dans ce cas, tous les axes passant par le centre géométrique de la section droite sont des axes principaux. Ainsi, dans chaque section, on peut définir un moment de flexion Mf résultant:

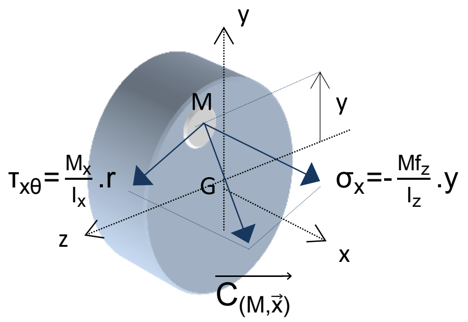
$$Mf = \sqrt{Mf_y{}^2.+Mf_z{}^2}$$

Pour les sections circulaires, les contraintes tangentielles dues aux efforts tranchants peuvent être négligées par rapport aux contraintes tangentielles dues au moment de torsion.

Le vecteur contrainte s'écrit:

$$\overrightarrow{C(M,\vec{x})}=\sigma_x.\vec{x}+\tau_{x\theta}.\vec{e_\theta}$$

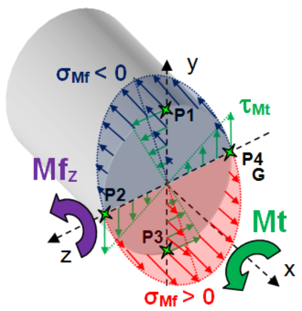
Avec $\sigma_x=-\frac{Mf_z}{I_z}.y$ et $\tau_{x\theta}=\frac{M_x}{I_x}.r$



Remarque : on suppose ici que le moment fléchissant résultant est autour de Gz.

L'état de contrainte au point M est caractérisé par la matrice

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Une diagonalisation de la matrice permet de calculer:
Les contraintes principales:

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\sigma_{xmaxi}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{x_{maxi}}{}^2.+4.\tau_{x\theta_{maxi}}{}^2} \quad \text{et} \quad \sigma_2=\frac{1}{2}\sigma_{xmaxi}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{x_{maxi}}{}^2.+4.\tau_{x\theta_{maxi}}{}^2}$$

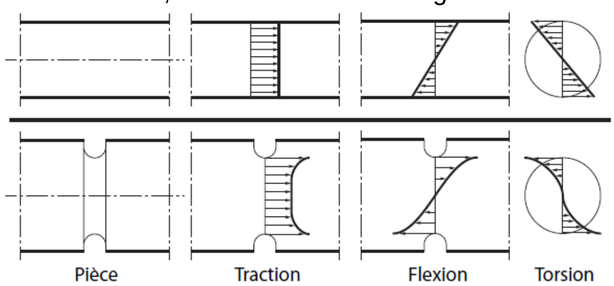
La contrainte normale maximale : $\sigma_{maxi}=\frac{1}{2}\sigma_{xmaxi}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{x_{maxi}}{}^2.+4.\tau_{x\theta_{maxi}}{}^2}$

La contrainte tangentielle maximale : $\tau_{maxi}=\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{x_{maxi}}{}^2.+4.\tau_{x\theta_{maxi}}{}^2}$

La contrainte équivalente de Von-Mises : $\sigma_{eqVM}=\sqrt{\sigma_{x_{maxi}}{}^2.+3.\tau_{x\theta_{maxi}}{}^2}$

Notion de concentrations de contraintes

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré en conception mécanique. C’est un phénomène d’augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce.
Sur la figure ci-dessous, on présente pour deux géométries d’un barreau cylindrique l'allure de répartition des contraintes normales en traction et en flexion, et des contraintes tangentielles en torsion :



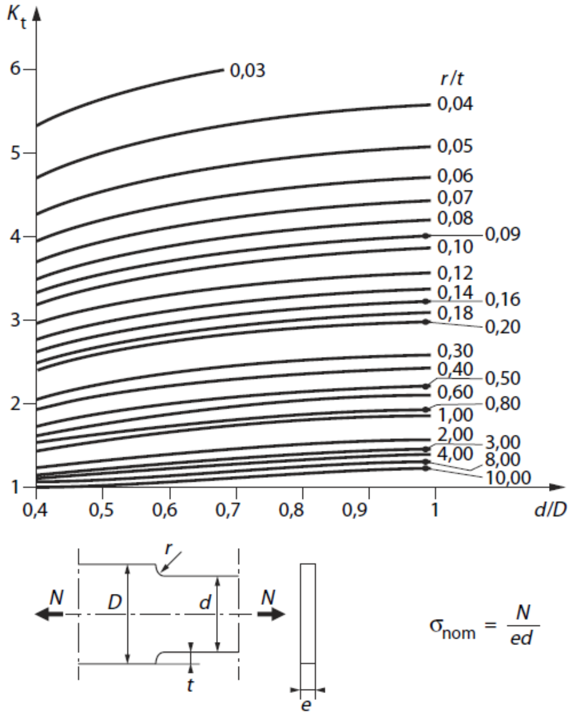
La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage de fissures de fatigue et peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile. Dans le cas des poutres, le calcul de RdM ne donne plus des résultats corrects dans la zone où les contraintes sont concentrées. Mais les calculs restent valables tant que l'on s'éloigne "suffisamment" de l'accident géométrique (trou, variation brutale de la section, entaille. . .).
La définition du coefficient de concentration de contraintes repose sur une constatation fondamentale. Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée.
On appelle contrainte nominale la contrainte maximale calculée à partir d'une étude de RdM,

Le coefficient de concentrations de contraintes Kt est alors défini par le rapport entre la contrainte réelle et la contrainte nominale :

$$K_t = \frac{\sigma_{réel}}{\sigma_{nom}}$$

L'indice "t" est employé pour indiquer que ces coefficients sont théoriques et que leur calcul repose sur les hypothèses de la théorie de la mécanique des milieux continus. Le coefficient théorique de concentration de contraintes Kt dépend uniquement de la géométrie de la pièce (et en particulier de l'accident géométrique) et du type de sollicitation. Dans ce cas, on suppose que le matériau est élastique, linéaire, homogène et isotrope.
Plusieurs approches existent pour déterminer Kt: utilisation d'abaques, de formules (souvent approchées) donnant l'expression de Kt sous forme analytique, ou encore utilisation de logiciels dédiés.

L'exemple ci-dessous illustre l'importance de la géométrie sur les valeurs du coefficient de concentration de contraintes.



On peut noter également que le coefficient de concentration de contraintes est donné pour chaque sollicitation. Ainsi, pour une sollicitation de flexion torsion, la contrainte équivalente de Von-Mises proche d'une zone de singularité s'écrit:

$$\sigma_{eqVM} = \sqrt{(Kt_{flexion}.\sigma_{x_{maxi}})^2.+3.(Kt_{torsion}.\tau_{x\theta_{maxi}})^2}$$

La contrainte normale due à la flexion a été multipliée par le coefficient de contraintes en flexion $Kt_{flexion}$. La contrainte tangentielle due à la torsion a été multipliée par le coefficient de contraintes en torsion $Kt_{torsion}$.